面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数学分析简明教程

上册

邓东皋　尹小玲　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

数学分析简明教程

上 册

邓东皋 尹小玲 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内 容 简 介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材．教程用“连续量的演算体系及其数学理论”的全新观点统率全书，在保留传统数学分析基本内容的前提下，比较好地处理极限与微积分演算及应用的关系，建立了一个既循序渐进、生动直观，又保持了严密性的系统，与传统的教程十分不同．本教程对概念、方法的来源与实质，有许多独到的、精辟的见解．教程分上、下两册，本书为上册，主要内容包括实数连续统、函数、极限与函数连续性、微商与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、微积分进一步应用、再论实数系等．本书是作者集几十年教学与教改经验之力作，在教学改革实践中取得较好的效果．

本书可作为高等学校理科及师范学校数学学科各专业的教科书，也可供计算机学科、力学、物理学科各专业选用及社会读者阅读．

图书在版编目(CIP)数据

数学分析简明教程　上册/邓东皋，尹小玲编著．—北京：高等教育出版社，1999.6(2001重印)

面向21世纪课程教材

ISBN 7-04-006959-8

Ⅰ.数…　Ⅱ.①邓…　②尹…Ⅲ.数学分析-高等教育-教材　Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第17674号

数学分析简明教程(上)

邓东皋　尹小玲　编著

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		

开　本	787×960　1/16	版　次	1999年6月第1版
印　张	20.25	印　次	2001年4月第3次印刷
字　数	370 000	定　价	18.00元

前　言

数学分析的主要内容是微积分，这是人类在科学中最伟大的创造之一. 微积分研究的对象是连续量. 本教程提供给读者的是一个连续量的演算体系及其数学理论. 过去读者在中小学学的算术与代数的演算大都只涉及离散量，本教程将提供一套崭新的演算——连续量的演算. 一个连续量对另一个连续量的连续依赖，其基本问题之一是"瞬时"变化率，或一个连续量对另一个连续量的变化"速率"，这就引导到微商的概念. 变化率要"瞬时"，这是连续量的特征之一. 变化率为什么要"瞬时"，其根本原因是，这样就能"机械化"地进行演算了. 另一个基本问题是连续变化的积累，或连续作用的总和. 这就引导到积分的概念. 牛顿与莱布尼茨在创立微积分时的重大贡献之一是发现求这种连续量作用的积累或总和，是求变化率运算的逆运算，从而建立了一套连续量的"机械化"的演算体系. 这一切最重要的体现是立微分方程与解微分方程. 实数本质上是（一维）连续量的数学模型. 本教程上册讲的一元函数微积分实际上是初等函数微积分. 为了把它推广到非初等函数，人们才需要无穷级数与含参变量积分这样的工具，同时为了解决多个连续量之间的依赖关系问题，才需要发展到多元微积分. 后面这两部分（无穷级数与多元微积分）便构成了本教程下册的主要内容. 极限是对上述所有概念形式化统一处理的工具. 用极限可以把上述概念精确化和统一处理，使理论简明统一. 因此，极限的概念与运算将贯穿全书. 但应提醒读者注意，一方面不要因为极限贯穿全书便用它掩盖了数学分析研究连续量演算体系的本质；另一方面，对极限的掌握也是通过对微积分各项内容的研究而逐步加深的. 这是一个循序渐进的过程，读者不必希望"一蹴而就".

