高等数学学习与辅导

GAODENGSHUXUEXUEXIYUFUDAO

邢志栋 曹建荣 编

西 北 大 学 出 版 社

高等数学学习与辅导

邢志栋 曹建荣 编

西北大学出版社
中国·西安

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习与辅导/邢志栋，曹建荣编．—西安：西北大学出版社，2000.7

ISBN 7-5604-1474-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.①邢…②曹…　Ⅲ.高等数学-高等教育-教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 09218 号

高等数学学习与辅导

邢志栋　曹建荣　编

西北大学出版社出版发行

（西北大学校内　邮编 710069　电话 8302590）

新华书店经销　西北农林科技大学印刷厂印刷

850 毫米×1168 毫米　1/32 开本　7.25 印张　190 千字

2000 年 7 月第 1 版　2000 年 7 月第 1 次印刷

印数：1—6000

ISBN 7-5604-1474-5/O·94　定价：11.60 元

内 容 简 介

本书是高等数学教学参考用书. 全书共十一章, 内容包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、常微分方程和无穷级数. 每章由"要求与概要"、"问题与解答"、"求解与证明"、"习题与测评"四部分组成, 每章后附有参考答案. 本书侧重介绍高等数学学习中常出现的一些问题, 并对问题的求解做了详细阐述, 既有理论分析, 又有解题实例, 具有较好的启发性与可读性. 本书既可作为高等数学课程的辅导教材, 也可作为高等数学的自学辅导教材及青年教师的教学参考书.

目　　录

第一章　函　　数

§1　要求与概要

一、基本要求

1)深刻理解一元函数的定义,掌握函数的表示法和函数的简单性态.

2)理解函数增量的概念.

3)深刻理解复合函数概念和反函数概念.

4)熟练掌握基本初等函数和初等函数的概念.

二、内容概要

函数是高等数学研究的主要对象. 函数反映客观世界事物变化过程中变量间相互依存关系,函数定义中有两个要素,定义域与定义规则. 缺一不可. 如果要素相同,则认为是相同的函数,如果至少有一个是不同的,则认为是不同的函数.

函数的记号 $y=f(x)$中,f 表示对应的规则,它可以是数学表达式、图形或表格. 自变量的取值范围——定义域可以是区域或孤立点集. 一个函数 f 的对应规则,如果分段用不同的数学表达式表示,称为分段函数. 因变量的变化范围称为函数的值域,当函数的定义域与对应规则给定时,函数的值域也随之确定.

复合函数可适当引入中间变量,分解为若干个简单函数,反

之,若干个简单函数,当内层的函数的值域与外层函数的定义域的交集非空时,则可构成复合函数.

初等函数是由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除与有限次函数复合所构成的函数,它是重要且常见的一类函数.了解函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性等性质,对于研究函数的性态,简化计算是非常必要的.

本章概要如下:

$$\text{函数 } y=f(x)\begin{cases}\text{定义域——自变量 } x \text{ 的取值范围}\\ \text{对应规则 } f\text{——数学表达式、图形、表格}\\ \text{值域——因变量 } y \text{ 的变化范围}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\text{反函数 } x=f^{-1}(y)\begin{cases}\text{定义域——自变量 } y \text{ 的取值范围}\\ \text{对应规则 } f^{-1}\text{——数学表达式、图形、表格}\\ \text{值域——因变量 } x \text{ 的变化范围}\end{cases}$$

$$\Rightarrow(x\text{ 与 }y\text{ 互换})\,y=f^{-1}(x)$$

函数的复合 $u=f(x), y=g(u)\Rightarrow y=g(u)=g(f(x))$(内层函数的值域与外层函数的定义域的交集非空)

基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除或有限次的函数复合构成初等函数.

分段定义的函数——对应规则 f 分段不同的数学表达式.

函数的简单性质——单值性、单调性、有界性、奇偶性、周期性.

§2 问题与解答

1 问 确定函数定义域,一般有什么方法?

