

58.52

03508

重力与固体潮教程

北京大学地球物理系
武汉测绘学院大地测量系 编
中国科学技术大学地球物理教研室

高等学校
教学用书

地质出版社

重力与固体潮教程

编 者 王 坤 曹 德 德 周 昌
参 编 曹 德 德 曹 德 德 周 昌
主 审 曹 德 德 曹 德 德 周 昌

■ ■ ■ ■ ■

高等学校教学用书

重力与固体潮教程

北京大学地球物理系
武汉测绘学院大地测量系 编
中国科学技术大学地球物理教研室

地震出版社

1982

内 容 简 介

本书分三篇共计十五章,并附有四个附录。第一篇包括第一章至第七章,阐述有关地球重力场以及地球形状的基本知识;第二篇包括第八章至第十章,讨论有关重力测量的技术和方法;第三篇包括第十一章至第十五章,阐述有关固体潮的基本理论及其观测和分析方法。本书除作为大学地球物理专业有关地球重力场和固体潮的专业教材之外,亦可供地球物理和大地测量等专业人员参考。

重力与固体潮教程

北京 大学 地 球 物 理 系
武 汉 测 绘 学 院 大 地 测 量 系 编
中 国 科 学 技 术 大 学 地 球 物 理 教 研 室

地 震 出 版 社 出 版

北京复兴路83号

建外印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

850×1168 1/32 13 印张 348 千字

1982年7月第一版 1982年7月第一次印刷

印数000—3000

统一书号: 13180·156 定价: 1.60 元

前 言

重力与固体潮教程是在北京大学地球物理系编的“重力与固体潮讲义”、武汉测绘学院大地测量系编的“重力测量讲义”和中国科学技术大学地球及空间科学系编的“地球的重力场与固体潮讲义”的基础上编写成的。全书共分三篇，相应包括地球的重力场、重力测量和固体潮等有关重力学的三部分基本内容。本课程是供大学地球物理专业学生在学完高等数学、理论力学、弹性力学和数学物理方程后用的专业教材，亦可作为其它高等院校相近专业的教学参考书。

本书的初稿于1980年6月完成，初稿完成后国家地震局组织了有关单位对初稿进行了审查，作者根据审查会议上的意见，对初稿进行了修改，于1981年3月定稿。

参加本书编写工作的有北京大学地球物理系吴庆鹏、曹其平，武汉测绘学院大地测量系宁津生、管泽霖和中国科学技术大学地球及空间科学系许天铭等五位同志。第一章至第五章、第七章和附录一由许天铭执笔，第六章、第八章至第十章和附录三、附录四由宁津生、管泽霖执笔，第十一章至第十四章和附录二由吴庆鹏执笔，第十五章由曹其平执笔，全书由吴庆鹏审校定稿。

目 录

第一篇 地球重力场

第一章 地球重力场	(1)
1.1 重力的定义.....	(1)
1.2 地球引力场.....	(1)
1.3 地球离心力场.....	(5)
1.4 地球重力场.....	(6)
1.5 地球内部重力场.....	(13)
1.6 地球空间重力场.....	(16)
第二章 地球正常重力场和异常重力场	(20)
2.1 地球重力位的级数展开.....	(20)
2.2 斯托克司定理和索米扬那公式.....	(30)
2.3 正常重力公式.....	(34)
2.4 正常重力场的梯度.....	(37)
2.5 地球异常重力场.....	(40)
第三章 重力校正与重力异常	(45)
3.1 高度校正与空间异常.....	(45)
3.2 布格校正与布格异常.....	(46)
3.3 均衡校正与均衡异常.....	(56)
3.4 各种重力校正的地球物理意义和用途.....	(65)
第四章 局部重力异常与区域重力异常的划分	(68)
4.1 异常的划分.....	(68)
4.2 数字频率滤波.....	(72)
第五章 异常重力场的正反演问题	(83)