历史上，微积分运算体系形成在先，用极限与实数理论给运算体系建立严格的数学基础在后. 如何处理这两者的关系，一直是数学分析教材体系的中心问题. 过去，说得极端一些，大体有两种讲法. 一种是把整个教材分成两部分：初等微积分与高等微积分. 在讲初等微积分时，主要讲微积分的运算与应用，在讲高等微积分时才讲严格的理论. 另一种讲法是先把实数、极限、连续等都讲述清楚，然后再把微积分、级数等看成不同类型的极限. 由于前面讲授极限的篇幅很大，因此通常把后面这种讲法称作"大头分析". 这两种体系各有优缺点，且曾经分别在不同时期在我国流行过. 本教程的编写，是希望在上述"初高等微积分"与"大头分析"两种讲法之间，走出一条真正的循序渐进之路，而整

个体系又是逻辑上完整的.为此,本书把实数连续性放在一个基本的位置,根据戴德金的原始思想,给出判断一个有序稠密数系是否连续的“戴德金连续性判别准则”.然后,通过实数的十进表示证明实数系是连续的.在开头讲极限时,严格地不出现上下确界、子序列、一致连续、哥西准则等等概念.闭区间连续函数的每个性质,只有在它需要时才分别出现,并用实数连续性定理加以证明.在一元微积分讲完以后,再综合讲实数连续性的其它描述与实数系的拓朴性质.全文下来每一步都是严格的.我们这样处理,与别的教程十分不同,其目的是使读者初学时尽量减少新的概念,并使微积分的运算体系与应用能尽快出现.

数学分析讲授的最大倾向是过于形式化.本教程的另一项努力的目标是在讲授数学内容时,把形式逻辑推导所掩盖的概念的背景来源、解决问题的思考方法、所讲授的内容在整个理论体系中的作用与地位以及和其他概念之间的内在联系等揭示出来.本书在讲述过程中,尽可能使读者注意物理与力学的背景模型(实物),几何的形象直观(形象),抽象的演算推理(数量)三者的结合,把它们融为一体.所有这些,人们有时用“揭露实质”这个词来解释它.当然,不能要求所有的数学书都这样写,但作为理科(包括师范)数学系一门主要的基础课,是大学生第一次接触高等数学的地方,我们认为这种写法是应该提倡的.

本书保留了传统数学分析的基本内容.我们认为这些基本概念、基本理论与基本训练,对理科数学系的学生是必不可少的.但我们努力使选材的确符合“基本”的要求,而不过分展开,使本书成为一本名符其实的“简明教程”.在与近代数学接轨的问题上,本书更多地体现在内容叙述的观点上,而不强调增加新内容.但和国内传统数学分析教材不同的是,本书讲述了一点常微分方程,并用微积分从开普勒三定律推导出万有引力定律,以及反过来从万有引力定律推导出开普勒三定律.我们认为,为引起读者的兴趣,体会微积分演算体系的精神实质,花不多的时间去讲授,是完全值得的.

在使用本书时,一些教学内容的先后次序是可以根据需要加以调整的.如上册的第八章与第九章,下册的级数理论与多元微积分,先讲后讲都是可以变更的.在上册教学中,只有两个定理(闭区间连续函数的最值定理与一致连续性定理)的证明稍微困难.有些高校在教学时可根据实际情况,在第一次讲授时把证明略去(因为后面第九章还有别的证明).还有,下册中傅里叶级数的平均收敛性与重积分换元公式的证明,不同学校也可酌情取舍.

本书第一位编者曾长期在北京大学工作,讲授过多年的数学分析课程.在教学中,曾得到过北京大学许多老一辈数学家的指导,获益甚多.他们中有申又枨、闵嗣鹤、程民德、吴光磊、冷生明,编者对他们表示衷心的感谢.其中特别

是吴光磊先生与闵嗣鹤先生，他们曾帮助编者提高了对许多数学问题的认识，本书中的许多看法都曾受到过他们的启发. 不幸他们俩已去世，本书的出版也是对他们的纪念. 本书于去年 7 月作为讲义打印出来后，中山大学林伟教授、范达教授、周建伟教授、朱匀华教授、丘兆福副教授、姚正安副教授、胡建勋副教授、北京大学文丽教授、北京师范大学王昆扬教授以及陕西师范大学常心怡教授，都阅读了或试用过本书，他们对本书提出了许多宝贵的意见，我们对他们也表示衷心的感谢. 另外，中山大学校领导与教务处，对本书的出版给予了很大的关心与支持，我们衷心地感谢他们.

