来向荣　程维虎　编

# 简明概率论教程

JianMing GaiLüLun JiaoCheng

北京工业大学出版社

# 简明概率论教程

来向荣　程维虎　编

北京工业大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

简明概率论教程/来向荣,程维虎编.—北京:北京工业大学出版社,2001.2

ISBN 7-5639-0923-0

Ⅰ.简… Ⅱ.①来…②程… Ⅲ.概率论-高等学校-教材 Ⅳ.O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 03947 号

**简明概率论教程**

来向荣 程维虎 编

*

北京工业大学出版社出版发行

邮编 100022 电话(010)67392308

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

*

2001 年 3 月第 1 版 2001 年 3 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 32 开本 10 印张 249 千字

印数:1～1500 册

ISBN7-5639-0923-0/G・506

定价:16.00 元

## 内容简介

本书介绍概率论的一般理论。内容包括随机事件及其概率计算，随机变量及其分布函数，多维随机变量及其多元分布函数，随机变量的数字特征，特征函数，大数定律和中心极限定理等。全书共分五章，每章后配有习题，书后附有习题答案。

本书可作高等理工科院校及高等师范院校数学类各专业概率论课程的教材，也可作其他人员的参考书。

# 前　言

本书是根据1997年4月全国地方重点院校教材编写研讨会的精神，参照1977年10月“高等学校理科数学类教材编写大纲讨论会”上制定的“概率论与随机过程编写大纲”，结合编者多年来教学与科研体会而编写的.编写目的是作为高等理工院校及高等师范院校数学类专业概率论与随机课程的教材，或作为实际工作人员的参考书.

本书由来向荣、程维虎合作完成.在本书的编写中，编者广泛地听取了同行专家们的意见，尽量吸纳他人之长.在取材与写作上，编者做了如下方面的努力：

(1)尽量保证理论的完整性与严谨性，对该课程中最基本的概念、定理及公式做较全面及严格的叙述，并尽量阐述其实际意义.

(2)精选能够加深和理解基本概念、定理及公式的例题与习题.

(3)对一些定理仅给出条件和结论，并指明参考之处，以保证教学重点的完成.

(4)在保证基本内容完整的同时，充分反映国内外的最新研究成果.

在本书编写过程中，我们得到了高旅端、黄振侃、赵一夫等同志的支持与帮助，得到了北京工业大学教材委员会、北京工业大学出版社的大力支持与帮助，得到了北京市教育委员会基金与北京工业大学教材出版基金的资助.编者借此机会一并致谢.

由于编者水平有限，不当乃至谬误之处在所难免，恳请国内同行及广大读者不吝赐教.

编　者

2001年1月

# 目　　录

# 第一章 随机事件和概率

## §1.1 随机试验和随机事件

必然现象也叫确定性现象，其特点是：在一定条件下，必然出现某个确定的结果. 例如，向上抛掷一石子，石子必然落到地上. 随机现象也叫不确定性现象或偶然现象，其特点是：在同样条件下，可能出现的结果不止一个. 例如，抛掷一枚硬币，可能出现正面向上，也可能出现反面向上. 随机现象有没有规律性呢？人们在深入研究之后发现，这类现象虽然就每次的试验而言，出现什么结果具有不确定性，但在大量重复试验中，其结果的出现仍然具有某种规律性，即所谓统计规律性. 例如，有人抛掷一枚均匀硬币 4040 次，出现正面 2048 次，有人抛掷 24000 次，出现正面 12012 次，即出现正面的次数约占抛掷总次数的一半(在第五章中，将对这种规律进行数学论证). 概率论就是研究随机现象的统计规律性的数学学科.

随机试验是这样一种试验，它可能出现的结果不止一个，事前能明确知道全部可能出现的结果，但不能确知究竟出现哪个结果. 通常，还认为这种试验是能够在相同条件下重复进行的. 随机试验简称试验.

一个随机试验的所有可能出现的结果构成的集合，叫做该试验的基本空间或样本空间，通常用 $\Omega$ 表示，它的元素称作基本点或样本点，通常用 $\omega$ 表示.

称基本空间中满足一定条件的子集为随机事件，简称事件，通常用字母 $E$ 表示. 在§1.3 中，要对"一定条件"给出严格的定义.

