高中数学解题思想与方法

GAO ZHONG SHU XUE JIE TI

SI XIANG YU FANG FA

未 来 出 版 社

高中数学解题思想与方法

张克继　何粉霄　李悦兴　范光中
阎潜楣　周宗廉　张建鹏　李义真　编

未　来　出　版　社

高中数学解题思想与方法

张克继　何粉霄　李悦兴　范光中
阎谱楣　周宗廉　张建鹏　李义真　编

未来出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行　陕西省印刷厂印刷
787×1092毫米　1/32开本　16.375印张　字数348,000
1986年9月第1版　1986年9月第1次印刷
印数：1—24,000
统一书号：7303·105　定价：2.60元

序　言

中国教育学会数学研究会理事长　魏庚人
陕西师范大学教授

《中学数学解题思想与方法》，是作者根据自己在长期教学实践中所积累的丰富资料编成的。它是以“数学方法”为主线，以近代、现代数学的基本思想为指导，把培养学生的创造能力放在首位，力求帮助学生巩固知识、开阔思路。是应考学生进行复习的良师益友。

纵观全书，它有以下几个特点：

1、在知识结构上，坚持“少”、“精”、“活”的原则，加强知识的综合性。全书贯穿两条主线：纵的方面突出数学思想和方法；横的方面突出高中数学知识的基本体系，有章有法，活而不乱。

2、在编写体例上，采取概念与方法并重的原则，以概念导方法，以方法统例题，以例题体现“把知识转化为能力”的基本过程，为加强综合训练提供素材，为培养发散思维开辟途径；为提高解题能力创造条件，为掌握数学方法总结规律，力求使读者达到综合训练的目的。

3、在例题编选上，遵照标准化命题的要求，使题型搭配、知识结构尽量向高考试题靠近，使它在难度、区分度、效度、信度等方面基本符合要求；突出每一个例题的知识因素和方法因素，使读者通过某些题解熟悉数学知识，掌握数

学方法，尤其是对试题中出现频率较高的知识，概念上容易混淆的知识，方法上难于掌握的知识以及与高等数学联系较为密切的知识给了应有的重视。

本书的编者把自己多年辅导学生进行高考复习的经验集于此书，因此，不论从编排、取材、思路分析，或表达形式等方面都比较切合学生实际。

目 录

第一章 函数与图象法

第二章 变换与代数法

第三章 转化与复数法

附　录　一

附　录　二

第一章　函数与图象法

函数是数学的最重要的基本概念之一，它是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映。函数也是中学数学中的重要概念之一，这一概念之所以重要，一方面由于中学数学里有很大一部分的内容与函数概念有关；另一方面因为函数概念是高等数学的重要内容，学好这部分知识是将来进一步学习的基础。此外，由于函数概念所反映的是量与量之间的相互依存关系，因而通过这部分知识的学习，有助于我们用变化、运动的观点去分析认识问题，从而可提高我们分析问题和解决问题的能力。

学习这部分知识时，首先要注意在集合与对应等思想的基础上深入理解函数概念的实质；其次，必须掌握五类基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）的图象及基本性质，因为它们是我们研究各种复杂函数的基础；最后，必须注意将函数的学习与方程、不等式等其他有关知识的学习联系起来。学会运用函数观点看待事物间的联系及解决各类具体问题。

§1　集合、映射与函数

集合是现代数学最基础的概念之一（不加严格定义的基本概念）。对应也是一个重要的基本概念，它包括两个集

合和从第一个集合到第二个集合的一个对应法则。对应共有四种情况：一对一、多对一、一对多、多对多。其中“一对一的对应”和“多对一的对应”叫做单值对应。单值对应也叫做映射，所以映射是一种特殊的对应。函数的实质就是映射，它是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则组成的一类特殊的映射。

在函数定义中有三要素，即定义域、对应法则和值域。其中定义域和对应法则是基本的，因为值域完全可由定义域和对应法则确定。

我们说两个函数相等是指：

1　**定义域相同。**

2　**每一个相同的自变量x所对应的值相同。**因为两个对应关系的表达形式是否相同，对我们并不重要，重要的是它们的效果是不是相同。例如函数$y=lgx^2$与函数$y=2lgx$是两个不同的函数（因为它们的定义域不同）。而函数$y=|x|$与函数$y=\sqrt{x^2}$，它们的对应法则虽然形式不同，但效果一样，定义域也相同，因此它们是相同的两个函数。

函数的表示方法常用的有解析法、列表法和图示法，这三种表示方法各有利弊。在实际问题研究中，应当根据具体问题的特点，选用和配合使用这三种方法，使它们相辅相成，以达到全面掌握函数性态的目的。

