线性代数学习指导与例题分析

王世儒
高淑萍
任春丽
冯晓慧
编

XDUP
西安电子科技大学出版社

线 性 代 数

学习指导与例题分析

王世儒　高淑萍
任春丽　冯晓慧　编

西安电子科技大学出版社
2000

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与例题分析/王世儒等编. —西安:
西安电子科技大学出版社,1998.8

ISBN 7-5606-0643-1

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数—高等教育—教学参考资料
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第17410号

责任编辑 夏大平
出版发行 西安电子科技大学出版社
(西安市太白南路2号)
邮　　编 710071
电　　话 (029)8227828
经　　销 新华书店
印　　刷 西安电子科技大学印刷厂
版　　次 1998年8月第1版
2000年3月第3次印刷
开　　本 850毫米×1168毫米 1/32 印张 9
字　　数 220千字
印　　数 10 001~16 000册
定　　价 11.00元
ISBN 7-5606-0643-1/O·0034

内 容 简 介

本书是“线性代数”课程的学习辅导书，内容包括行列式，矩阵，向量组的线性相关性与 n 维向量空间，线性方程组，相似矩阵与矩阵对角化，二次型等.

书中不仅给出学习指导，而且有丰富的例题，包括历届研究生考试中线性代数的部分典型试题，每章后还选编了部分习题，并附有答案.

本书可供全日制大学本科、专科和夜大、函大、职工大学及自学考试等各工科专业使用，也可作为教师和有关工程技术人员的参考书.

前　言

线性代数是理工科学生的一门必修的基础课．由于线性代数中的某些内容，例如向量组的线性相关性、相似矩阵等比较抽象，以及线性代数的授课时数少，教材编写简练而例子较少等原因，使得学生学习时普遍感到困难．

通过多年的教学实践，我们认识到，要使学生学好线性代数这一门课程，除了在课堂上清晰地系统讲授线性代数的基本理论和基本方法外，还必须高度重视解题技能的训练．著名美籍匈牙利数学家、教育家波利亚在《数学的发现》一书中指出："任何一门学问都是由知识和技能所组成"，"在数学中，技能比仅仅掌握一些知识重要得多"．波利亚认为：解题是一种实践性技能，是智力的特殊成就，也是人类最富有特征的一种活动，而数学技能就是解题能力．基于上述的认识，我们编写了《线性代数学习指导与例题分析》这本书，旨在帮助学生学习各种解题方法和技巧，进一步掌握和提高分析问题和解决问题的能力．

为了便于学习，本书每节首都有内容提要，对本节所涉及的概念、定理等作一简明扼要的介绍，作为解题的逻辑根据．在学习指导和例题分析中，我们指出对某些概念应如何理解，要抓住哪些关键，并归纳出某种类型问题的解题方法和解题步骤．例题分析是本书的重点，我们既注意基本题型的分析，更注意对综合的灵活多变的问题进行分析讲解，揭示解题的规律和方法，有的问题给出多种解法，从而提高学生对知识的综合运用能力和解题能力．本书的例题除了选自一些国内外有影响的参考书或刊物外，还大量选自历届研究生入学考试的题目．这是出自两方面的

原因，一个原因是这些题目比较灵活，综合运用知识的能力强，是目前任何一本线性代数教材所没有的；另一个原因是考虑到不少学生将来要报考研究生，熟悉这些题型是有好处的. 在每章的最后我们还选编了部分习题并给出解答或答案，供学生练习之用.

编者对西安电子科技大学的教务处和出版社给予的大力支持表示衷心感谢.

由于我们的实践经验不足，水平有限，书中难免有不足或谬误之处，恳请读者批评指正.

编者

1998 年 3 月

目　　录

西安市高陵县印刷厂印刷

第 1 章　n 阶行列式

1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　内容提要

1. 排列及其逆序数

由 1，2，…，n 这 n 个数组成的一个有序数组称为一个 n 元排列. n 元排列共有 $n!$ 个.