这里，不妨把它理解为统计规律性，即认为：在大量重复试验中，该子集的出现是具有统计规律性的. 这种限制，是出于数学上的考虑. 举例说，如果某试验的基本空间是区间$[0,1]$，通常用长度来定义事件的概率. 从实变函数论知道，能够构造子集 $Q\subset[0,1]$，$Q$ 没有长度，这时，我们当然不把 $Q$ 看作事件. 实际上，可以验证，$Q$ 在试验中的出现是没有统计规律性的.

在试验中，一个事件出现或发生，是指构成该事件的一个基本点在试验中出现.

在试验中必然出现的事件，叫做必然事件. 在试验中不可能出现的事件，叫做不可能事件. 它们没有随机性. 把它们看作特殊的随机事件，是为了讨论上的方便，如同在数学分析中把常量看作特殊的变量一样.

易知，必然事件可用基本空间 $\Omega$ 表示，不可能事件可用空集 $\Phi$ 表示.

**例 1.1.1** 抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况.

用 $H$ 表示出现正面，$T$ 表示出现反面，则基本空间

$$\Omega = \{H, T\}.$$

**例 1.1.2** 记录某电话总机在一天中接到的呼唤次数.

从理论上讲，每个非负整数 $k$ 都可能是试验的一个结果，所以，基本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

**例 1.1.3** 甲、乙相约于某日 19 时至 20 时在某地相会.

用 $x,y$ 分别表示甲、乙到达的时刻，则 $x$ 与 $y$ 皆可取该日 19 时 0 分至 60 分中的任意值，基本空间

$$\Omega = \{(x,y)\,|\,0 \leqslant x, y \leqslant 60\}.$$

现设某试验的基本空间是 $\Omega$，并设 $A, B, A_k(k\geqslant 1)$都是事件，则事件之间有以下的关系和运算：

如果 $A\subset B$，则称 $B$ 包含 $A$，它表示：在试验中，如果 $A$ 出现，则 $B$ 一定出现.

如果 $A\subset B$，并且 $B\subset A$，则认为 $A$ 与 $B$ 是同一个事件，记作 $A=B$.

令 $A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$，称其为 $A$ 与 $B$ 的和或并. 类似，可定义 $n$ 个事件的和或并 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，可定义可列无穷个事件的和或并 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

令 $A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$，称其为 $A$ 与 $B$ 的积或交. 类似，可定义 $n$ 个事件的积或交 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$，可定义可列无穷个事件的积或交 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$. $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 可简记为 $A_1A_2\cdots A_n$.

令 $A-B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\bar{\in} B\}$，称其为 $A$ 与 $B$ 的差.

称 $\Omega-A$ 为 $A$ 的逆，记作 $\overline{A}$.

如果 $AB=\Phi$，则称 $A$ 与 $B$ 互不相容，它表示：在试验中，如果 $A$ 出现，则 $B$ 不出现；如果 $B$ 出现，则 $A$ 不出现.

在讨论问题时，如果 $A,B,A_k(k\geqslant 1)$ 是事件，总假设 $\bigcup\limits_{k}A_k$，$\bigcap\limits_{k}A_k$，$A-B$ 是事件. 因此，$\bigcup\limits_{k}A_k$ 表示这样一个事件：它出现的充要条件是，诸 $A_k$ 中至少一个出现；$\bigcap\limits_{k}A_k$ 表示这样一个事件：它出现的充要条件是，诸 $A_k$ 同时出现；$A-B$ 表示这样一个事件：它出现的充要条件是，$A$ 出现但 $B$ 不出现. 在事件的运算中，约定先做积，后做和差. 事件的关系和运算也就是集合的关系和运算，因此，以下诸式成立：

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$，多个事件类似；

(2)结合律：$(A_1\cup A_2)\cup A_3=A_1\cup(A_2\cup A_3)$，

$(A_1A_2)A_3=A_1(A_2A_3)$，多个事件类似；

(3)分配律：$A(\bigcup\limits_{k}A_k)=\bigcup\limits_{k}AA_k$，$A\cup(\bigcap\limits_{k}A_k)=\bigcap\limits_{k}(A\cup A_k)$；

(4)$A-B=A\overline{B}$；

(5)德莫根定律：$\overline{\bigcup\limits_{k}A_k}=\bigcap\limits_{k}\overline{A_k}$，$\overline{\bigcap\limits_{k}A_k}=\bigcup\limits_{k}\overline{A_k}$.

## §1.2 几种概率模型

设 $A$ 是试验 $E$ 的事件.在一次试验中,$A$ 可能出现,也可能不出现.可以用一个数来刻划 $A$ 在一次试验中出现的可能性的大小,记作 $P(A)$,称之为 $A$ 的概率.下面介绍三种概率模型.

