经济类课程提高与应试丛书

概率论与数理统计
典型题解析及自测试题

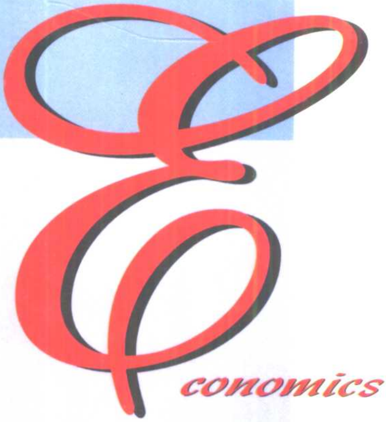
（第2版）

★ 涵盖课程重点及难点

★ 精设典型题详解及评注

★ 选配课程考试模拟及全真试卷

主　编　程少华
副主编　刘玉敏
　　　　刘　林



西北工业大学出版社

经济类课程提高与应试丛书

概率论与数理统计
典型题解析及自测试题

（第2版）

程少华 主编

刘玉敏 刘林 副主编

程少华 刘玉敏 刘 林 鲁晓旭 编

西北工业大学出版社

（陕）新登字 009 号

【内容简介】 本书总共分为三部分。第一部分典型题解析，给出了各章的内容提要；从众多试卷、习题中精选出课程必考内容的典型题并给出了详细解证，同时在题后的评注中给出了解题方法、技巧或易错点；每章后附有适量习题。第二部自测试题，是根据课程要求给出的模拟或全真试题。附录为习题及试题答案。

本书可作为高等学校经济类专业本科、大专学生的课程辅导及应试参考书，也可以作为考研的强化训练指导书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计典型题解析及自测试题/程少华主编．—西安：西北工业大学出版社，2000．8
（经济类课程提高与应试丛书）
ISBN 7－5612－1269－0

Ⅰ．概… Ⅱ．程… Ⅲ．①概率论-研究生-入学考试-解题 ②数理统计-研究生-入学考试-解题 Ⅳ．O21－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 38615 号

（邮编：710072 西安市友谊西路 127 号 电话：8493844）
全国各地新华书店经销
西安市向阳印刷厂印装
*
开本：850 毫米×1 168 毫米 1/32 印张：8 字数：195 千字
2000 年 8 月第 1 版 2001 年 1 月第 2 版第 2 次印刷
印数：8 001 14 000 册 定价：12.00 元

前　言

微积分、线性代数、概率论与数理统计是现代数学的三大支柱，是经济数学的主要组成部分，是高等学校经济类各专业重要的基础课，是经济学硕士研究生考试必不可少的内容。

在高等学校本科生或报考硕士研究生考生掌握了经济数学主要内容的基础上，为了强化其技能训练，提高其解题技巧和水平，我们根据多年的教学积累和经济类各专业的特点，编写了“经济类课程提高与应试丛书”之一的《概率论与数理统计典型题解析及自测试题》一书。

根据经济类数学的大纲要求及考研题的特点，我们精心设计了这本书的内容，使得其不仅系统性强，范围广泛，而且具有深度。同时注重经济学的背景，突出其特色，尤其是各章的“内容提要”部分，语言精练，重点突出，概括性强，使得读者能够迅速掌握该章的中心内容和基本方法。

在这本书的选题上，我们着眼于“典型性”和“全面性”，使得每章所选的例题不仅代表性强，而且能覆盖本章的主要内容。注重于由特殊到一般的思维方式，由浅入深地揭示一般规律。同时，我们在一些例题后附加了“评注”，指出其要点和易犯的错误，使得读者能很快地掌握解题技巧，达到举一反三的效果。另外，我们还结合各章的内容，配备了一定量的习题，通过这些与主要内容相呼应的习题的练习，可使读者加深对所学知识的理解，提高解题水平。自测试题是综合性题目，以课程考试的模拟或全真试卷形式给出，读者可自行检测自己的整体水平和应试能力。在这本参考书后面，我们又附加了 1999 年和 2000 年的硕士研究生考题，为报考硕士研