答 第一,用数学式表示的函数,其定义域的确定,要求自变量的取值使数学表达式有意义. 例如

1)偶次根式表达的函数,其根号下的值非负;

2)分式函数,其分母的值不等于零;

3)对数函数的真数值必须大于零;

4)有限多个函数的加、减、乘运算得到的函数,其定义域是这些函数定义域的交集;

5)复合函数 $f[\varphi(x)]$的定义域 E,是其内层函数 $\varphi(x)$定义域 E_1 的子集,即 $E\subset E_1$;

6)如果函数 $x=\varphi(y)$是 $y=f(x)$的反函数,那么 $x=\varphi(y)$的定义域就是 $y=f(x)$的值域;

7)奇函数与偶函数的定义域关于原点对称.

第二,对具有几何、经济、物理等实际意义的函数,其定义域由问题的实际意义确定.

2 问 什么叫两个函数相等?

答 设两个函数 $f(x)$、$g(x)$,如果它们的定义域相同且对定义域内的任意 x,都有 $f(x)=g(x)$,则这两个函数相等. 例如

$$f(x)=\log_2\sqrt{x^2},\quad g(x)=\log_2|x|$$

定义域都是$E=\{x|x\neq0\}$,且对每一个$x\in E$,都有$\log_2\sqrt{x^2}=\log_2|x|$,故这两个函数相等. 而

$$f(x)=\log_2 x^2,\quad g(x)=2\log_2 x$$

是不相等的,因为它们的定义域不同,函数$f(x)$的定义域是$E=\{x|x\neq0\}$,$g(x)$的定义域是 $E_1=\{x|x>0\}$.

3 问 为什么说 $f(x)=C$(常数)表示一个函数?如果是表示一个函数,是否具有周期性与奇偶性?

答 由于对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有确定的值 C(常数)与之对应,由函数的定义,$f(x)=C$表示一个函数,其定义域是$E=\{x|x\in(-\infty,+\infty)\}$,且 $f(x)=C$ 是周期函数,以任意正数 a 为周期. 这是由于对任一实数 $a>0$,$f(x+a)=C$,因此

$f(x+a)=f(x)$即 $T=a$ 是函数$f(x)=C$ 的周期,但由于正实数 a 中没有最小的一个,所以它没有最小的正周期.

由于 $f(x)=C$ 的定义域是关于原点对称的区间$(-\infty,+\infty)$,对于该区间上的任一 x 的值,都有 $f(x)=f(-x)=C$ 故$f(x)=C$ 是偶函数,特别是 $C=0$ 时,等式

$$f(x)=f(-x) \text{ 与 } f(-x)=-f(x)$$

同时成立,故 $f(x)=0$,既是偶函数又是奇函数.

4 问 为什么说,任何一个定义在关于原点对称的区间上的函数,都可表示为一个奇函数与一个偶函数之和? 表示是否唯一?

答 设任一函数 $f(x),x\in(-t,t)$,则由恒等式

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right] \\ &= G(x)+H(x) \end{aligned}$$

其中 $G(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$,$H(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$

由于
$$\begin{aligned} G(-x) &= \frac{f(-x)-f(x)}{2} \\ &= -\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-G(x) \end{aligned}$$

及
$$\begin{aligned} H(-x) &= \frac{f(-x)+f(x)}{2} \\ &= \frac{f(x)+f(-x)}{2}=H(x) \end{aligned}$$

故 $G(x)$是奇函数,$H(x)$是偶函数.

又上述表示法是唯一的,事实上假定还存在奇函数 $G_1(x)$与偶函数 $H_1(x)$,使得

$$f(x)=G_1(x)+H_1(x)$$

则有
$$G(x)+H(x)=G_1(x)+H_1(x)$$

即
$$G_1(x)-G(x)=H(x)-H_1(x) \tag{1}$$

以 $-x$ 代 x，得

$$G_1(-x)-G(-x)=H(-x)-H_1(-x)$$

由于 $G(x)$，$G_1(x)$是奇函数，$H(x)$，$H_1(x)$是偶函数，故有

$$G(x)-G_1(x)=H(x)-H_1(x) \qquad (2)$$

(1)(2)式相加，得

$$2H(x)-2H_1(x)=0$$

$H(x)=H_1(x)$，将其代入(1)式，得 $G_1(x)=G(x)$，因此这种表示法是唯一的.

5 问 是否任何两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$都能构成复合函数?