在理解函数记号$y=f(x)$时，对f的涵义的广泛性要有足够的认识。不同的函数关系反映着客观过程中不同的变化规律。因此变量间的对应关系表现为多种多样。我们不能肤浅地认为它只是表示某一个数学表达式。只要是对应法则，就可以用它来表示。它可以表示一个数学表达式，也可以表示

几个数学表达式，甚至可以表示一个图形、一张表格或一句话。

例如：y代表不超过x的最大整数。用记号$y=[x]$表示。根据函数的定义，它是定义在实数集（$-\infty$，$+\infty$）上的函数，因为对任意实数x都对应着y的唯一确定值。如

$[0]=0$；$[1.25]=1$；$[\pi]=3$，$[-3.9]=-4$等等。

若规定$y=x-[x]$，记为$y=\{x\}$，根据函数的定义，它也是定义在实数集（$-\infty$，$+\infty$）上的一个函数。因为对任意实数x都对应着y的唯一确定值。如

$\{2.5\}=2.5-2=0.5$；　$\{3.14\}=3.14-3=0.14$；$\{-4.12\}=-4.12-(-5)=0.88$等等。

一个函数的定义域可以是一个区间，也可以是几个区间，甚至可以是一些离散的点。例如函数$y=\sqrt{\sin x-1}$的定义域就是一些离散的点：$2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in z$）。一个函数在定义域的不同部分上用几个不同的表达式来表示，这种函数叫做分段函数。

例如： $y=f(x)=\begin{cases}-1-x^2 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ 1+x^2 & (x>0)\end{cases}$

上式表明，对于x的负值，y应该用公式$y=-1-x^2$来计算；对于x的正值，y应该用公式$y=1+x^2$来计算；而对$x=0$，则有$y=0$

根据函数的定义，这是一个对于x的一切值都确定了的

函数。不要以为对于全部x的数值用一个解析式给出的函数与用几个公式来定义的函数之间有着原则的差别，更不能把上面的例子误认为是三个函数。

在定义域不同部分上用几个不同的解析式表达函数的方法并非是人们臆造出来的，这样的方法在物理学和科学技术中经常遇到。

例如：设有一克冰，其温度为-10℃，给以均匀加热使它化成温度为10℃的水。在这一过程中，求冰从热源吸收热量随温度变化的规律。

解：我们设t表示温度，Q表示热量。

当开始加热时，冰的温度为-10℃，此时冰从热源吸收的热量是零，因为冰的比热为0.5，因此温度上升到$t\in[-10, 0)$度时，吸收的热量是

$$
\begin{aligned}
Q &= [t-(-10)]\times 0.5\\
&=(t+10)\times 0.5\\
&=0.5t+5
\end{aligned}
$$

这就是在区间$[-10, 0)$上热量随温度的变化规律。

实验表明，一克的冰化成水所需的融化热为80卡，因为冰的温度刚升到0℃时，所吸收的热量为5卡，当全部化成0℃的水以后，其吸收热量增加到85卡，因此在$t=0$时热量的变化有了跃度。

当温度继续上升时，由于水的比热是1，因此温度上升到$t\in(0, 10]$度时，吸收的热量是

$$Q=85+t.$$

这就是在区间$(0, 10]$上热量随温度变化的规律。

综上所述，Q与t的对应规律是

$$Q(t)=\begin{cases}0.5t+5, & 当-10\leqslant t<0时\\ t+85, & 当0<t\leqslant 10时\end{cases}$$

函数$Q(t)$在$t=0$处没有定义，因为此时热量Q不能确定。函数$Q=Q(t)$的图象如图1—1所示。

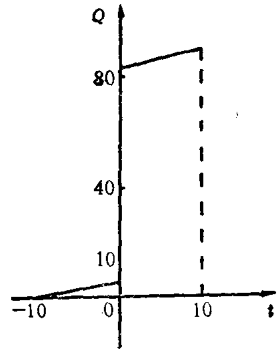

图1—1

例1、证明

（1）$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$

（2）$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

解：证明集合相等的基本方法是证明它们互为子集。

（1）若$\overline{A}\cup\overline{B}=\varnothing$，由并集定义知：$\overline{A}=\overline{B}=\Phi$。

$\therefore A=B=I$（全集），这时$\overline{A\cap B}=\overline{I}=\Phi$，在这种情况下$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$成立。