究生的读者提供了新的信息和一个全面检测的机会。

这本书可作为高等学校经济类各专业本科生的提高与应试参考书，也可作为报考硕士研究生考生强化训练的指导书。

本书的第一章、第六章由刘林编写，第二章、第四章由程少华编写，第三章、第八章由刘玉敏编写，第五章、第七章由鲁晓旭编写，全书由刘玉敏和程少华统稿定稿。

西北工业大学徐伟教授认真审阅了书稿，并提出了宝贵的修改意见，在此谨表感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，在编写中难免有错漏之处，欢迎广大读者批评指正。

编　　者

2000 年 5 月 22 日

目　　录

第一部分　典型题解析

第二部分　自测试题及考研试题

附录　习题及试题答案

第一部分　典型题解析

第一章　随机事件及其概率

一、内 容 提 要

（一）排列与组合

1. 乘法原理　完成一件事情有 n 个步骤，第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，…，第 n 步有 m_n 种方法，则完成这件事情共有 $m = m_1 m_2 \cdots m_n$ 种方法.

2. 加法原理　完成一件事情有 n 类方法，只要选择任何一类方法中的一种方法这件事就可以完成. 若第一类方法有 m_1 种，第二类方法有 m_2 种，…，第 n 类方法有 m_n 种，并且这 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种方法中任何两种都不相同，那么完成这件事共有 $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种方法.

3. 排列　从 n 个不同元素中无放回地取出 m 个 $(m \leqslant n)$ 元素，其不同的排列总数为

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

当 $m = n$ 时称为全排列，其总数为

$$\mathrm{A}_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

规定 $0! = 1$.

4. 有重复的排列　从 n 个不同的元素中有放回地抽取 m 个元素，其排列总数为

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m个} = n^m$$

5. 组合　从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合，其总数为

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

（二）随机事件及其运算

1. 样本点　随机试验的一个结果，记为 ω.

2. 随机事件　某些样本点构成的集合，记为 $A, B, \cdots$ 简称事件.

3. 基本事件　由单个样本点构成的集合.

4. 必然事件（样本空间）　由全体样本点构成的集合，记为 Ω.

规定不包含任何样本点的集合称为不可能事件，记为 $\varnothing$.

5. 事件 A 与 B 的交　事件 A 与 B 同时发生的事件，记为 $A \cap B$ 或 AB.

6. 事件 A 与 B 的并　事件 A 与 B 至少有一个发生的事件，记为 $A \cup B$.

7. 事件 A 与 B 的差　事件 A 发生但事件 B 不发生的事件，记为 $A - B$.

8. 事件 A 的逆事件　$\overline{A} = \Omega - A$.

9. 事件 A 与 B 为互不相容事件（互斥事件）　事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$.

10. 事件 A 包含 B　事件 B 发生必定导致事件 A 发生，记为 $B \subseteq A$.

（三）概率的基本性质

设含有 n 个样本点的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n\}$，且每个样本点的概率都是 $1/n$，则包含有 k 个样本点（$k \leqslant n$）的事件 A 的概率定义为 $P(A) = \dfrac{k}{n}$.

（1）$P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$.

（2）$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. 若 $AB = \varnothing$，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

若 $B \subseteq A$，则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

（3）$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

（4）$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j) + \sum_{i \neq j, i \neq k, k \neq j} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$

若 $A_i A_j = \varnothing$ $(i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

（四）条件概率及概率的乘法定理

1. 事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率 $P(B|A)$ 定义为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) > 0)$$

2. 乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (P(A) > 0)$$
$$P(AB) = P(B)P(A|B) \quad (P(B) > 0)$$

3. 乘法公式推广

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

（五）全概率公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为互不相容事件，且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$. 则对任意事件 B 的概率均有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

2. 贝叶斯公式

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}\quad(i=1,\cdots,n)$$

（六）随机事件的独立性

1. 事件 A 与 B 相互独立　若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B 相互独立.

2. 推论　若 A,B 相互独立，则：

(1) $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也分别相互独立.

(2)
$$P(A|B)=P(A)\quad(P(B)>0)$$
$$P(B|A)=P(B)\quad(P(A)>0)$$

3. 推广　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

（七）贝努里(Bernoulli)概型

设一次试验的结果只有 A 及 $\overline{A}$ 两个，且事件 A 发生的概率 $P(A)=p(0<p<1)$，做 n 次独立重复试验，则在 n 次重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots n)$$

二、典型题解析

例 1.1 设 A,B,C 表示 3 个随机事件，试通过 A,B,C 表示下列有关的随机事件 .

