工程数学
——复变函数

祝同江　主编

電子工業出版社

工 程 数 学

复 变 函 数

祝同江 主编

杨延齐 章栋恩 刘伯涵
唐 兢 林民辉 祝同江 合编

電子工業出版社

（京）新登字055号

内 容 简 介

本书根据高等学校工科类工程数学教学大纲的要求编写。它全面、系统地讨论了复变函数学的有关问题。全书共六章，包括复变函数及极限和连续性、解析函数、复积分、复级数、留数及其在积分计算中的应用，保角映射等内容。对书中的重点、难点进行了详细的解释。在各节的后面附有习题和习题答案，供读者自检。

本书适于高等学校工科类师生以及工程技术人员阅读。

工 程 数 学
复 变 函 数
祝同江 主编
责任编辑：竞 力
电子工业出版社出版（北京市万寿路）
电子工业出版社发行 各地新华书店经售
中国科学院印刷厂印刷
开本：850×1168毫米 1/32 印张：7.25 字数：160千字
1993年12月第一版 1993年12月第一次印刷
印数：6 000册 定价：6.80 元
ISBN 7-5053-2125-0/G·170

前　　言

本书由北京四所高等院校的六位数学教师通过多年的教学实践，共同编写而成。全书共分六章，第一章复变函数及其极限和连续性，由北京邮电学院杨延齐编写；第二章解析函数，由北京轻工业学院章栋恩编写；第四章复级数，由北京计算机学院唐虢编写；第三章复积分、第五章留数及其在积分计算中的应用、第六章保角映射，分别由北京理工大学刘伯涵、林民辉和祝同江编写。本书前四章由祝同江审稿，第五、六章分别由北京理工大学应用数学系葛谓高教授、张学莲教授审稿。

根据全国许多高等院校"工程数学——复变函数"教学的实际情况和教育改革的需要，按照 1980 年 6 月在北京举行的高等学校工科数学教材编审委员会扩大会议审订的工程数学教学大纲（草案），我们对本书各章的重点和难点进行过反复讨论，对超出上述大纲要求的内容标以"＊"号。考虑到该课程通常安排在工科大学第二学年讲授，它是工科大学生最后一年数学课程之一，在教学中应当注意学生阅读能力的培养。针对该课程内容多、计划学时少的实际情况，本书有些定理、公式的证明和有关例题将作为学生的课外或课内的自学阅读内容处理，这些内容标以"△"号，并且在每一节末附有阅读思考题、习题和答案，以便加深学生对有关内容的理解。其中有些习题也标以"△"号，可作为学生预习的习题超前布置下去，用来检查学生的自学阅读情况。

另外，为了便于读者自学阅读，本书除对内容的重点和难点增加了一些必要的解释和例题进行说明外，对基本概念、定理和公式的叙述及其证明也力求简便和严谨。与同类教材相比有许多不同之处，具体说明如下：

1. 本书对台劳（Taylor）级数展开定理中所给级数的收敛半径、留数定理、初等函数所构成保角映射的一一对应性及其解析表达式进行了比较严格的叙述或讨论。

2. 为了使本书在理论叙述上自成体系，第一章中除增加了“在有界闭区域上（或闭曲线上）连续函数的模一定有界”定理外，还对辐角的多值性及其有关等式进行了更细致的讨论。这些内容在复积分和复级数许多定理的证明中，以及对辐角原理、保角映射概念的叙述都经常用到。

3. 考虑到许多非重点工科院校不在计划学时内介绍保角映射的理论，可是他们也需要几种简单分式线性映射的有关知识。本书将把四种简单分式线性映射及其保圆性放到第一章作为映射（复变函数的几何解释）的例题和后续内容给出，以便有关专业选用。

4. 针对许多学生经常把“函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，并且满足柯西-黎曼（Cauchy-Riemann）方程”错误地理解为函数 $f(z)=u+iv$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 解析的充要条件，本书将把该条件作为函数 $f(z)$ 在一点可导的充要条件，放到 §2-1 导数定义之后给出。由此可以直接看出“函数在一点可导一定连续”的结论仍然成立。在此基础上，对函数解析的概念和解析的充要条件进行了更深入的讨论，以便读者对有关内容，以及对复变函数中将区域定义为连通的开集有进一步的理解。