本书成书的时间不长，疏漏错误难免，敬请读者批评指正.

邓东皋 尹小玲

1998 年 11 月 12 日

中山大学蒲园

目 录

第一章　绪　　论

本章叙述本教程的主要目的、内容以及学习方法中要注意的问题. 由于整个教程的内容都是建立在实数系上的,因此本章还将给出实数系及其连续性的一个简略的描述. 对于实数系,我们只要求读者掌握连续性这一基本性质,涉及到一些运算如何定义等细节,已超出了本教程的基本要求,读者暂时不必深究.

§1　绪　　论

数学分析的主要内容是微积分. 本教程的主要目的是向读者提供一套连续量的运算体系及其数学理论. 读者过去学习过的运算:加法与乘法以及它们的逆运算 —— 减法与除法,属离散量的运算体系. 本教程提供的是连续量的运算体系,因而是崭新的. 读者以后将会逐步了解到,近代的所有数学,真正"能算的",几乎最后都归结回这两种运算体系. 由此可见本课程的重要意义.

连续量在生活中随处可见,时间 t 与位移 s 是最基本的两个连续量,其它当然还有许多. 我们研究连续量还要进一步研究一个连续量随另外一个连续量连续地变化的规律,这里涉及两个最基本的问题.

问题之一是一个连续量随另一个连续量变化的"瞬时"变化率. 例如,在质点直线运动中,质点走过的路程,随时间 t 连续地变化,问题是如何求出质点在每个时刻 t 的瞬时速度和加速度,由此得到质点受力的变化. 以后将会知道,这在几何上是求曲线的切线问题,而这引导到微分运算.

问题之二是计算一个连续量的连续作用的总和或积累. 例如,一个质点受力的作用而产生位移,如果所受的力连续地随着质点所在的位置发生变化,问如何求力所作的功?当质点所受的力不变,且力的作用方向与位移相同时,则功等于力乘位移. 如果力随位移连续地变化,计算功需要有新方法,这在几何上归结为求曲线下的曲边梯形的面积,这引导到积分运算.

微积分的基本定理告诉我们,问题二中的运算是问题一中的运算的逆运算,即求连续量作用的积累事实上是求变化率的逆运算. 而问题一中的运算是可以"机械化"的. 这样,微积分便形成了一套连续量的运算体系,它是那样的有效,很快便成了解决天文、力学和技术的重要工具,以后更发展成现代自然科学和技术的基础.

历史上,微积分产生于 17 世纪. 16 世纪的欧洲,处于资本主义的萌芽时

期，生产力得到很大的发展.工业方面有机械工场的建立和机械用于采矿冶金等事业.美洲的发现、环球航行的成功、通商的扩大，促进了交通事业的发达.生产实践的发展，向自然科学提出了新的研究课题，开阔了人们的眼界，同时也为自然科学研究创造了物质技术条件.哥白尼(Copernicus，1473—1543)的"太阳中心说"标志着自然科学从神权统治下解放出来.从此，自然科学便迅速发展起来.

当时，生产和技术的大量问题迫切要求力学、天文学等基础学科的发展，这些学科是离不开数学的，因此也就推动了数学的发展.航海事业需要确定船只在大海中的位置，这就要求精确地测定地球的经纬度和制造准确的时钟，于是推动了对天体运行的深入研究；船舶的改进必须探讨流体及物体在流体中运动的规律；在战争中，要求炮弹打得准确，导致对抛射体运动的研究.此外，机械、建筑、水利等方面也提出了种种课题.在这些课题的研究中，通过大量的观测和系统的实验，人们逐步总结出一些基本的力学概念和规律.例如，开普勒(Kepler，1571—1630)，根据长期天文观测的资料，总结出行星运动的三大定律；伽利略(Galileo，1564—1642)系统地研究了落体速度的变化的规律，并发现了惯性定律；他还把精密的物理实验与数学分析方法结合起来，第一次成功地用数学公式定量地描述了物理学的规律.在以落体和行星为典型的机械运动中，提出来许多问题，其中最基本的有两个：一个是已知运动，求力，实际上是求速度与加速度；一个是已知力，求运动，实际上是已知速度、加速度，求运动.这就涉及了对连续量的描述及运算.笛卡儿(Descartes，1596—1650)和费马(Fermat，1601—1665)创立的解析几何，把这两个问题化成了求曲线切线与曲线下的面积问题，而对这两个问题，数学家是积累了许多方法和结果的.正是牛顿(Newton，1642—1727)和莱布尼茨(Leibniz，1646—1716)，总结发展了前人的成果，建立了连续量变化率的直观概念和计算方法，发现了求连续量积累总和的问题刚巧是求变化率的逆运算，从而建立了微积分的演算体系.