### 一、古典概率

设 $n$ 是自然数,试验的基本空间 $\Omega$ 有 $n$ 个基本点,每个基本点在试验中出现是等可能的.如果事件 $A$ 含 $k$ 个基本点,则定义 $A$ 的概率 $P(A)=\frac{k}{n}$,称这种概率模型为古典概率.

易知,古典概率有以下性质:

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$,$A$ 是试验的任意事件;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 若 $m\geqslant 2$,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两不相容,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{m}A_i) = \sum_{i=1}^{m}P(A_i).$$

从(3)容易推出,若 $A$ 是事件,则 $P(\overline{A})=1-P(A)$,有时可用这个公式简化计算.

**例 1.2.1** 把一枚均匀硬币抛 3 次,求事件 $A_1,A_2$ 的概率,$A_1=\{$恰有一次出现正面$\}$,$A_2=\{$至少一次出现正面$\}$.

**解** 基本点可写作$\{x,y,z\}$,每个坐标皆可为正面 $H$ 或反面 $T$,基本点总数为 $2\times2\times2=8$,每个基本点的出现是等可能的.$A_1=\{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$,$\overline{A}_2=\{(T,T,T)\}$,所以有

$$P(A_1)=\frac{3}{8},\ P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

**例 1.2.2** 袋中有 6 个同型号小球,4 个色白,2 个色红.从袋中取球两次,每次取一个.试分别在返回抽取和不返回抽取的情况

下，求事件 $A,B,C$ 的概率. $A=$｛取到两个白球｝，$B=$｛取到两个同色球｝，$C=$｛取到的两个球中至少一个是白球｝. 所谓返回抽取，是指在第二次取球前，已将第一次取得的球放回袋中；所谓不返回抽取，是指在第二次取球时，第一次取得的球已不在袋中.

**解** 先考虑返回抽取的情况. 基本点可写作 $(x,y)$，$x$ 为第一次抽得的球，$y$ 为第二次抽得的球，$x$ 和 $y$ 皆有 6 种取法，基本点总数为 $6\times6=36$，每个基本点的出现是等可能的. $A$ 的基本点的每个坐标皆有 4 种取法，所以，$A$ 含 $4\times4=16$ 个基本点，得 $P(A)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$；注意到 $\overline{C}=$｛取到两个红球｝，其基本点的每个坐标皆有两种取法，所以，$\overline{C}$ 含 $2\times2=4$ 个基本点，得 $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{4}{36}=\frac{8}{9}$；注意到 $B=A\cup\overline{C}$，$A$ 与 $\overline{C}$ 互不相容，所以，$P(B)=P(A)+P(\overline{C})=\frac{5}{9}$.

其次考虑不返回抽取的情况. 基本点可写作 $(x,y)$，$x$ 为第一次抽得的球，$y$ 为第二次抽得的球，$x$ 有 6 种取法，$y$ 有 5 种取法，基本点总数为 $6\times5=30$，每个基本点的出现是等可能的. $A$ 的基本点的 $x$ 坐标有 4 种取法，$y$ 坐标有 3 种取法，所以，$A$ 含 $4\times3=12$ 个基本点，得 $P(A)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$；仿上，$\overline{C}=$｛取到两个红球｝，其基本点的 $x$ 坐标有两种取法，$y$ 坐标有一种取法，所以，$\overline{C}$ 含 $2\times1=2$ 个基本点，得 $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{2}{30}=\frac{14}{15}$；仿上，$P(B)=P(A)+P(\overline{C})=\frac{7}{15}$.

**例 1.2.3** 把编号为 $1,2,\cdots,n$ 的球任意放入 $n$ 个盒，每盒可容纳的球数不受限制，求事件 $A$ 的概率，$A=$｛每盒恰有一球｝.

**解** 球 $i$ 可放进 $n$ 个盒中的任一个盒，有 $n$ 种放法，$i=1,2,\cdots,n$，所以，这 $n$ 个球放入 $n$ 个盒，有 $n^n$ 种放法，每种放法是等可

能的. 把每种放法看作一个基本点，基本点总数为 $n^n$；每盒恰有一球的放法有 $n!$种，即 $A$ 含 $n!$个基本点，所以，$P(A)=\frac{n!}{n^n}$.

注意到，当 $n$ 增加时，上述比值减小得很快. 例如，当 $n=6$ 时，上式比值$=0.01543$，它是将一颗骰子掷 6 次，每次出现不同点的概率(6 次可看成 6 个盒，骰子的 6 个面可看成 6 个球).