5. 考虑到复积分与对坐标曲线积分的内在联系和后续定理证明的需要，本书第三章在复习对坐标曲线积分与路径无关的几种充要条件的基础上，引出了柯西-古萨（Cauchy-Goursat）基本定理。然后给出了该定理的另一种叙述形式，并且对复闭路定理、柯西积分公式和高阶导数公式的条件进行了更简单的叙述。这些叙述便于读者理解和在计算中应用。另外，考虑到积分和式的极限不同于普通极限，对积分模的不等式的性质给出了比较严格的

简单证明。

6. 本书分别从函数的极限和数列极限的定义出发直接得到了两个类似的定理。这些定理便于学生理解和应用，使复变函数极限和复数列极限存在的充要条件的证明变得非常简单，也为许多定理的证明在文字叙述上提供了方便。

在复级数中，利用阿贝尔（Abel）引理直接得到了一个新定理，该定理描述了复数项幂级数与实数项幂级数收敛半径之间的内在联系。从它不仅可以看出复数项幂级数收敛半径的存在性，而且还可以直接看出求实数项幂级数收敛半径的检比法和检根法，对复数项幂级数仍然成立。

另外，对幂级数逐项微分、积分定理也给出了证明。并且补充了一个简单引理，使台劳级数展开定理、罗伦（Laurent）级数展开定理的证明比较简单，也便于工科学生阅读。

7. 鉴于留数与罗伦级数的内在联系，第五章首先介绍函数的孤立奇点及其留数的概念，使对孤立奇点分类深入的讨论变得比较自然；然后对留数计算也叙述得比较详细，针对某些特殊情形给出了简单的计算方法。并且给出了求极限的洛必达（L'Hospital）法则，以便在留数计算中应用。为了加强对罗伦级数的教学和实际应用的需要，推广了用留数计算定积分的三个公式的应用范围；并且针对某些特殊情况，增加了用罗伦级数系数的积分表达式来计算留数和积分的方法，其中包括积分闭曲线内含有无穷多个被积函数奇点的情形，这些方法比较简单。另外，对函数在点∞处留数的计算公式也用函数在该点邻域内的罗伦级数展开式给出了新的证明，其证明方法也非常简单。

8. 为了便于自学和实际应用的需要，第六章中分式线性映射保对称性的证明是作为例题给出的，并且对广义圆周（在扩充复平面上）的各种情形进行了详细讨论。针对一般学生都感到困难的求一一对应的保角映射问题，增加了比较多的例题；还对上半平面映射为上半平面、单位圆映射为单位圆的分式线性映射的应用，进

行了举例说明。另外，对多角形映射定理也给出了新的叙述和证明，可供有关读者和工程技术人员阅读。

本书在编写过程中得到北京理工大学应用数学系、北京邮电学院基础部数学教研室、北京轻工业学院数学教研室、北京计算机学院数学教研室等单位的许多同志的大力支持，他们对本书的编写提出过许多修改意见和建议，借此表示衷心感谢。

