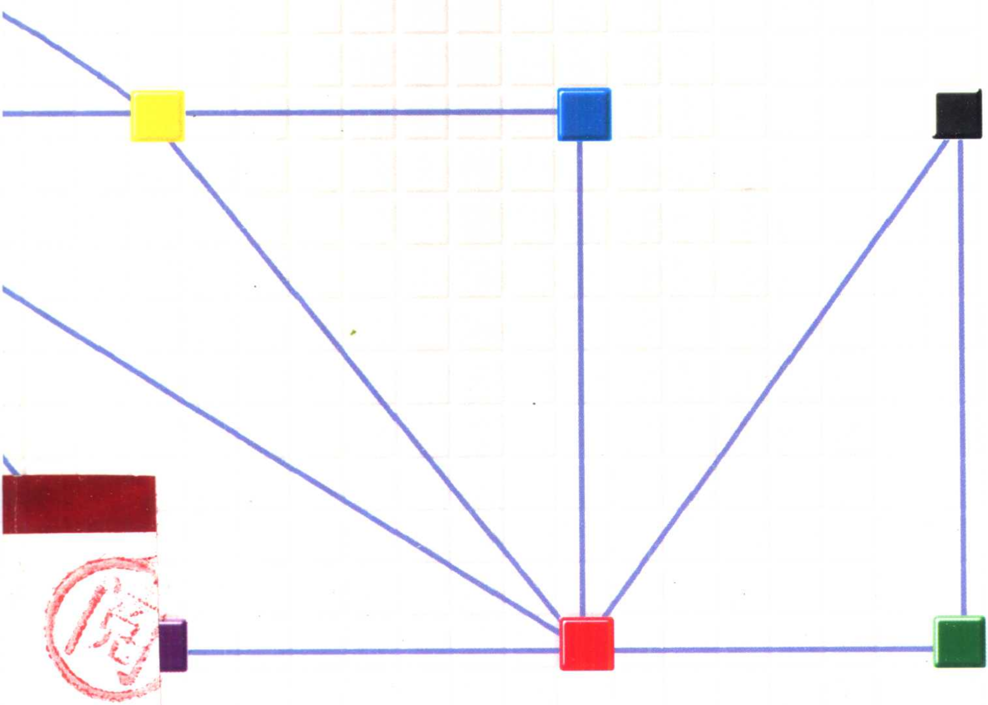
离散数学引论

修订版

王义和　编著



哈尔滨工业大学出版社

离散数学引论

（修订版）

王义和　编著

哈尔滨工业大学出版社

哈尔滨

内 容 简 介

本书内容包括三部分：集合论、图论、近世代数。全书共分十五章，讨论了集合及其运算、映射、关系、无穷集合及其基数、模糊集合论、图的基本概念、树和割集、连通度和匹配、平面图和图的着色、有向图、半群和幺半群、群、环和域、格、布尔代数。每节后配有难度不同的习题。

本书可用作高等学校计算机科学与技术/工程等专业的教材，也可供有关专业的科技人员参考。

离散数学引论

Lisan Shuxue Yinlun

（修订版）

王义和　编著

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨市工大节能印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 15.625　字数 408 千字

2000 年 3 月第 2 版　2000 年 3 月第 2 次印刷

印数 3 001 - 8 000

ISNB 7 - 5603 - 1443 - 0/O·100　定价：19.50 元

修订版说明

在这一版中，重新改写了集合论与图论部分，删去了某些较深入的内容，也加入了部分必要的内容，把原来的这两部分的九章改编为十章。近世代数部分只做了少量的修改，其中对独异点(monoid)这个词用幺半群一词代替了。