(1) A 发生而 B,C 都不发生.

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生.

(3) A,B,C3 个事件都发生.

(4) A,B,C3 个事件至少有 1 个发生.

(5) A,B,C3 个事件至少有 2 个发生.

(6) A,B,C3 个事件都不发生.

(7) A,B,C 不多于 1 个发生.

(8) A,B,C 不多于 2 个发生.

(9) A,B,C 恰有 2 个发生.

解 (1) 可表示为 $A\overline{B}\overline{C}$ 或$(A-B)-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

(2) 可表示为 $AB\overline{C}$ 或$(AB)-C$ 或 $AB-(ABC)$.

(3) 可表示为 ABC.

(4) 可表示为 $A\cup B\cup C$.

(5) 可表示为$(AB)\cup(BC)\cup(CA)$.

(6) 可表示为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或$\overline{A\cup B\cup C}$.

(7) 可表示为$(\overline{A}\overline{B}\overline{C})\cup(A\overline{B}\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\overline{B}C)$ 或 $\overline{(AB)\cup(BC)\cup(CA)}$.

(8) 可表示为$\overline{ABC}$ 或$(\overline{A}\overline{B}\overline{C})\cup(A\overline{B}\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)\cup(A\overline{B}C)\cup(AB\overline{C})$.

(9) 可表示为$(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$.

【评注】 复合事件常用“恰有”,“只有”,“至多”,“至少”,“都发生”,“都不发生”,“不都发生”等词来描述，为了准确地用一些简单事件的运算来表示出复合事件，必须弄清楚这些概念的含义. 随机事件可以根据定义直接表

示出来，也可以用其逆事件的逆事件来表示. 如(4) 和(6) 是互逆事件，因此(6) 可以 用$\overline{ABC}$来表示，也可以用$\overline{A \cup B \cup C}$来表示. 在(9) 中"恰有两个发生"的含义是若有两个事件发生，则第 3 个事件就不能发生，因此与(5) 有区别，可以用$(AB\overline{C}) \cup (A\overline{B}C) \cup (\overline{A}BC)$来表示，也可以用$[(AB) \cup (BC) \cup (AC) - (ABC)]$来表示. 在一般情况下，尽量将事件表示成互不相交事件的并，这样在计算概率时会容易些.

例 1.2 在某城市中发行 3 种报纸 A,B,C. 经调查，在居民中按户订阅 A 报的占 45%，订阅 B 报的占 35%，订阅 C 报的占 30%，同时订阅 A 报和 B 报的占 10%，同时订阅 A 报和 C 报的占 8%，同时订阅 B 报和 C 报的占 5%，同时订阅这 3 种报纸的占 3%. 试求下列事件的概率：

(1) 只订 B 报的；

(2) 只订 A 报及 B 报的；

(3) 正好订 1 种报纸的；

(4) 正好订 2 种报纸的；

(5) 至少订阅 2 种报纸的；

(6) 至少订 1 种报纸的；

(7) 不订报纸的；

(8) 至多订阅 1 种报纸的.

解 设 $A=$"订阅 A 报"，$B=$"订阅 B 报"，$C=$"订阅 C 报"，则

$$P(A)=0.45,\quad P(B)=0.35,\quad P(C)=0.30$$

$$P(AB)=0.10,\quad P(AC)=0.08,\quad P(BC)=0.05$$

$$P(ABC)=0.03$$

(1) $$P(\overline{A}B\overline{C})=P((B-A)-C)=P(B-[B\cap(A\cup C)])=$$
$$P(B)-P(B(A\cup C))=$$
$$P(B)-P[(AB)\cup(BC)]=$$
$$P(B)-[P(AB)+P(BC)-P(ABC)]=$$

$$0.35-(0.10+0.05-0.03)=0.23$$

(2) $P(AB\overline{C})=P((AB)-C)=P((AB)-(ABC))=$

$$P(AB)-P(ABC)=0.10-0.03=0.07$$

(3) $P[(A\overline{B}\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\overline{B}C)]=$