5.1	引言	(83)
5.2	规则形状异常密度体的正反演问题	(84)
5.3	密度界面的正反演问题	(95)
5.4	任意形状异常密度体的正演问题	(100)
5.5	任意形状异常源的剩余质量及其质心坐标的反演问题	(107)
5.6	反演问题的选择解法	(108)
第六章	卫星重力学	(110)
6.1	概述	(110)
6.2	开普勒定律及轨道根数	(112)
6.3	测定卫星轨道根数的概念	(114)
6.4	几个基本公式	(116)
6.5	拉格朗日摄动方程	(120)
6.6	利用卫星轨道摄动确定引力位系数	(127)
第七章	大地水准面形状	(134)
7.1	大地水准面上扰动位的解	(134)
7.2	垂线偏差	(139)
7.3	大地水准面高度	(145)
7.4	大地水准面形状	(146)

第二篇 重力测量

第八章	绝对重力测量	(148)
8.1	用摆测定绝对重力的原理	(148)
8.2	用自由落体测定绝对重力的方法	(152)
8.3	世界重力基点和国际重力基准网	(158)
第九章	相对重力测量	(161)
9.1	一般原理	(161)
9.2	弹性重力仪的几个技术性问题	(164)
9.3	外界因素对重力仪的影响	(167)
9.4	石英弹簧重力仪	(173)
9.5	金属弹簧重力仪	(181)
9.6	重力仪的调整和检验	(188)

9.7	重力仪的观测步骤和计算方法	(191)
9.8	超导重力仪	(193)
第十章 海洋和航空重力测量		(196)
10.1	海洋重力测量中的扰动影响	(196)
10.2	海洋重力仪	(205)
10.3	航空重力测量	(209)

第三篇 固 体 潮

第十一章 起潮力位及其调和展开		(217)
11.1	地球的固体潮	(217)
11.2	起潮力	(219)
11.3	起潮力位	(223)
11.4	起潮力位的拉普拉斯展开	(226)
11.5	起潮力位的杜森展开——潮汐波	(231)

附录

表 1、表 2、表 3、表 4、表 5、表 6、表 7	(248)
-----------------------------	-------

第十二章 刚体地球模型的重力固体潮和地倾斜固体潮		(257)
12.1	重力固体潮理论值	(257)
12.2	重力固体潮理论潮汐波	(260)
12.3	地倾斜固体潮理论值	(270)
12.4	地倾斜固体潮的理论潮汐波	(274)

第十三章 勒甫数与地球的固体潮		(285)
13.1	平衡潮	(285)
13.2	勒甫数	(287)
13.3	相对地球表面的海潮	(290)
13.4	地倾斜固体潮	(290)
13.5	经纬度固体潮	(293)
13.6	重力固体潮	(294)
13.7	均匀不可压缩弹性地球模型的开尔文 潮汐理论	(296)
13.8	竹内均地球模型和莫洛琴斯基地球模型的勒甫数及其	

潮汐因子.....	(314)
第十四章 固体潮观测资料的调和分析	(318)
14.1 绪言.....	(318)
14.2 坐标组理论.....	(320)
14.3 零点漂移的计算方法.....	(326)
14.4 勒卡拉兹调和分析方法.....	(330)
14.5 维涅第科夫调和分析方法.....	(349)
第十五章 固体潮观测	(361)
15.1 观测重力固体潮的仪器设备.....	(361)
15.2 仪器的使用和标定.....	(363)
15.3 重力固体潮观测台址的选择和工作.....	(368)
15.4 观测地倾斜固体潮的水平摆倾斜仪.....	(369)
15.5 水平摆倾斜仪常数的测定.....	(373)
附录 I 索米扬那正常重力公式	(378)
附录 II 天球坐标系	(389)
附录 III 多架仪器多条测线联测重力差的计算	(394)
附录 IV 双次三程测线法重力差的计算	(399)
主要参考文献	(406)