由于时间紧迫，疏漏和不妥之处请读者指正。

作　者

2000 年 1 月 7 日

序　　言

编者近几年来，在哈尔滨工业大学计算机软件专业讲授离散数学课程。本书是根据所写的讲义修改而成。

计算机科学是一个年轻的学科。它有两个主要部分：构成计算基础的一些概念和模型；设计计算系统（软件和硬件）的工程技术。在计算机科学的广阔领域中，许多问题还处在萌芽状态，有的处在由工程实践向理论转化的过程中，这就需要一个抽象过程。因此，对未来的计算机科学工作者，就需要有较好的数学训练和抽象能力的培养。离散数学这门课，部分地担负着这样的一项重要任务。所以，在讲授离散数学课程时，除了应该尽量选择那些在后继课程中要直接用到的那些数学概念和有关内容外，还应该选择少量的对培养学生的逻辑思维与提高抽象能力特别有益的内容。因此，清楚地了解一些重要概念和模型，是如何从现实生活及各种不同的学科中抽象出来的——即它们的现实原型，就显得十分重要了。本书中，对一些重要概念和定理，尽量给出直观的或现实的背景，使读者明了这些抽象概念和理论的产生之必然性。

本书内容包括三篇，共分十四章。在集合论部分讨论了集合及其运算、映射、关系、无穷集合及其基数，特别还介绍了当前正在兴起和发展的模糊集合论；在图论部分讨论了图的基本概念、树和割集、连通度和可平面性、有向图；在近世代数部分讨论了半群和独异、群、环和域、格及布尔代数等代数结构。每节后大都配有难度不同的习题以供读者练习之用。在讲授时带“※”的章节及习题可以略去。

我感到本书不足的是未包含数理逻辑部分。在哈工大，数理逻辑历来都是单独作为一门课程开设的。

本书在编写过程中，得到了哈工大计算机软件教研室有关同志

的热情支持。特别是得到原航天工业部宋健教授的鼓励。哈工大计算机应用教研室孙希文老师以极其负责的精神审阅了原稿，提出了许多宝贵意见和建议。在此一并表示深切的谢意！

编者水平有限，书中错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

一九八四年九月十七日

目　　录

第一篇　集合论

第二篇 图 论

第一篇 集 合 论

集合论是德国数学家康托(Geog Cantor,1845 ~ 1918)于1874年创立的。这个理论曾被视为无足轻重的,并激起了许多抗议。19世纪90年代后逐渐为数学家们采用,成为分析数学、代数和几何的有力工具。现在,集合论已成为内容充实且实用广泛的一门学科。它在近代数学中占据重要地位,正在影响着整个数学。

而今,集合论是整个数学的基础,在计算机科学中具有十分广泛的应用,成为计算机科学工作者必不可少的基础知识。计算机科学领域中的大多数基本概念和理论,几乎均采用集合论的有关术语来描述和论证。数学的发展历史可以看成是一个煞费苦心或精心制成的数据结构。首先我们有自然数、整数,然后有有理数、代数数,在经过一阵斗争以后,我们又有实数、复数、函数的一般概念等等。最终,人们终于明白,集合论可以作为通用语言,一切必要的数据结构都可以利用集合这个原始数据结构而构造出来。计算机科学家或许可以利用这个经历。

本篇讲述朴素集合论。主要内容包括集合及其运算、映射、关系,特别讲述了康托的无穷集合论。无穷集合论是本篇的难点。最后,介绍了模糊集合的概念及其简单性质。

第一章　集合及其运算

在本章里，首先非形式地讨论集合论的基本概念：集合及其元素，以及元素与集合间的属于关系，集合的表示方法。然后，利用这些基本概念定义集合的子集、幂集、集合相等。接着定义集合间的运算：并、交、差、对称差、集的余集、笛卡儿乘积，并讨论每种运算所满足的运算规律以及它们之间的联系。最后，介绍有穷集合的基数与基本的计数法则。

1.1　集合的概念

“集合”是集合论中的一个原始概念，原始概念是不能被精确定义的，因为我们没有比它更原始的概念。因此，我们只给出集合这个概念的一种非形式的描述，说明这个概念的含义。这正如同欧几里德几何中的“点”不加定义，而作为原始概念之一一样。

通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体就叫做一个集合，简称集。构成集合的每一个东西，称为这个集合的一个成员。构成集合的这些成员可以是具体的东西，也可以是抽象东西。例如，某教室里的所有学生形成的整体就是一个集合。全体自然数构成的整体也是一个集合。程序设计语言 C 的基本字符的全体也形成一个集合。集合的概念是如此的普遍和原始，以致于有许多同义语，如“全体”、“汇集”等等。