牛顿建立了微积分的演算体系以后，受开普勒三定律和重力的启发，想到了行星间所受的力为万有引力.他最后成功地运用微积分，从开普勒三定律推导出万有引力定律，又反过来从万有引力定律推导出开普勒三定律，这就是人类最伟大的自然科学著作之一——牛顿的《自然哲学的数学原理》的主要内容.从此微积分逐渐应用到一切科学技术领域.像达朗贝尔(D'Alembert，1717—1783)、拉格朗日(Lagrange，1736—1813)、欧拉(Euler，1707—1783)、拉普拉斯(Laplace，1749—1827)、高斯(Gauss，1777—1855)，都是运用微积分在开拓新领域方面最卓越的数学家的代表.

牛顿与莱布尼茨当时建立的微积分概念与演算，是以直观为基础的，概念

并不准确，推导公式有明显的逻辑矛盾．在微积分广泛应用的 17 ～ 18 世纪，人们没顾得及（也许是还不可能）解决这些问题．至 19 世纪，矛盾已积累到非解决不可的程度．经过人们的长期努力，最后由柯西（Cauchy，1789—1857）、波尔察诺（Bolzano，1781—1848）、魏尔斯特拉斯（Weierstrass，1815—1897）等人，用极限把微积分的概念澄清．而后来，戴德金（Dedekind，1831—1916）、康托（Cantor，1845—1918）、魏尔斯特拉斯等人，又给出了连续量的数学表示，建立了实数连续统的理论，把极限理论建立在坚实的基础上．微积分基础的建立，和群论、非欧几何一起，被誉为 19 世纪数学的三大发现，它们改变了整个数学发展的进程，形成了近代数学与现代数学．在数学内部，产生了分析、代数、几何、拓扑、概率、数理逻辑等数学分支；在科学方面，支持了量子力学、统计力学、电动力学、相对论、信息论、计算机科学、数理经济学等的产生和发展．

本教程将从描述实数连续统开始，建立严格的极限概念，从而建立微积分的演算体系和理论，并讲述一些最基本的应用．我们要求读者在学习过程中，注意物理、力学的背景模型（实物），几何的形象直观（形象），抽象的演算推理（数量）三者的结合，把它们融为一体．脑海中要有典型的例子，演算要熟练准确．前面的历史分析已经表明，本课程对学习数学、自然科学、近代科学技术的人来说，是一门最基础的课程，只有学好了，才能真正进入近代科技的大门．

§2　实数连续统

什么叫连续量？在数学上如何表示他们？

记住，最典型的连续量是时间和位移．

量有两种，一种是离散量，是以个体的形式存在的，一个一个的，“论个儿”的．有最小的单位，不能分．如单个的猫是不能分的，分了之后就不成其为猫了．在数量上可以问多少个，数（shǔ）一数（shǔ）就知道了，数（shǔ）出来就是正整数（shù）：1，2，3，…，这是离散量在数学上的表示，或者说，正整数是离散量的数学模型．