第一篇 地球重力场

第一章 地球重力场

1.1 重力的定义

图 1.1 中的 P 点是地球上的任一点，地球在 P 点处的引力场强度 $f(P)$ 和离心力场强度 $p(P)$ 的矢量合成称为地球在该点的重力场强度 $g(P)$ ，即

$$g(P) = f(P) + p(P). \quad (1.1)$$

重力场强度的量纲为米·秒⁻²，MKS 单位为牛顿·千克⁻¹ = 米·秒⁻²，CGS 单位为达因·克⁻¹ = 厘米·秒⁻²。

重力场强度也就是重力加速度，国际上采用伽 (gal.) 作单位

$$\begin{aligned} 1 \text{ 伽} &= 10^{-2} \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-2} = 1 \text{ 厘米} \cdot \text{秒}^{-2} \\ &= 10^3 \text{ 毫伽} = 10^6 \text{ 微伽}. \end{aligned}$$

在重力学中，把重力场强度、引力场强度和离心力场强度简称为重力、引力和离心力。

1.2 地球引力场

1.2.1 质点引力场

图 1.2 中 $P'(\xi, \eta, \zeta)$ 点是地球内部任一质点，质量为 m 。 $P(x, y, z)$ 点是地球外部的某一点。质点源 P' 在 P 点的引力

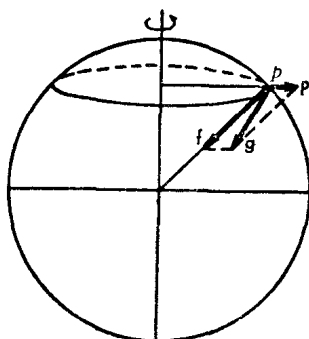


图 1.1 地球重力场强度 g

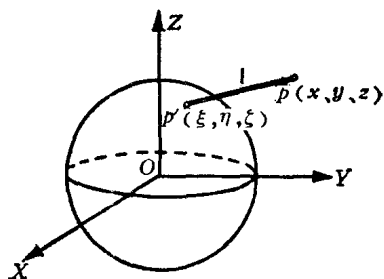


图1.2 质点引力场

为

$$\mathbf{f}(P) = -G \frac{m}{l^3} \mathbf{l}. \quad (1.2)$$

式中 G 为万有引力常数, 等于 6.6732×10^{-11} 牛·顿·米²·千 克⁻²; \mathbf{l} 为 P' 至 P 的距离矢量, 在直角坐标系中为

$$\mathbf{l} = (x - \xi)\mathbf{i} + (y - \eta)\mathbf{j} + (z - \zeta)\mathbf{k}. \quad (1.3)$$

代入(1.2)式, 得

$$\mathbf{f}(P) = -G \frac{m}{l^3} [(x - \xi)\mathbf{i} + (y - \eta)\mathbf{j} + (z - \zeta)\mathbf{k}]. \quad (1.4)$$

它在三个坐标轴上的分量为

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{i} = -f \cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{i}) = -G \frac{m}{l^3} (x - \xi), \\ f_y &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{j} = -f \cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{j}) = -G \frac{m}{l^3} (y - \eta), \\ f_z &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{k} = -f \cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{k}) = -G \frac{m}{l^3} (z - \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

可以证明, $\text{rot} \mathbf{f}(P) = 0$, 因此必然存在一个位函数 $u(P)$, 使得

$$\mathbf{f}(P) = \text{grad} u(P) \quad (1.6)$$

满足(1.2)式微分方程(1.6)的解为

$$u(P) = G \frac{m}{l} + c.$$

式中 c 为常数, 若定义无穷远处 $u(P) = 0$, 则 $c = 0$, 于是得

$$u(P) = G \frac{m}{l}. \quad (1.7)$$

我们称 $u(P)$ 为质量 m 在 P 点的引力位。

引进了引力位的概念之后, 可以把引力场这类矢量场的运算变换为标量场的运算, 使问题大为简化。

1.2.2 地球引力场

对于地球引力位来说, 应将 (1.7) 式对全球积分。假定地球的密度为 $\rho(\xi, \eta, \zeta)$, 体积为 Γ , 整个地球的质量为 M , 则地球在 P 点的引力位为

$$\begin{aligned} V(P) &= G \int_M \frac{dm}{l} = G \iiint_{\Gamma} \frac{\rho}{l} d\xi d\eta d\zeta \\ &= G \int_{\Gamma} \frac{\rho}{l} d\tau. \end{aligned} \quad (1.8)$$