答 否．例如 $y=\sqrt{1-u}$，$u=x^2+3$ 是不能构成复合函数的. 因为对任何 x，对应的 u 都不属于$y=\sqrt{1-u}$的定义域. 亦即 $f(\varphi(x))=\sqrt{1-(x^2+3)}=\sqrt{-x^2-2}$，由于 $-x^2-2<0$，因此 $f(\varphi(x))$无意义.

6 问 一个函数具备什么条件，才能保证存在单值反函数?

答 若函数 $y=f(x)$在它的定义域 E 上严格单调增(减)，则它存在单值反函数 $x=\varphi(y)$，且 $x=\varphi(y)$在 $B=\{y \mid y=f(x), x\in E\}$上严格单调增(减).

§3 求解与证明

例 1 求函数 $f(x)=\lg(x^2-x+2)+\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$的定义域.

解 要使函数 $f(x)$有意义，x 必须满足不等式组

$$\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ x+2>0 \end{cases}$$

由不等式 $x^2-x-2>0$ 解得，$x<-1$ 或 $x>2$，问题转化为

$$\begin{cases} x < -1 \text{ 或 } x > 2 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

因此求得 $f(x)$的定义域为$-2<x<-1$ 或 $x>2$.

例 2 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$,求函数$f(x+\frac{1}{2})+f(x-\frac{1}{2})$的定义域.

解 $f(x+\frac{1}{2})$是由 $f(u)$和 $u=x+\frac{1}{2}$复合而成. 而 $f(u)$的定义域是$[0,1]$,即$0\leqslant u\leqslant 1$,将 $u=x+\frac{1}{2}$代入得

$$0 \leqslant x + \frac{1}{2} \leqslant 1 \text{ 即 } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$$

于是 $f(x+\frac{1}{2})$的定义域是$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$.

同理可知 $f(x-\frac{1}{2})$的定义域为 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$.

因此解不等式组

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

最后求得 $f(x+\frac{1}{2})+f(x-\frac{1}{2})$的定义域为 $x=\frac{1}{2}$.

例 3 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ $(x\neq 0,1)$,试证

$$f\{f[f(x)]\} = f(x)$$

证明 在 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$中,以 $f(x)$代替 x,可得

$$f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = x$$

然后在 $f(x)$ 中以 $f(f(x))$ 代替 x，可得

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{f[f(x)]}{f[f(x)]-1} = \frac{x}{x-1} = f(x)$$

例 4 设 $f(x)=\begin{cases} x & \text{当} |x| \geqslant 1 \\ x^2 & \text{当} |x|<1 \end{cases}$，$g(x)=\lg x$，求 $f(g(x))$.

解 $$f[g(x)] = \begin{cases} \lg x & \text{当} |\lg x| \geqslant 1 \\ (\lg x)^2 & \text{当} |\lg x| < 1 \end{cases}$$

从不等式 $|\lg x| \geqslant 1$ 和 $|\lg x|<1$，求出 x 的取值范围，最后得到

$$f[g(x)] = \begin{cases} \lg x & \text{当} 0 < x \leqslant \frac{1}{10} \text{或} x \geqslant 10 \\ (\lg x)^2 & \text{当} \frac{1}{10} < x < 10. \end{cases}$$

例 5 把一个半径为 R 的圆形铁片从中心处剪去中心角为 α 的扇形，形成一个圆锥形容器，试将此容器的容积 V 表示为 α 的函数.

解 设容器的高为 h，底面半径为 r，则

$$2\pi r = (2\pi - \alpha)R$$

$$\because \quad r = \frac{(2\pi-\alpha)R}{2\pi}$$

$$\therefore \quad h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{(2\pi-\alpha)^2 R^2}{4\pi^2}}$$

$$= R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right)^2}$$

$\therefore$ 园锥形容器的容积为

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right)^2 R^2 \cdot R\sqrt{1 - \frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}}$$

整理后知所求的函数关系为

$$V = \frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2} \qquad (0 < \alpha < 2\pi)$$

§4 习题与测评

一、单项选择题（在每小题的四个备选答案中，选出一个正确答案，并将其号码写在题干的____内）

1. $y=\ln\arcsin x$ 的定义域____

①$[0,1]$　②$(0,1)$　③$(0,1]$　④$[0,1)$

2. 函数 $f(x)$的定义域为闭区间$[0,1]$，且 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，那么函数 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域是____