由于我们学识水平所限，书中一定还有许多缺点和错误，殷切期望广大读者批评指正。

编　者

1993 年 4 月于北京

目　　录

第一章　复变函数及其极限和连续性……………………………… 1

§1-1　复数及其运算…………………………………………… 1

一、复数的概念与几何表示——复平面……………………… 1

二、复数的模与辐角……………………………………………… 2

三▲、复数相等的条件及其基本运算……………………………… 4

四、复球面与扩充复平面………………………………………… 8

习题一……………………………………………………………… 9

习题答案…………………………………………………………… 11

§1-2　复平面曲线与区域………………………………………11

一▲、复平面曲线方程……………………………………………… 11

二▲、简单曲线与光滑曲线………………………………………… 13

三、平面点集与区域……………………………………………… 14

习题二……………………………………………………………… 16

习题答案…………………………………………………………… 17

§1-3　复变函数与整线性映射…………………………………18

一▲、复变函数的概念……………………………………………… 18

二、映射——复变函数的几何意义……………………………… 19

三、整线性映射及其保圆性……………………………………… 22

习题三……………………………………………………………… 23

习题答案…………………………………………………………… 24

§1-4　复变函数的极限和连续…………………………………24

一▲、复变函数的极限……………………………………………… 24

二▲、复变函数的连续性…………………………………………… 26

习题四……………………………………………………………… 28

习题答案…………………………………………………………… 28

第二章　解析函数……29
§2-1　导数与函数可导的充要条件……29
一▲、复变函数的导数和微分……29
二、函数在一点可导的充要条件……33
习题一……37
习题答案……37
§2-2　函数解析的概念和充要条件……38
一、函数解析的概念和充要条件……38
二、解析函数的运算和举例……39
三▲、指数函数 e^z 及其性质……41
习题二……42
习题答案……43
§2-3　初等解析函数……44
一、对数函数……44
二▲、幂函数……46
三、三角函数和双曲函数……47
四▲、反三角函数与反双曲函数……49
习题三……50
习题答案……51
§2-4*　平面场的复势……52
一、复变函数与平面向量场……52
二、平面流速场的复势……53
三▲、静电场的复势……57
习题四……60
习题答案……60
第三章　复积分……61
§3-1　复积分的概念与简单性质……61
一、复积分的概念……61
二、复积分的存在定理和一般计算公式……62
三、复积分的简单性质……64
习题一……66

习题答案……………………………………………………………… 67
§3-2 柯西（Cauchy）积分定理和积分与路径无关的条件…67
一、柯西-古萨（Cauchy-Goursat）基本定理……………………… 69
二*、单连域内解析函数的原函数……………………………… 70
三、复闭路定理…………………………………………………… 72
习题二……………………………………………………………… 74
习题答案…………………………………………………………… 76
§3-3 柯西积分公式和高阶导数公式………………………… 76
一、解析函数的柯西积分公式………………………………… 76
二、解析函数的高阶导数……………………………………… 78
三、解析函数与调和函数的关系……………………………… 81
习题三……………………………………………………………… 84
习题答案…………………………………………………………… 87
第四章 复级数………………………………………………… 88
§4-1 复数项级数和幂级数………………………………… 88
一、复数列及其收敛的充要条件……………………………… 88
二、复数项级数及其收敛性判别法…………………………… 89
三、幂级数及其收敛半径……………………………………… 90
四、幂级数的运算及其性质…………………………………… 94
习题一……………………………………………………………… 97
习题答案…………………………………………………………… 98
§4-2 台劳（Taylor）级数……………………………………… 99
一、台劳级数展开定理………………………………………… 99
二、初等函数的台劳级数展开式……………………………… 103
习题二……………………………………………………………… 109
习题答案…………………………………………………………… 110
§4-3 罗伦（Laurent）级数…………………………………… 111
习题三……………………………………………………………… 118
习题答案…………………………………………………………… 119
第五章 留数及其在积分计算中的应用…………………… 121
§5-1 函数的孤立奇点和留数的概念……………………… 121

一、孤立奇点和留数的概念…………………………………………………… 121
二、孤立奇点的分类…………………………………………………………… 123
三*、函数在无穷远点的性态…………………………………………………… 125
四、用函数的零点判别极点的类型………………………………………… 126
习题一…………………………………………………………………………… 128
习题答案………………………………………………………………………… 129
§5-2 留数定理和留数的计算……………………………………………… 130
一、留数定理…………………………………………………………………… 130
二、留数的计算规则和复积分计算………………………………………… 131
三▲、不定型极限的计算规则…………………………………………………… 133
四*、函数在孤立奇点无穷处留数的计算………………………………… 138
习题二…………………………………………………………………………… 139
习题答案………………………………………………………………………… 141
§5-3 留数在定积分计算中的应用………………………………………… 142
一▲、形如 $\int_0^{\alpha} f\left(\cos\frac{2\pi\theta}{\alpha}, \sin\frac{2\pi\theta}{\alpha}\right)d\theta$ 的积分………………………… 142
二、形如 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的积分…………………………………………… 145
三、形如 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\beta x}dx(\beta>0)$ 的积分 ………………………………… 148
习题三…………………………………………………………………………… 151
习题答案………………………………………………………………………… 152
§5-4**零点个数的计算…………………………………………………………… 152
一、对数留数…………………………………………………………………… 152
二、辐角原理…………………………………………………………………… 154
三、路西（Rouche'）定理 ……………………………………………………… 156
习题四…………………………………………………………………………… 158
第六章 保角映射……………………………………………………………… 159
§6-1 保角映射的概念……………………………………………………… 159
一、曲线的切线方向和两条曲线的夹角…………………………………… 159
二、解析函数导数的几何意义……………………………………………… 160
三、保角映射的概念和定理………………………………………………… 163