另一种量是连续量，比较复杂，它没有自然的标准单位，不能分解成最简单或最小的单位．不是不能分，而是可分，无限可分，分不完．它的存在形式是一段、一片、一块，是连续的．如一根线段，自然也是由“点”组成的，但点已经没有线段的“量”了，已不是线段了，所以点不是线段的最小单位．庄周在《庄子·地下篇》中写道：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，说的就是连续量．时间、位移（长度）是连续量，都是无限可分的．

说到这里，连续量还不能成为数学的研究对象．正整数是离散量的数学表

示，那末，连续量的数学表示是什么？

连续量可以通过量(liáng)来刻画．所谓量(liáng)，就是选一个相对固定的单位作为标准，看看对象中包含几个单位，也就是数(shǔ)，数(shǔ)出来是数(shù)．但经常出现的情况是量(liáng)不完，这时把单位分小，再量(liáng)，量(liáng)完了，这就是有理数．例如$\frac{11}{7}$是把单位分成 7 份，对象包含分小后的单位 11 个．然而，全体有理数是否描写了连续量呢？回答这个问题需要从整体上来研究有理数．这就需要数系的概念．

在分析数系以前，我们还需指出，长度是最基本的量，也是最直观的量．一般的测量总是把量化为长度．时钟是把时间的测量化为长度的测量，秤是把重量的测量化为长度的测量，温度表、电流表等等，莫不如此．各种仪表就是把各种量转化为直观而易于测量的长度．因此，直线（数轴）是我们研究连续量最典型最直观的几何模型．

我们现在来分析数系的概念，首先从回忆集合的概念开始．

集合和元素，是我们只给出描述而不给出其定义的两个概念．把某些东西作为一个总体，称为一个集合，其中的每一个东西称为这集合的一个元素．元素通常用小写字母 a,b,c 等表示，而集合用大写字母 A,B,C 等表示．a 是集合 A 的元素，表示为 $a\in A$，读作 a 属于 A．给定一个集合，就是说，我们可以分辨哪些元素属于它，哪些不属于它．

表示一个集合，通常可以用两种方法．一种方法是把这集合的元素全部列出来，例如，$A=\{a,b,c,d\}$，表示集合 A 由 a,b,c,d 四个元素组成．另一种是用某一种性质 P，把集合的全体元素描述出来，记为：

$$A=\{x\,|\,x\text{ 有性质 }P\}.$$

例如

$$A=\{x\,|\,x\text{ 是等边三角形}\},$$
$$B=\{p\,|\,p\text{ 是素数}\},$$

等等．由数组成的集合叫做数集，如 B 就是一个数集．

$$C=\{n\,|\,n\text{ 是正整数，存在正整数 }p\neq 1,q\neq 1\text{ 使得 }n=pq\}$$

也是一个数集，它由全体合数（非素数）构成，而

$$D=\{x\,|\,x\text{ 是正有理数，且 }x^2>2\}$$

也是一个数集．

设有两个集合 A 与 B．若 A 的每个元素都是 B 的元素，即 A 的每个元素都属于 B，则称 B 包含 A，或 A 包含在 B 中，或 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$．因此，$A\subset B$ 是指从 $a\in A$ 推知 $a\in B$．

例如，偶数集包含在整数集中，整数集包含在有理数集中．

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 全同，记为 $A = B$. 两个集合全同是指它们的元素一样.

设 S 是一个数集. 我们说它上面定义了一种运算"$*$"，是指对集合 S 中每一对有次序的元素 a 与 b(有时对 a 与 b 要加某些限制，例如，当"$*$"代表除法时，要求除数 $b \neq 0$)，必有确定的 c 与之对应，记为 $c = a * b$. 如果对任意 $a \in S, b \in S$，都有 $a * b \in S$，则称 S 对运算 $*$ 是封闭的. 例如在正整数集 $\mathbf{N}^+$ 中，加法与乘法都分别是定义在其上的运算，且 $\mathbf{N}^+$ 对这两种运算是封闭的. 并且这两种运算满足下面的一般规律：

(Ⅰ) 加法交换律 $a + b = b + a$；

(Ⅱ) 加法结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$；

(Ⅲ) 乘法交换律 $ab = ba$；

(Ⅳ) 乘法结合律 $(ab)c = a(bc)$；

(Ⅴ) 加法与乘法的分配律 $a(b + c) = ab + ac$.