若$\overline{A}\cup\overline{B}\neq\Phi$。先证$\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$。任取$x\in\overline{A}\cup\overline{B}$，则$x\in\overline{A}$或$x\in\overline{B}$，由补集定义知$x\notin A$或$x\notin B$，可见$x\notin A\cap B$。再由补集定义知$x\in\overline{A\cap B}$。于是有$\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$；再证$\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$。任取$x\in\overline{A\cap B}$，则$x\notin A\cap B$，则有$x\notin A$或$x\notin B$。因而有$x\in\overline{A}$或$x\in\overline{B}$。由并集定义知$x\in\overline{A}\cup\overline{B}$。故这样又有$\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$。

综上$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$。

（2）利用（1）结合补集的性质可推出（2）的结

果。

由（1）$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$，则$\overline{(\overline{A})}\cup\overline{(\overline{B})}=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$，即$A\cup B=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$，这是两个相等的集合。在等式两边求补，就有

$$\overline{A\cup B}=\overline{\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$ （2）式即得证。

这两个结论叫“反演律”（也叫德·摩根定律），它在集合的运算以及在求有限集合的交、并、补中的元素数目时很有用处。

例2 解某三角方程，采用不同的方法得到三种不同形式的解：

$$X_1=\left\{x\mid x=\frac{K\pi}{6}+\frac{\pi}{12},\ K\in Z\right\},$$

$$X_2=\left\{x\mid x=\frac{K\pi}{3}\pm\frac{\pi}{12},\ K\in Z\right\},$$

$$X_3=\left\{x\mid x=\frac{K\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12},\ K\in Z\right\}\cup\left\{x\mid x=\frac{2K+1}{4}\pi,\ K\in Z\right\}.$$

已知X_1是正确的，试判断X_2、X_3是否正确。

解： 因$X_1=\left\{x\mid x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\cdot K,\ K\in Z\right\}$

$$X_2=\left\{x\mid x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\cdot(2K),\ K\in Z\right\}$$

$$\cup\left\{x\mid x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\cdot(2K-1),K\in Z\right\}$$

$$X_3=\left\{x\,|\,x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}(3K),\ K\in Z\right\}$$

$$\cup\left\{x\,|\,x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\cdot(3K-1),\ K\in Z\right\}$$

$$\cup\left\{x\,|\,x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}(3K+1),\ K\in Z\right\}.$$

又整数集$Z=\{n\,|\,n=2K,\ K\in Z\}\cup\{n\,|\,n=2K-1,\ K\in Z\}$。

而$\{n\,|\,n=3K,\ K\in Z\}\cup\{n\,|\,n=3K+1,\ K\in Z\}\cup\{n\,|\,n=3K-1,\ K\in Z\}=Z$

$\therefore X_1=X_2=X_3$,

故 X_2,X_3也是正确的。

注:整数集Z按照被p(大于1的自然数)除所得的余数分成p个两两不相交的数集,它们的并集为Z,这个性质在研究整数的性质及讨论三角方程解集的等价性时经常用到。

例3 已知$A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$,

$$B=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,(a^2-1)x+(a-1)y=15\right\}.$$

问当a为什么实数时,$A\cap B=\varnothing$,并画出图象。

解:由题设

$$A\cap B=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$$

$$\cap\left\{(x,\ y)\,\middle|\,(a^2-1)x+(a-1)y=15\right\}.$$

欲使$A\cap B=\Phi$，必须且只须方程组

$$\begin{cases}\dfrac{y-3}{x-2}=a+1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ (a^2-1)x+(a-1)y=15 \cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$$

无解。

由（1）显见$x\neq2$，若$x\neq2$，由（1）解得

$y=(a+1)(x-2)+3\cdots\cdots$（3）。代入（2）并化简得

$$2(a^2-1)x=2a^2-3a+16\cdots\cdots (4)$$

若$a=\pm1$，此时（4）左边为零，故（4）无解。

即上述方程组无解

因为$x\neq2$，故令$x=2$代入（4）化简得：

$$2a^2+3a-20=0$$

解得　$a=\dfrac{5}{2}$　或$a=-4$。

故当　$a=\pm1$，$a=\dfrac{5}{2}$，$a=-4$时，$A\cap B=\Phi$ 。

验证如下：

（1）当$a=1$时，$B=\Phi$，显然$A\cap B=\Phi$

（2）当$a=-1$时，A为直线$y=3$上除去$x=2$的所有点的集合，而B为$y=-\dfrac{15}{2}$的直线上所有点的集合，因两直线平行，故$A\cap B=\Phi$。（图1－2）

（3）当$a=\dfrac{5}{2}$时，A为直线$7x-2y=8$上除去（2，3）的所有点的集合。B为直线$7x+2y=20$上所有点的集