习题一…………………………………………………………………… 164
习题答案………………………………………………………………… 165
§6-2　分式线性映射及其性质……………………………………… 165
一、在扩充复平面上的保圆性……………………………………… 166
二、在扩充复平面保持交比的不变性……………………………… 167
三、对扩充复平面上圆周的保对称性……………………………… 171
四、对有向圆周和直线的保侧性…………………………………… 173
五、三种特殊的分式线性映射……………………………………… 178
习题二…………………………………………………………………… 183
习题答案………………………………………………………………… 184
§6-3　几个初等函数所构成的映射………………………………… 184
一、对数映射 $w=\ln z$ 和指数映射 $w=e^z$………………………… 184
二、幂映射 $w=z^n$ 及其逆映射（$n=2,3,\cdots$）……………………… 186
三、*儒可夫斯基（H. E. Жуковский）函数………………………… 194
习题三…………………………………………………………………… 197
习题答案………………………………………………………………… 198
§6-4**　保角映射几个一般性定理及其应用……………………… 199
一、保角映射的几个一般性定理…………………………………… 200
二、许瓦尔兹-克力斯托夫（Schwarz-Christoffel）映射——多角形映射………………………………………………………………… 202
三、用保角映射解 Laplace 方程边值问题…………………………… 212
习题四…………………………………………………………………… 215
习题答案………………………………………………………………… 216
附录　本书参考文献和推荐参考书……………………………… 217

第一章 复变函数及其极限和连续性

本章主要介绍复数的基本概念及其运算，复变函数的极限和连续性。

§1-1 复数及其运算

一、复数的概念与几何表示——复平面

对于任意实数 x 和 y，称 $z=x+iy\ (z=x+yi)$ 为复数。其中 i 称为虚单位，满足 $i^2=-1$；x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**。记为

$$x=\mathrm{Re}(z)\quad y=\mathrm{Im}(z) \tag{1-1-1}$$

当 $x=0$ 时，$z=iy$ 为**纯虚数**；当 $y=0$ 时，$z=x+i0$ 为实数 x，简记为 $z=x$，因此复数是实数概念的推广。

复数 $x-iy$ 称为 $z=x+iy$ 的**共轭复数**，记为 $\bar{z}$。显然 $\bar{\bar{z}}=z$，$x-iy$ 与 $x+iy$ 互为共轭复数，于是有

$$\mathrm{Re}(\bar{z})=\mathrm{Re}(z)\quad \mathrm{Im}(\bar{z})=-\mathrm{Im}(z) \tag{1-1-2}$$

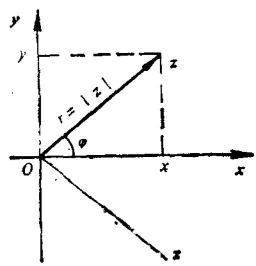

图 1-1

例如，对于复数 $z=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 有

$\mathrm{Re}(\bar{z})=\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{Im}(\bar{z})=-\mathrm{Im}(z)=\sqrt{3}/2$，$\bar{z}=1/2+i\sqrt{3}/2$