一个数集 S，如果它上面定义了若干种运算(不管封闭与否)，这些运算满足一定的规律，那末称 S 是一个数系.

下面举出几个最重要的数系的例子，并列举他们的一些重要性质. 这些数系也许读者在中学里学过，但在这里，我们重新讲述它们的目的，除为了总结它们的一些重要性质和关系之外，主要是看哪个数系描写了连续量.

例 1 正整数系

$$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\},$$

它具有下列几条性质：

① 关于运算的性质. 正整数系有加法与乘法，满足上述的规律(Ⅰ)－(Ⅴ).

正整数系中，对有些数可以施行减法(加法的逆运算)，即方程 $b + x = a$ 对某些 a、b，在 $\mathbf{N}^+$ 中有唯一解，记作 $a - b$. 但总的说来，正整数系对减法运算是不封闭的.

正整数系中，对某些数可以施行除法(乘法的逆运算)，即方程 $bx = a$ 对某些 a, b，在 $\mathbf{N}^+$ 中有唯一解，记作 $a \div b$ 或 $\frac{a}{b}$. 但总的说来，正整数系对除法运算也是不封闭的.

② 正整数系中不仅有上述运算，还可以在其中定义大小的顺序关系，即对任意正整数 a, b，要末它们相等($a = b$)，要末一个比另一个小($a < b$ 或 $b < a$). 这种顺序关系具有下列的两条性质：

(A) 对任意的 a 与 b，下列关系中有且仅有一个成立：

$$a < b,\ b < a,\ a = b;$$

(B) 顺序关系的传递性：

$$若\ a < b, b < c, 则\ a < c.$$

一般说来，如果一个数系可以在其上定义满足性质(A)，(B)的大小顺序关系，则说这个数系是有顺序的.

正整数系的顺序关系和运算，还满足

(C) 顺序对加法的不变性：

$$若\ a < b,\ 则\ a + c < b + c.$$

(D) 顺序对乘法的不变性：

$$若\ a < b,\ 则\ ac < bc.$$

③ 正整数系中有最小数 1，但无最大数. 正整数系中的任意非空子集都有最小数.

④ 归纳法. 如果

(i) 1 有性质 P，

(ii) 由 k 有性质 P 可推出 $k+1$ 有性质 P，

那末，每个正整数都有性质 P.

例 2 整数系

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\},$$

它具有下列性质：

① 关于运算的性质. 有加法、乘法，满足规律(Ⅰ)－(Ⅴ). 有减法，且整数系对减法运算是封闭的，但对除法运算不封闭.

② 关于顺序关系的性质. 在整数系内可以定义大小顺序关系，满足(A)，(B)，(C)，但(D)应改为

(D′) 若 $a < b,\ c > 0$，则 $ac < bc$.

正整数系 $\{1,2,3,\cdots\}$ 是整数系的一个子集，但整数系较正整数系多了许多元素 $\{0, -1, -2, \cdots\}$，使原来对加法的逆运算(减法)不封闭的正整数系，扩大成对减法运算封闭的整数系了. 在这个意义下，我们说整数系是正整数系的一个扩充.

例 3 有理数系

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q\ 是整数, q \neq 0 \right\},$$

它具有以下的性质：

① 有加法、乘法，满足规律(Ⅰ)—(Ⅴ). 还有减法与除法，并且有理数系对四则运算 —— 加、减、乘、除都是封闭的.

② 关于顺序关系的性质. 在有理数系可以定义大小顺序，满足(A)，(B)，(C)，(D′).

③ 有理数和数轴上的点的对应. 在直线上取定一点 O 作为原点，在原点的右方取定一点 U 作为单位，则直线成了一条数轴.