$P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)=$

$P(A-[(AB)\cup(AC)])+$

$P(B-[(AB)\cup(BC)])+$

$P(C-[(AC)\cup(BC)])=$

$P(A)-P[(AB)\cup(AC)]+P(B)$

$-P[(AB)\cup(BC)]+P(C)-P[(AC)\cup(BC)]=$

$0.45-(0.10+0.08-0.03)+0.35-$

$(0.10+0.05-0.03)+0.30-$

$(0.08+0.05-0.03)=0.73$

(4) $P[(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)]=$

$P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)=$

$P[(AB)-(ABC)]+P[(AC)-(ABC)]+$

$P[(BC)-(ABC)]=$

$P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)=$

$0.10+0.08+0.05-3\times 0.03=0.14$

(5) $P[(AB)\cup(AC)\cup(BC)]=$

$P[(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)\cup(ABC)]=$

$P[(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)]+P(ABC)=$

$0.14+0.03=0.17$

(6) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-$

$[P(AB)+P(AC)+P(BC)]+P(ABC)=$

$0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03=$

0.90

(7) $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=$

$$1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.90 = 0.10$$

(8) $P[(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) \cup (A\overline{B}\overline{C}) \cup (\overline{A}B\overline{C}) \cup (\overline{A}\overline{B}C)] =$

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) + P[(A\overline{B}\overline{C}) \cup (\overline{A}B\overline{C}) \cup (\overline{A}\overline{B}C)] =$$

$$0.1 + 0.73 = 0.83$$

【评注】 应该 注意 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 的适用条件是 $A \cap B = \varnothing$，否则只能使用 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. 本题可用文氏图辅助求解，这样会清楚一些.

例 1.3 将1套4册的文集按任意顺序放到书架上去，问各册自右向左或自左向右恰成1，2，3，4的顺序的概率是多少？

解 若以 a,b,c,d 分别表示自左向右排列的书的卷号，则所述文集放置的方式与向量(a,b,c,d) 建立一一对应关系. 因为 a,b,c,d 取值于1，2，3，4，因此这些向量的总数就是4个元素的全排

$$p_2=\frac{C_6^2C_5^1}{C_{11}^3}=\frac{5}{11}$$

或者
$$p_2=3P_1=3\times\frac{5}{33}=\frac{5}{11}$$

（3）取得两只黑球的概率

$$p_3=\frac{6\times6\times5}{11\times11\times11}\times C_3^2=(\frac{6}{11})^2\times\frac{15}{11}$$

【评注】 在(3)中所构造的样本空间是重复排列，因此在计算事件所包含的样本点数时应把样本空间中所有符合“有两个黑球”条件的样本点都计算在内，它们是(黑，黑，白)、(黑，白，黑)、(白，黑，黑)三类样本点之和.

例 1.5 在 0,1,2,…,9 中依次取出 4 个数排列一起，能组成 4 位偶数的概率为多少？

解 设样本空间 $\Omega=\{abcd\,|\,0\leqslant a,b,c,d\leqslant 9$ 且 a,b,c,d 互不相等$\}$，则 Ω 中样本点数

$$n=A_{10}^4=10\times9\times8\times7=5040$$

再来计算构成的 4 位偶数的个数. 其个数为

$$A_9^3C_5^1-A_8^2C_4^1=2520-224=2296$$

从而所求概率 $p=\dfrac{2296}{5040}=0.46$.

【评注】 四位偶数的构成可以这样来考虑，在个位上任取一个偶数，则有 C_5^1 种取法，而千、百、十位上由剩下的 9 个数中任取 3 个排列，共有 P_9^3 种排法. 但当 0 排在千位上时不能构成 4 位数，因此要去掉 0 排在千位上的偶数的数目，共有 $A_8^2C_4^1$种.

例 1.6 设有 n 个人，每个人都以同样的机会分配到 N 间房中的每间房子中，问某一指定房间中恰分到 m $(m<n)$ 个人的概率为多少？

解 把 n 个人分到 N 个房间中去，由于每人有 N 种分法，故共计有 N^n 种分法.

某一指定房间有 m 个人，则剩下 $n-m$ 个人可以在余下 $N-1$ 个房间中任意分配，共有$(N-1)^{n-m}$ 种方法，从而某一指