当抽象讨论集合时，任何一个东西称为元素，元素是可区分的。构成集合的那些成员就是集的元素。于是，任一元素，对给定的集合，要么这个元素是该集合的一个(成员)元素，要么就不是该集合的一个成员，两者必有一个成立，但不能都成立。通常我们用大写的英文字母或大写的希腊字母代替该集合。如果给定一个集合 A 和一个元

素 a，a 是 A 的一个成员(元素)，即 a 属于 A，就记为 $a \in A$。否则，若 a 不属 A，就记为 $a \bar{\in} A$ 或 $a \notin A$。$a \in A$ 读成“a 属于 A”，而 $a \bar{\in} A$ 读成“a 不属于 A”。

例 1.1 设 N 为全体自然数(正整数)之集，则

$$7 \in N, 2^7 \in N, 1024 \in N$$

而

$$0 \bar{\in} N, \frac{1}{2} \bar{\in} N, \sqrt{2} \bar{\in} N, -3 \bar{\in} N \qquad \#$$

于是，集合是由一些东西(或事物、对象，统称为元素)构成的，构成集合的每个东西叫做集合的成员。集合的成员与集合间有属于关系“$\in$”。这样，集合、元素、属于关系就是集合论中三个原始概念，它们不能精确地形式定义。集合论中的其他概念均可用这三个原始概念加以定义。

有两种方法表示一个集合。最自然的方法是把构成集合的那些元素全列出来，元素之间用逗号“,”隔开，并用花括号“{”与“}”在两边括起来以表示这些元素构成整体。例如，由 1,2,3 三个自然数构成的集合就记成 $\{1,2,3\}$，花括号把 1,2,3 括在里面使它们组成一个整体。不过，在集合的概念里我们只要求构成集合的那些元素是互不相同的，而与它们在集合中出现的次序无关。因此，集合中的每个元素只能出现一次，至于先写出哪一个无关紧要。于是，$\{1,2,3\}$ 与 $\{3,1,2\}$ 表示了同一个集合。

一般说来，仅由少数元素构成的集合才能用列出它的全部元素的方法表示该集合。对于有穷(也说有限)多个元素，原则上这个方法也是可行的，但元素的个数很大时，列出这些元素在实际上是不可行的。不过在具体问题中借助于其他知识，只列出其几个元素后就可知道组成集合的那些元素。例如，由 26 个小写英文字母 $a,b,c,\cdots,x,y,z$ 构成的集合就可记为

$$\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$$

其中的“…”就表示了那些未列出的字母，而不是说“…”也是一个元

素。在这里,我们利用小写字母在英文字母表中的顺序的知识,就知道了未列出的那些字母是什么。利用此方法有时甚至可以表示某些由无穷多个元素组成的集合。例如,全体自然数构成的集合 N 就可以写成

$$\{1,2,3,\cdots\}$$

这里借用了人们的已有知识 —— 自然数的顺序,只列出了前三个自然数,其后的自然数用"…"代替。

用上述方法表示集合很直观,哪些元素是集合的成员一望可知,但集合的这种表示方法的表达能力是有局限的。有些集合很难或不能用这种方法表示,例如,区间 $[0,1]$ 中的所有实数组成的集合就不能用这种方法表示。实际上,这个集合是"大于或等于零且小于或等于 1"的一切实数构成的。而在实际应用中,往往把具有某种性质的一些对象集合在一起形成一个集合,为此引入集合的另一表示法,这种方法是用概括集合中各元素的属性来表示集合。设 x 为某类对象的一般表示,$P(x)$ 为关于 x 的一命题,则我们用