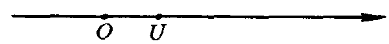

图 1-1

这时，每一个有理数 $\frac{p}{q}(q \neq 0)$，都唯一对应于数轴上的一点，这样的点称为有理点.

④ 有理数是稠密的，即对任意的有理数 a 与 b(设 $a < b$)，必存在有理数 c，使得 $a < c < b$. 这是显而易见的，因为可以取 $c = \frac{a+b}{2}$. 因此可以推出，任意两个不同的有理数，中间总有无穷多个有理数存在. 这表明，有理点是密密麻麻地分布在数轴上的. 我们把这种性质称做稠密性.

⑤ 有理数和十进小数的关系. 每一个有理数，要么是一个十进位有尽小数，要么是一个十进位无限循环小数. 反之亦然，即每一个十进位有尽小数或无限循环小数，一定是一个有理数，即一定可以写成两个整数之比. 有兴趣的读者不妨自己动手证明这一事实.

整数是有理数的一部分(分母为 1 的有理数组成的子集)，但整数系对除法运算是不封闭的，而有理数系比整数系增加了许多数，使得有理数系对除法运算也是封闭的. 因此可以说，有理数系是整数系的一个扩充.

回到连续量的数学表示问题. 我们知道，直线(数轴) 是连续量的几何模型，能否就满足于连续量的这种表示呢？实际上，这种表示有一个很大的局限性，这就是很难进行运算. 因此，我们希望能建立一个数系，一方面，在它上面可以进行运算，从而代数的工具可以发挥极大的威力；另一方面，它能刻画出直线的连续性.

由于有理数系的数和直线上的有理点相对应，而有理点又密密麻麻地分布在直线上，这就容易给人一个感觉，认为有理点是填满整个数轴的，因而有理数系是连续量的数学表示，即有理数系是连续的. 其实这是不正确的，是一个错觉.

事实上，在数轴上，OU 是单位长，作直角三角形 OUB，使 $BU = OU$. 由勾股定理知

$$OB^2 = OU^2 + UB^2 = 1 + 1 = 2.$$

以 O 为圆心，OB 为半径作圆，与数轴正半轴交于一点 A，显然 $OB = OA$. 我们来证明 OA 不可能用一个有理数表示出来，即 A 不是一个有理点.

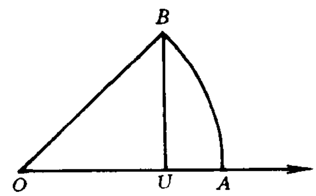

图 1-2

定理 1.1　不存在有理数$\frac{p}{q}$,使得$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$.

证明　用反证法.如果不然,设存在有理数$\frac{p}{q}$,其中p,q是互素的正整数,使得$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$,即$p^2=2q^2$,可见$p^2$是偶数,从而$p$是偶数.设$p=2l,l\in\mathbf{N}^+$,则$4l^2=2q^2$,即$2l^2=q^2$,这表明$q^2$是偶数,从而$q$是偶数,这与$p,q$互素矛盾,故不存在有理数$\frac{p}{q}$,使得$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$.

平方等于2的数,通常用$\sqrt{2}$来表示.定理1.1说明,$\sqrt{2}$不是有理数.由此看到,每一个有理数都对应于直线上的一个点,但反过来,并非直线上每一点都对应于一个有理数,也就是说,在数轴上有些点不是有理点.如果把直线看成是连续的,那末有理数所对应于直线上的点集就是不连续的,或者说有理数系本身是不连续的.定理告诉我们,有理数系在平方大于2的正数与平方小于2的正数之间断开了.我们说,有理数系在这个地方(相当于数轴上的A点)出现了空隙.其实空隙绝非只在这个地方出现,空隙在整个有理数系中也是密密麻麻地存在着的.

现在我们看出来了,有理数系并不能刻画连续量,即不能作为连续量的数学模型.问题在于,如何扩充有理数系,使新数系是连续的.