①$[-a,1-a]$　②$[-a,1+a]$

③$[a,1-a]$　④$[a,1+a]$

3. 指出下列哪一个是基本初等函数____

①$y=x^2$　②$y=x^x$

③$y=[x]$(取整数)　④$y=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ x+1 & x\geqslant 0 \end{cases}$

4. 指出下列哪一个是初等函数____

①$y=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ x+1 & x\geqslant 0 \end{cases}$　②$y=[x]$(取整数)

③$y=x^x$　④$y=\operatorname{sign}(x)$(符号函数)

5. 设 $f(x)=|x|$，$g(x)=x^2-x$，则 $f[g(x)]=g[f(x)]$成立的范围是____

①$(-\infty,1)\cup\{0\}$　②$(-\infty,0]$

③$[0,+\infty)$　④$[1,+\infty)\cup\{0\}$

6. 下列函数中 $f(x)$与 $g(x)$是相同的有____

①$f(x)=x-3$　$g(x)=\sqrt{(x-3)^2}$

②$f(x)=\lg(x^2-9)$　$g(x)=\lg(x-3)+\lg(x+3)$

③$f(x)=\lg\frac{3-x}{3+x}$　$g(x)=\lg(3-x)-\lg(3+x)$

④$f(x)=\cos(\arc\cos x)$　　$g(x)=x$

7. 下列各组函数中，$f(x)$与 $g(x)$是相同的有____

①$f(x)=\dfrac{x(x-1)}{x}$　　$g(x)=x-1$

②$f(x)=\lg x^2$　　$g(x)=2\lg x$

③$f(x)=x$　　$g(x)=(\sqrt{x})^2$

④$f(x)=x(\cos^2 x+\sin^2 x)$　　$g(x)=x$

8. $f(x)=x^2\cos x$ 是____

①偶函数　②奇函数　③非奇非偶函数　④有界函数

9. $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是偶函数，则 $f(-x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$上是____

①奇函数　②偶函数　③非奇非偶函数　④无意义

10. $f(x)$是奇函数，$F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$($a$ 是不为 1 的常数)，则 $F(x)$是____

①奇函数　②偶函数

③非奇非偶函数　④奇偶性与 a 有关

11. $f(x)=x+\sin x$ 在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上是____

①先单调减少，后单调增加　②先单调增加，后单调减少

③单调减少　④单调增加

12. $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=1-x$，则 $f(g(x))=$____

①$1-\dfrac{1}{x}$　②$1+\dfrac{1}{x}$

③x　④$\dfrac{1}{1-x}$

13. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}x-1 & x\geqslant 1\\ 1-x & x<1\end{cases}$，则 $g(f(x))=$____

①$1+f(x)$　②$1-f(x)$　③$f(x)-1$　④$f(x)$

14. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线____

①$y=0$　②$x=0$　③$y=x$　④$y=-x$

15. 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=\varphi(y)$ 在同一坐标系中的图像是____

①完全不同的　②部分相同,部分不同

③完全相同的　④可能相同,也可能不同

16. 函数 $y=2\sin 3x$ 的反函数是____

①$y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$　②$y=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{3}$

③$y=3\arcsin 2x$　④$y=2\arcsin 3x$

17. 函数 $y=\cos(4x+\frac{\pi}{4})$ 的最小周期是____

①$2\pi$　②$8\pi$　③$\frac{\pi}{2}$　④$\frac{\pi}{4}$

18. 函数 $y=\mathrm{tg}^2 x$ 的最小周期是____

①$2\pi$　②π　③$\frac{\pi}{2}$　④$4\pi$

19. 函数 $y=\sin^2 x+\cos x$ 的最小周期是____

①$2\pi$　②$4\pi$　③$\frac{\pi}{2}$　④π

20. 函数 $y=f(x-a)(a>0)$ 的图形可由函数 $y=f(x)$ 的图形____

①向上移动 a 个单位得到　②向下移动 a 个单位得到

③向左移动 a 个单位得到　④向右移动 a 个单位得到

二、多项选择题(在每小题的五个备选答案中,选出正确答案,并将其号码写在题干的__________内)

1. 下列函数中为基本初等函数的有__________