地球在 P 点的引力便为地球引力位 V 在该点的梯度, 或将 (1.4) 式对全球求积分, 即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}(P) &= \text{grad}V(P) = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= -G \int_M \frac{[(x-\xi)\mathbf{i} + (y-\eta)\mathbf{j} + (z-\zeta)\mathbf{k}]}{l^3} dm \\ &= \mathbf{f}_x + \mathbf{f}_y + \mathbf{f}_z. \end{aligned} \right\} (1.9)$$

地球外部引力的散度为

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{f}(P) &= \nabla \cdot \mathbf{f}(P) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \Delta V. \\ &= 3G \int_M \frac{(x-\xi)^2}{l^5} dm - G \int_M \frac{dm}{l^3} \\ &\quad + 3G \int_M \frac{(y-\eta)^2}{l^5} dm - G \int_M \frac{dm}{l^3} \\ &\quad + 3G \int_M \frac{(z-\zeta)^2}{l^5} dm - G \int_M \frac{dm}{l^3} = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\text{即 } \Delta V_* = \Delta^2 V_* = 0. \quad (1.11)$$

可见地球外部引力位 V_* 满足拉普拉斯方程式, 因此 V_* 是调和函数。

现在让我们来考察地球内部引力的散度。

我们知道, 求矢量场在 P' 点的散度的关键在于求矢量包围 P' 点的无限小闭曲面的流量。为此, 应在 P' 点作一个包围 P' 点的无穷小的封闭曲面 σ_2 , 如图 1.3 所

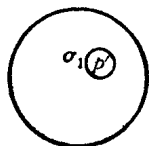


图 1.3 地球内部引力的散度

示, 它把整个地球分成两部分。一部分由 σ_2 所围成的体积为 $\Delta\tau$, 质量为 Δm , 它在 P' 点的引力为 f_2 。另一部分由 σ_2 和外球面所围成的体积为 τ_1 , 质量为 M_1 , 它在 P' 点的引力为 f_1 。于是地球在内部 P' 点的引力为

$$f(P') = f_1(P') + f_2(P'). \quad (1.12)$$

我们知道, $f(P')$ 对于 σ_2 的流量为

$$\oiint_{\sigma_2} f \cdot n d\sigma = \oiint_{\sigma_1} f_1 \cdot n d\sigma + \oiint_{\sigma_2} f_2 \cdot n d\sigma, \quad (1.13)$$

式中 n 为 σ_2 的外法线。考虑到

$$\oiint_{\sigma_1} f_1 \cdot n d\sigma = 0, \quad (1.14)$$

而

$$\oiint_{\sigma_2} f_2 \cdot n d\sigma = -4\pi G \Delta m, \quad (1.15)$$

又 $f(P')$ 在 P' 点的散度为

$$\text{div}f(P') = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\sigma_2} f \cdot n d\sigma}{\Delta\tau} = \Delta V_i,$$

将 (1.13) - (1.15) 式代入上式, 得

$$\begin{aligned} \iint f_3 \cdot n d\sigma \\ \operatorname{div}f(p') = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma_2}{\Delta\tau} = -4\pi G \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau} \\ = -4\pi G \rho(p'), \end{aligned} \quad (1.16)$$

式中 $\rho(p')$ 为地球在 p' 点的密度。由以上两式可知, 地球内部引力场的散度是该点密度的函数:

$$\Delta V_i = -4\pi G \rho(p'). \quad (1.17)$$

上式称为泊松方程式。

综上所述, 地球引力位在地球外部满足拉普拉斯方程式, 而在地球内部满足泊松方程式。

1.3 地球离心力场

地球是一个自旋的天体。旋转角速度矢量随时间有微小的变化, 我们经常把它视为常矢量 ω 。如图 1.4 所示, 地心直角坐标系的 oz 轴与地球自转轴相重合, $P(x, y, z)$ 为地球上的某一点, 距地球自转轴的距离为 a_1 , 距地心的距离为 r , 地心纬度为 φ 。则 P 点的惯性离心力为

$$p(P) = \omega^2 x i + \omega^2 y j = p_x + p_y.$$

(1.18)