一个直接的想法就是,在有理数系中加进一些新数,它们对应于那些空隙,即把数轴上所有的空隙都填满了,这样便自然得到一个连续的数系.例如,把$\sqrt{2}$加入到有理数系中,再定义它和有理数之间的运算与大小,自然就把"$\sqrt{2}$"这个空隙填满了.然而,有理数系究竟有多少空隙?要填多少,才能填满?你怎么知道所有的空隙填满了没有?

如何扩充有理数系,使新数系是连续的,这个问题首先归结为,如何判别一个数系是连续的.也就是说,要找出连续量的数学特征,给出一个数系后,能使用这个特征判别数系是不是连续的.

作为研究连续量的微积分,大约在1665年左右就基本上建立起来了,但

差不多有 200 年的时间,什么是连续性这个问题,却一直没有解决. 随着微积分广泛与深入的应用,建立在直观基础上的微积分已显得十分不适应自然科学和数学的发展,给出连续性的精确概念这个问题,变得尖锐起来了. 到 19 世纪 70 年代左右,许多人几乎同时给出了连续性特征的描述. 在这里,我们先介绍一种最直观的 —— 戴德金连续性准则.

究竟什么是连续性呢?在这里,直观上的接连不断是不能解决问题的,因为"问题是要指明连续性的明确特征,可以作为正确推理的基础". 戴德金在他的名著《连续性与无理数》中继续写道:"经过长期徒劳的思考,我终于发现,它的实质是很平凡的. 直线上的一点,把直线分成左右两部分. 连续性的本质就在于反回去:把直线分割成左右两部分,必有唯一的分点",这句平凡的话就揭开了连续性的秘密.

把这句话翻译成数系的语言,我们引入下面的概念.

定义 1.1 若把一个有大小顺序的数系 S 分成 A,B 两类,满足下面的性质:

(i) 不空:A 与 B 都至少包含 S 中的一个数;

(ii) 不漏:数系 S 中的每个数,或者属于 A,或者属于 B;

(iii) 不乱:A 中的任一个数 a,均小于 B 中的任何数 b,即

$$对于任意\ a \in A, b \in B, 有\ a < b,$$

则称 A,B 为数系 S 的一个分划,记为 $A|B$. A 称为分划的下类,B 称为上类.

例如,$S = \mathbf{Q}$ 是有理数系,令

$$A = \left\{a \middle| a \in \mathbf{Q}, a \leqslant \frac{7}{9}\right\}, B = \left\{b \middle| b \in \mathbf{Q}, b > \frac{7}{9}\right\},$$

这构成 $\mathbf{Q}$ 的一个分划. 但

$$A = \{a | a \in \mathbf{Q}, a\ 为整数\}, B = \{b | b \in \mathbf{Q}, b\ 为非整数\}$$

不构成 $\mathbf{Q}$ 的分划,它们不满足"不乱"的性质(iii).

戴德金连续性准则 如果一个有大小顺序的稠密的数系 S,对它的任一个分划,都有 S 中唯一的数存在,它不小于下类中的每个数,也不大于上类中的每一个数,那么称数系 S 是连续的.

这个准则,用符号来写,就是:对于 S 的任一个分划 $A|B$,存在唯一的 $c \in S$,使得对任意 $a \in A, b \in B$,有 $a \leqslant c \leqslant b$. 也就是说,如果 c 属于 A,则 c 是 A 的最大数,如果 $c \in B$,则 c 是 B 的最小数. 根据"不漏"性,c 总是要属于 A 或属于 B 的,因此,连续性准则可以叙述为:称一个有大小顺序的稠密的数系 S 是连续的,如果对 S 的每个分划 $A|B$,或者 A 有最大数,或者 B 有最小数.

下面我们来证明,按戴德金连续性准则,有理数系 $\mathbf{Q}$ 是不连续的. 为此,只要找出有理数的一个分划 $A|B$,其中 A 无最大数,B 无最小数.