一个复数 $z=x+iy$ 由一对有序实数 (x,y) 唯一确定，能够建立 xOy 平面上点 (x,y) 与全体复数之间的一一对应关系，这时可以用 xOy 平面上的点 (x,y) 来表示复数 $z=x+iy$（图 1-1），因为 x 轴上的点对应着实数，

所以 x 轴称为**实轴**；同样 y 轴上的点对应着纯虚数，y 轴称为**虚轴**。这样表示复数的平面称为**复平面**，且称用来表示复数 $z=x+iy$ 的复平面为 **z 平面**。

由共轭复数的定义，z 和 $\bar{z}$ 关于实轴对称。

二、复数的模与辐角

同用复平面上的点表示复数一样，在复平面，从原点到点 $z=x+iy$ 的向量与复数 z 也构成一一对应关系，这种对应关系使我们能够用该向量来表示复数 z，称为复向量 z。当 $z=0$ 时它为零向量(图 1-1)。

称复向量 z 的模为复数 z 的**模**或**绝对值**，记为 $|z|$ 并且有

$$\begin{cases}|z|=|\bar{z}|=\sqrt{x^2+y^2}; \\ |x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|x|+|y|\end{cases} \tag{1-1-3}$$

对于 $z\neq0$，可用 φ 表示正实轴与复向量 z 的夹角。当把 φ 理解为从正实轴旋转到复向量 z 的转动角(逆时针为正，顺时针为负)时，称它为复数 z 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}(z)$。有

$$\begin{cases}x=|z|\cos\varphi,\ y=|z|\sin\varphi \\ \mathrm{tg}\,\varphi=y/x\end{cases} \tag{1-1-4}$$

由于这个转动角不仅可以取正向和负向，而且可以增加 2π 的整数倍，因此 $\mathrm{Arg}(z)$ 是多值的，任意两个值之间相差 2π 的整数倍。可是满足条件 $-\pi<\mathrm{Arg}(z)\leqslant\pi$ 的辐角值是唯一的，称该值为复数 z **辐角的主值**，记为 $\arg(z)$。于是

$$\begin{cases}-\pi<\arg(z)\leqslant\pi \\ \mathrm{Arg}(z)=\arg(z)+2k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\end{cases} \tag{1-1-5}$$

当 $z=x+iy\neq0$ 时有

$$\arg(z)=\begin{cases}\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2}),\ y\geqslant0; \\ -\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2}),\ y<0\end{cases} \tag{1-1-6}$$

当 $z\neq0$ 且不在负实轴上时有

$$\arg(\bar{z}) = \arg(1/z) = -\arg(z) \tag{1-1-7}$$

当 $z = 0$ 时，其模为零，辐角无定义。

设非零复数 z 的辐角为 φ 有

$$x = |z|\cos\varphi,\quad y = |z|\sin\varphi$$

于是复数 z 可表示为

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1-1-8}$$

利用欧拉（Euler）公式：$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$，复数 z 可表示为

$$z = |z|e^{i\varphi} \tag{1-1-9}$$

分别称式（1-1-8），（1-1-9）为复数 z 的**三角式**和**指数式**。复数 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ 的模为 1，称为**单位复数**。

[例 1] 求复数 $z_1 = (1-i\sqrt{3})/2$，$z_2 = -1$ 的模和辐角

[解] 显然 $|z_1| = 1$，$|z_2| = 1$

由 $\mathrm{Im}(z_1) = -\sqrt{3}/2 < 0$ 有 $\arg(z_1) = -\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$。

$$\mathrm{Arg}(z_1) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

又因 $\mathrm{Im}(z_2) = 0$，所以 $\arg(z_2) = \arccos(-1) = \pi$

$$\mathrm{Arg}(z_2) = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

[例 2] 把复数 $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -\sin\frac{\pi}{3} - i\cos\frac{\pi}{3}$ 化为三角式和指数式。