在一个排列中，任何一对数(无论是相邻的或者不相邻的)，如果大数排在小数之前，就称这对数构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数. 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记为

$$t = \tau(p_1p_2\cdots p_n)$$

在排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 中，对调任意两个数 p_i 和 p_j 的位置，而其余数的位置不动，就称对此排列作一次对换.

对换改变排列的奇偶性.

任一 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 都可以经有限次对换变成自然排列 $12\cdots n$；反之，自然排列 $12\cdots n$ 也可以经有限次对换变成 $p_1p_2\cdots p_n$；而且所作对换的次数与排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 有相同的奇偶性.

2. n 阶行列式的定义

n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和，这里 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 1，2，…，n 的一个 n 元排列，当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列时，该项带正号；当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时，该项带负号. 记为

$$D = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

这里 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 元排列求和，上式右端称为n 阶行列式的展开式.

1.1.2 学习指导与例题分析

(1) 要求一个 n 元排列的逆序数，只需对排列的 n 个数从左到右顺序地考察，看每个数与它后面的数出现多少个逆序，然后加起来便得到这个排列的逆序数.

例 1 求排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数，并讨论它的奇偶性.

解 由于第 1 个数 n 比其后面的 $n-1$ 个数都大，所以组成 $n-1$ 个逆序，第 2 个数 $n-1$ 又比其后面的 $n-2$ 个数都大，又组成 $n-2$ 个逆序，依此类推，便得

$$\begin{aligned} t &= \tau(n(n-1)\cdots321) \\ &= (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

易知，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时(k 为正整数)，t 为偶数，所以此排

列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，t 为奇数，所以此排列为奇排列.

例 2 选择 i 与 k，使 9 元排列 $217i645k9$ 为偶排列.

解 由于该 9 元排列中缺少 3 和 8，因此 i 和 k 只可能取 3 和 8 这两个数，于是有两种可能性：$i=3$，$k=8$ 或 $i=8$，$k=3$. 我们先取 $i=3$，$k=8$ 去计算排列 217364589 的逆序数，因为

$$t=\tau(217364589)=7$$

该排列是奇排列，不符合题目要求，根据对换改变排列的奇偶性知，当 $i=8$，$k=3$ 时，排列 217864539 为偶排列.

(2) 学习 n 阶行列式的定义时，必须抓住它的三个特点，即：

① 由于 n 元排列共有 $n!$ 个，所以展开式中共有 $n!$ 项；

② 每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；

③ 每项前都带有一定的正负号. 把这 n 个元素的行标按自然序排列，即 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列时，该项带正号；当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时，该项带负号.

例 3 下列各项中，哪一项是 5 阶行列式的展开式中的项？

(1) $a_{42}a_{53}a_{34}a_{12}a_{25}$；

(2) $a_{12}a_{41}a_{35}a_{53}a_{24}$；

(3) $-a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$.

解 根据前面叙述的行列式的特点，逐项去检验.

① 因为 a_{42}，a_{12} 都是取自第 2 列，所以该项不是 5 阶行列式的展开式中的项.

② 虽然该项的 5 个元素取自不同行不同列，但该项是否带正号呢？应进一步检验. 因为

$$a_{12}a_{41}a_{35}a_{53}a_{24}=a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53}$$

此时列标排列的逆序数 $t=\tau(24513)=5$，它为奇排列，因此该项应带负号，故此项也不是 5 阶行列式的展开式中的项.

③ 易知该项的 5 个元素取自不同行不同列，又

$$a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43} = a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52}$$

且 $t=\tau(51432)=7$，所以列标排列 51432 是奇排列，该项应带负号，故此项是 5 阶行列式的展开式中的项.

例 4 写出 5 阶行列式中所有带有负号并且含有因子 $a_{14}a_{23}$ 的项.