**例 1.2.4** 设 15 件新产品中有 3 件特级品，将这 15 件新产品平均分配给三个售货点，求事件 $A$，$B$ 的概率. $A=\{$每个售货点各分配到 1 件特级品$\}$，$B=\{$3 件特级品被分配到同一个售货点$\}$.

**解** 将 15 件新产品分到三个点，使每个点恰有 5 件的分法有 $\frac{15!}{5!5!5!}$种，每种分法是等可能的. 把每种分法看作一个基本点，基本点总数为$\frac{15!}{5!5!5!}$.

把 3 件特级品分到三个点，使每个点恰有 1 件的分法有 $3!$ 种，对应于每种这样的分法，把其余 12 件非特级品分到三个点，使每个点恰有 4 件的分法有$\frac{12!}{4!4!4!}$种，所以 $A$ 含$\frac{3!12!}{4!4!4!}$个基本点，得

$$P(A)=\left(\frac{3!12!}{4!4!4!}\right)\div\left(\frac{15!}{5!5!5!}\right)=\frac{25}{91}.$$

把 3 件特级品分到同一个点的分法有 3 种，对应于每种这样的分法，把其余 12 件非特级品分到三个点，使分到特级品的点恰有两件，另两个点恰有 5 件的分法有$\frac{12!}{2!5!5!}$种，所以，$B$ 含 $3\times\frac{12!}{2!5!5!}$个基本点，得

$$P(B)=\left(3\times\frac{12!}{2!5!5!}\right)\div\left(\frac{15!}{5!5!5!}\right)=\frac{6}{91}.$$

上述计算中用到以下公式：把 $n$ 个物件分成 $k$ 组，使第一组恰有 $n_1$ 个，第二组恰有 $n_2$ 个，…；第 $k$ 组恰有 $n_k$ 个，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$(其中，$n_i$ 是正整数)，则不同的分法有 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ 种.

注意到，当 $k=2$ 时，这个公式就是组合公式.

思考题：令 $C=\{$恰有两件特级品被分配到同一个售货点$\}$，验证 $P(C)=\frac{60}{91}$，并且 $A\cup B\cup C$ 是必然事件，$A,B,C$ 两两不相容.

**例 1.2.5** 设 $N$ 件产品中有 $M$ 件废品，$N-M$ 件正品，$M<N$，从 $N$ 件产品中任意抽取 $n$ 件，$n\leqslant N-M$，试分别在不返回抽取和返回抽取的情况下求事件 $A$ 的概率. $A=\{n$ 件中恰有 $k$ 件废品$\}$，$k=0,1,2,\cdots,l$; $l=\min(M,N)$.

**解** 先考虑不返回抽取的情况. 注意到，对 $N$ 件产品作不返回抽取，每次取一件，取 $n$ 次，得到 $N$ 件产品中 $n$ 件不同的产品，其效果同从 $N$ 件产品中一次取出这 $n$ 件不同的产品一样. 从 $N$ 件中取出 $n$ 件有 $C_N^n$ 种取法，每种取法是等可能的，把每种取法看作一个基本点，基本点总数为 $C_N^n$; $k$ 件废品从 $M$ 件废品中取，有 $C_M^k$ 种取法，其余 $n-k$ 件正品从 $N-M$ 件正品中取，有 $C_{N-M}^{n-k}$ 种取法，所以，$A$ 含 $C_M^kC_{N-M}^{n-k}$ 个基本点，得 $P(A)=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

其次考虑返回抽取的情况. 从 $N$ 件中取 $n$ 件，每次皆可从 $N$ 件中任取一件，所以有 $N^n$ 种取法，每种取法是等可能的. 把每种取法看作一个基本点，基本点总数为 $N^n$; $k$ 件废品从 $M$ 件废品中取，有 $M^k$ 种取法，其余 $n-k$ 件正品从 $N-M$ 件正品中取，有 $(N-M)^{n-k}$ 种取法，$k$ 件废品出现在 $n$ 次中的方式有 $C_n^k$ 种，所以，$A$ 含有的基本点数为 $C_n^kM^k(N-m)^{n-k}$，得

$$P(A)=\frac{C_n^kM^k(N-M)^{n-k}}{N^n}=C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}.$$