[解] 由 $|z_1| = 2$，$\arg(z_1) = \arccos(1/2) = \pi/3$ 得

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad z_1 = ze^{i\pi/3}$$

对于 $z_2 = -\sqrt{3}/2 - i/2$，显然 $|z_2| = 1$，$\arg(z_2) = -\arccos(-\sqrt{3}/2) = -5\pi/6$，于是

$$z_2 = \cos(-5\pi/6) + i\sin(-5\pi/6),\quad z_2 = e^{-i5\pi/6}$$

三$^{\Delta}$、复数相等的条件及其基本运算

1. 两个复数相等　当复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的实部和虚部对应相等时，称这**两个复数相等**。可表示为

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$$

显然有

$$z = 0 \Longleftrightarrow |z| = 0$$

$$z_1 = z_2 \neq 0 \Longleftrightarrow |z_1| = |z_2| \text{ 且 } \mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2)$$

其中 $\mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2)$ **是指等号两端的无穷多个值一一对应地相等**，符号"$\Longleftrightarrow$"是"等价于"之意，今后还会遇到这样的等式和符号其意义相同不再重述。

注意：两个不都为实数的复数不能比较大小。

2. 复数的加减运算及其几何表示　设复数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，有

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

另外，复数也可以用复向量来表示，复向量 z_1 和 z_2 的加、减法可按照平行四边形或三角形法则进行。其和 $z_1 + z_2$ 就是在以复向量 z_1 和 z_2 为邻边的平行四边形中从坐标原点出发的对角线向量；其差 $z_1 - z_2$ 就是从点 z_1 到 z_2 的对角线向量(图 1—2)。

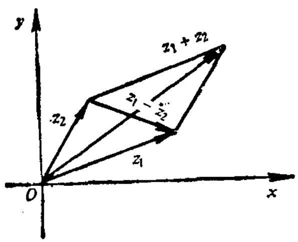

图 1-2

以上可以看出，**点 $z_1 + z_2$ 可以将点 z_1 沿向量 z_2 的方向平移 $|z_2|$ 的距离来得到；点 z_1 与点 z_2 的距离为** $|z_1 - z_2|$。并且有

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$$

对于复数的共轭运算，可以验证

$$\begin{cases} \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \\ z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2x,\quad z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z) = 2yi \end{cases} \tag{1-1-10}$$

3. 复数乘法与除法　设 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ 有

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$$

两个复数相乘按多项式乘法法则进行，只须把结果中的 i^2 换成 -1 即可。显然有

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 = |z|^2 \quad (1\text{-}1\text{-}10')$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{1}{|z_2|^2}[(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)] \ (z_2 \neq 0)$$

两个复数相除是先将分子、分母同乘以分母的共轭复数，然后化简。

对复数取共轭，可验证下面等式成立。

$$\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2, \quad \overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$$

[例 3]　设 z_1，z_2 为二复数 $(z_2 \neq 0)$，证明

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$$

[证]　由于 $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)\overline{(z_1z_2)} = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$ 因此 $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$。

又因为 $z_1/z_2 = z_1\bar{z}_2/z_2\bar{z}_2 = z_1\bar{z}_2/|z_2|^2$，所以

$$|z_1/z_2| = |z_1\bar{z}_2|/|z_2|^2 = |z_1\bar{z}_2|/|z_2|^2 = |z_1||\bar{z}_2|/|z_2||\bar{z}_2|$$
$$= |z_1|/|z_2|$$

[例 4]　求 $(1 - 2i)/(3 - 4i) - (2 - i)/5i$ 及其模和辐角

[解]　因为 $(1 - 2i)/(3 - 4i) = 11/25 - 2i/25$，$(2 - i)/5i = -5/25 - 10i/25$，所以 $(1 - 2i)/(3 - 4i) - (2 - i)/5i = 16/25 + 8i/25$ 其模为 $|(1 - 2i)/(3 - 4i) - (2 - i)/5i| = 8\sqrt{5}/25$。

于是其辐角主值为 $\arg(z) = \arccos(2/\sqrt{5})$

$$\mathrm{Arg}(z) = \arccos(2/\sqrt{5}) + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

利用复数的三角式或指数式进行乘除运算比较简单。即设有非零复数

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

其中 $r_k = |z_k|$，$\varphi_k = \mathrm{Arg}(z_k)$ $(k = 1, 2)$