$$\{x \mid P(x)\}$$

表示"使 $P(x)$ 成立的对象 x 所组成的集合",其中竖线"|"前写的是对象的一般表示,右边写出它应满足(具有)的属性。

例 1.2 所有偶自然数之集合 E 可记为

$$\{m \mid 2 \mid m \text{ 且 } m \in N\}$$

其中 $2 \mid m$ 表示 2 能整除 m。 #

例 1.3 $[0,1]$ 上的所有连续函数之集 $C_{[0,1]}$ 可记成

$$\{f(x) \mid f(x) \text{ 在 } [0,1] \text{ 上连续}\} \qquad \#$$

易见,集合的第二种表示法较方便,它给出了组成集合的各元素所具有性质,因此它能告诉我们更多的信息。

由有限个元素构成的集合叫做有限集合,或有穷集。由无穷多个元素组成的集合叫做无穷集合。有穷集的一个特例是仅由一个元素形成的集合,称为单元素集。例如,方程

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

的实根构成的集合就是单元素集$\{1\}$。注意，不要把单元素集$\{x\}$与它的唯一元素 x 混为一谈，否则会引出矛盾。例如，$x \in \{x\}$ 有意义，但 $x \in x$ 是无意义的。

在实际的具体问题中，常涉及具有某种性质的对象全体形成的集合，这样的集合也参加运算。但事先不知道是否存在这种性质的元素，如果后来发现这种元素不存在，那么具有这种性质的元素之集合中就不包含任何元素。于是，有必要引入一个不含任何元素的集合。不含任何元素的集合叫做空集，记为 $\varnothing$。我们假定空集是存在的，例如，方程

$$x^2 + 1 = 0$$

的实根之集是空集。空集的引入可以使许多问题的叙述得以简化。

1.2 子集、集合的相等

"集合"、"元素"、元素与集合间的"属于"关系是三个没有精确定义的原始概念，对它们仅给出了直观的描述，以说明它们的各自含义。本节利用这三个概念定义集合的子集、集合间的包含关系、集合的相等、幂集、集族等概念。

定义 1.2.1 设 A, B 是两个集合，如果集合 A 中的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集合，简称子集。这时我们说 A 包含在 B 里，或 B 包含着 A。A 是 B 的子集记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$。

由定义可知

$A \subseteq B$ 当且仅当对 A 的每个元素 x 均有 $x \in B$。以后常用记号"$\Leftrightarrow$"表示"当且仅当"；用"$\forall x \cdots$"表示"对所有的 $x \cdots$"；"$\exists x \cdots$"表示"存在一个 $x \cdots$"。于是 $\forall x \in A$ 就读作对 A 的所有元素 x。于是，

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B。$$

或等价地，

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \text{不在 } B \text{ 中元素必不在 } A \text{ 中。}$$

例 1.2.1 设 N 为所有自然数构成的集合,Q 为一切有理数组成的集合,R 为全体实数之集,C 为全体复数之集,则

$$N \subseteq Q \subseteq R \subseteq C,$$

$$\{1\} \subseteq N, \{1, 1.2, 9.9\} \subseteq Q, \{\sqrt{2}, \pi\} \subseteq R。$$ #

如果 A 不是 B 的子集,则记为 $A \nsubseteq B$(读为 A 不包含在 B 里),显然,

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x \in A \text{ 使得 } x \notin B。$$

若 A, B, C 是集合,则显然有

1°. $A \subseteq A$。

2°. 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$。

定义 1.2.2 设 A, B 为集合。如果 $A \subseteq B$ 且 $\exists x \in B$ 使得 $x \notin A$,则称 A 是 B 的真子集,记为 $A \subset B$。

例如,$\{a, b\}$ 是 $\{a, b, c\}$ 的真子集。N 是 Q 的真子集,Q 是 R 的真子集,R 为 C 的真子集。

注意符号"$\in$"与"$\subseteq$"在概念上的区别。$\in$ 为元素与集合间的属于关系,而 $\subseteq$ 为集合间的包含关系。

定义 1.2.3 设 A, B 是集合,如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则称 A 与 B 相等,并记成 $A = B$。

这就是说,如果 A 和 B 由完全相同的元素组成时,那么 A 与 B 就是相等的两个集合。两个相等的集合并不意味着它们是用同样的方法定义的。如果 A 与 B 是两个不相等的集合,那么就记为 $A \neq B$。显然,

$A \neq B \Leftrightarrow A \nsubseteq B$ 或 $B \nsubseteq A$。

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $A \neq B$。

例 1.2.2 设 $A = \{2, 3\}$,B 为方程

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

的根形成的集合,则 $A = B$。 #

定义 1.2.3 指出了一个重要原则:要证明两个集合相等,唯一的