我们指出：古典概率的计算不依赖于基本空间的选取. 如例 1.2.5 不返回抽取的情形，若考虑抽取的顺序，从 $N$ 件中抽取 $n$ 件的方式为排列数 $A_N^n$，每种方式是等可能的，把每种方式看作一个基本点，基本点总数为 $A_N^n$; $k$ 件废品从 $M$ 件废品中取，有 $A_M^k$ 种方式，其余 $n-k$ 件正品从 $N-M$ 件正品中取，有 $A_{N-M}^{n-k}$ 种方式，

$k$ 件废品出现在 $n$ 次中的方式有 $C_n^k$ 种，所以，$A$ 含 $C_n^k A_M^k A_{N-M}^{n-k}$ 个基本点，得

$$P(A)=\frac{C_n^k A_M^k A_{N-M}^{n-k}}{A_N^n}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},$$

同前面的结果一致.

思考题：用例 1.2.5 的公式做例 1.2.2.

## 二、统计概率

设 $A$ 是试验 $E$ 的事件. 把 $E$ 重复做 $n$ 次，在这 $n$ 次试验中，如果 $A$ 出现了 $m$ 次，称 $m$ 为 $A$ 在这 $n$ 次试验中出现的频数. 令 $f(A)=\frac{m}{n}$，称之为 $A$ 在这 $n$ 次试验中出现的频率. 频率表示 $A$ 出现的频繁程度，也可用来表示在一次试验中 $A$ 出现的可能性的大小. 问题是：$A$ 在 $n$ 次试验中的频率依赖于试验次数 $n$，当 $n$ 固定时，若另做 $n$ 次试验，所得频率也可能同先前所得的频率不同. 但是，人们发现，当试验次数 $n\to\infty$ 时，$A$ 的频率具有某种稳定性，以一个常数为波动中心. 频率的这种性质，将在第五章通过大数定律来阐明. 因此，对于充分大的 $n$，不妨用 $A$ 在 $n$ 次试验中出现的频率 $f(A)$ 作为 $A$ 的概率. 这样所得到的概率叫做统计概率.

统计概率通过试验得到，不要求基本空间的元素有限，也不要求基本点的出现具有等可能性. 这是一种一般的方法，虽不能当作概率的数学定义，但可用来验证理论和近似计算.

易知，统计概率具有以下性质：

(1) $0\leqslant f(A)\leqslant 1$，$A$ 是试验的任意事件；

(2) $f(\Omega)=1$；

(3) 对 $k\geqslant 2$，若 $A_1,\cdots,A_k$ 是两两不相容事件，则有

$$f(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f(A_i).$$

**三、几何概率**

设 $1 \leqslant n \leqslant 3$，试验 $E$ 的基本空间 $\Omega$ 是 $n$ 维空间中的一个有正度量的，并且度量为有限值的集合，每个基本点在试验中的出现是等可能的. 设事件 $A$ 是 $\Omega$ 的有度量的子集. 以 $\mu$ 表示度量（当 $n=1$ 时，$\mu$ 为长度；当 $n=2$ 时，$\mu$ 为面积；当 $n=3$ 时，$\mu$ 为体积），定义 $A$ 的概率 $P(A)=\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$，称这种概率模型为几何概型. 当 $n>3$ 时，也可类似地定义 $n$ 维空间中的几何概型.

易知，几何概率具有以下性质：

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，$A$ 是任意事件；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 对有限个或可列无穷个两两不相容的事件构成的族 $\{A_i\}$，有 $P(\bigcup_i A_i)=\sum_i P(A_i)$.

特别，对任意事件 $A$，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

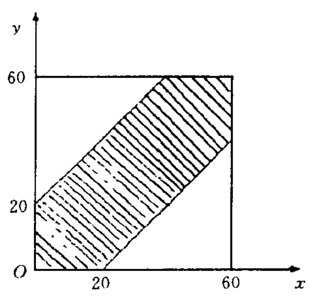


图 1.2.1

**例 1.2.6** 甲、乙相约于某日晚 19 时至 20 时在某地约会，先到者等候 20 分钟，求他们能会面的概率.

**解** 以 $x, y$ 分别表示甲、乙到达的时刻，他们可取该日 19 时 0 分至 60 分的任意值. 取基本空间 $\Omega=\{(x,y) \mid 0 \leqslant x, y \leqslant 60\}$，每个基本点的出现是等可能的. 令 $A=\{$他们能会面$\}$，则 $A=\{(x,y) \mid |x-y| \leqslant 20, (x,y) \in \Omega\}$，$A$ 是图 1.2.1 中阴影部分，其面积为 $60^2-40^2$，则