解 由于 5 阶行列式中每项的 5 个元素应取自不同行不同列，而 $a_{14}a_{23}$ 已经固定，因此余下的 3 个元素有 3! =6 种取法，它们是 $a_{31}a_{42}a_{55}$； $a_{31}a_{45}a_{52}$； $a_{32}a_{41}a_{55}$； $a_{32}a_{45}a_{51}$； $a_{35}a_{41}a_{52}$； $a_{35}a_{42}a_{51}$

从而知带负号且含有因子 $a_{14}a_{23}$ 的项为

$$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}；\ -a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51}；\ -a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}$$

例 5 利用行列式定义计算下面的 n 阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 在 D 中只有 1，2，…，n 这 n 个元素不为零，而它们恰好位于不同行不同列，所以 D 中不为零的项为

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!$$

由于 $a_{1p_1}=1$，它位于第 1 行第 2 列，所以 $p_1=2$，又 $a_{2p_2}=2$ 位于第 2 行第 3 列，所以 $p_2=3$，同理 $p_3=4$，…，$p_{n-1}=n$，$p_n=1$，从而

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n) = \tau(23\cdots n1) = n-1$$

而行列式的其余各项中都至少有一个元素为零，所以其余各项均为零，故

$$D = (-1)^{n-1}n!$$

1.2 行列式性质，计算法和展开定理

1.2.1 内容提要

1. 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 互换行列式的任意两行(列)，行列式变号.

(3) 行列式中某一行(列)元素的公因子可以提到行列式外，或者说，用一个数乘行列式等于用该数乘行列式的某一行(列).

(4) 若行列式中的某两行(列)对应元素成比例，或有一行(列)元素全为零，则行列式的值为零.

(5) 若行列式的某一行(列)元素都是两个数之和，则此行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(6) 将行列式的某一行(列)乘以同一数加到另一行(列)对应元素上去，行列式的值不变.

2. 行列式按一行(列)展开

(1) n 阶行列式等于其任一行(列)的各元素与它们对应的代

数余子式的乘积之和. 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},\ i = 1, 2, \cdots, n$$

或 $$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\ j=1, 2, \cdots, n$$

(2) n 阶行列式的任一行(列)元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,\ i \neq j$$

或 $$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\ i\neq j$$

3. 一些特殊行列式

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)$$

1.2.2 学习指导与例题分析

行列式的计算是本章的重点. 计算行列式的方法很多，但常用的方法有以下几种：

1. 化为三角形行列式

利用行列式的性质将行列式化为上(下)三角形行列式去计算.

为了便于说明运算步骤，我们约定下述几个记号：

“$r_i \leftrightarrow r_j$”表示 i，j 两行互换；

“$c_i \leftrightarrow c_j$”表示 i，j 两列互换；

“$k \cdot r_i + r_j$”表示第 i 行乘以数 k 加到第 j 行；

“$k \cdot c_i + c_j$”表示第 i 列乘以数 k 加到第 j 列.

例 1 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[-1 \cdot r_4 + r_3]{-1 \cdot r_2 + r_1} \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$=xy\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1-x&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-1\cdot r_1+r_4]{-1\cdot r_1+r_2}xy\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&-x&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1-y\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-1\cdot r_3+r_4}xy\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&-x&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&-y\end{vmatrix}=x^2y^2$$

例 2 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$$

解 由于该行列式的各行元素之和均为 x，所以先把各列都加到第 1 列，并提出 公因子 x，得

$$D=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\-1\cdot c_1+c_3}}x\begin{vmatrix}1&0&0&x\\1&0&x&0\\1&x&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=x^4$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i \neq 0$，$i=1, 2, \cdots, n$

解 从第1行到第 n 行，依次提出公因子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，得

$$D_n = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

由于上述行列式的每列元素之和均为 $1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$，所以从第2行起各行都加到第1行并提出公因子 $1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$，得

$$D_n = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

又第1行分别乘 $\left(-\frac{1}{a_i}\right)$，$i=2, 3, \cdots, n$ 加到其他各行，得

$$D_n = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$