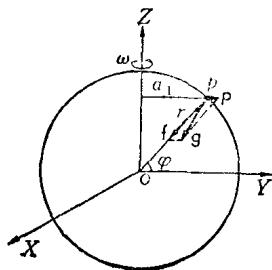


图 1.4 地球离心力场

可以证明 $\operatorname{rot}p(P) = 0$, 所以离心力场必然对应有一个位函数 $Q(P)$, 使得

$$p(P) = \operatorname{grad}Q(P) = \nabla Q(P). \quad (1.19)$$

式中 $Q(P)$ 称为离心力位。此微分方程满足 (1.18) 式的解为

$$Q(P) = \frac{1}{2}\omega_2 a_1^2 + c = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \varphi + c.$$

已知当 $a_1 = 0$ 时, $p(P) = 0$, 规定此时 $Q(P) = 0$, 得 $c = 0$ 。

则

$$Q(P) = \frac{1}{2} \omega^2 a_1^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (1.20)$$

上式就是离心力位的公式。

离心力 $p(P)$ 的散度为

$$\begin{aligned} \operatorname{div} p(P) &= \Delta Q = \nabla \cdot p(P) \\ &= \frac{\partial p_x}{\partial x_x} + \frac{\partial p_y}{\partial y_y} + \frac{\partial p_z}{\partial z_z} = 2\omega^2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

可见离心力场不是调和场，离心力位不是调和函数。

当把 ω 视为常量时，离心力只与观测点至地轴的距离 a_1 有关。由 (1.18) 式可知，离心力的大小可由下式计算：

$$P(P) = \omega^2 r \cos \varphi. \quad (1.22)$$

地球绕轴每一恒星日旋转一周，其角速度为

$$\omega = \frac{2\pi}{86164 \text{秒}}. \quad (1.23)$$

设地球平均半径为 6371 公里，将以上数值代入 (1.22) 式，得

$$P(P) = 3.39 \cos \varphi \text{ 伽}. \quad (1.24)$$

可见，地球离心力的分布是已知的和规则的。在赤道处离心力最大，约为赤道重力的 1/288，向两极逐渐减小，在两极为零。

1.4 地球重力场

1.4.1 地球重力场

地球上某一点的重力 $g(P)$ 如 (1.1) 式：

$$g(P) = f(P) + p(P). \quad (1.25)$$

把 (1.9) 和 (1.19) 式代入上式，便可得地球重力场的公式

$$g(P) = \operatorname{grad}[V(P) + Q(P)] = \operatorname{grad}W(P). \quad (1.26)$$

由上式和 (1.8) 式、(1.20) 式可知地球重力位为

$$W(P) = V(P) + Q(P) = G \int_M \frac{dm}{l} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (1.27)$$

显然, 重力各分量为

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = -G \int_M \frac{x-\xi}{l^3} dm + \omega^2 x, \\ g_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = -G \int_M \frac{y-\eta}{l^3} dm + \omega^2 y, \\ g_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = -G \int_M \frac{z-\xi}{l^3} dm. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

由于重力位中包含离心力位, 所以必然不能满足拉普拉斯方程式。由(1.11)、(1.17)和(1.21)式可知:

对于地球外部重力场有

$$\Delta W_e = \Delta V_e + \Delta Q = 2\omega^2. \quad (1.29)$$

对于地球内部重力场有

$$\Delta W_i = \Delta V_i + \Delta Q = -4\pi G \rho + 2\omega^2. \quad (1.30)$$

因此重力位不是调和函数。

1.4.2 重力位水准面

将(1.28)式加以推广便可知, 重力位对任意方向 l 求导数就等于重力 g 在该方向的分量, 即

$$g_l = \frac{dW}{dl} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{l} = g \cos(\mathbf{g} | \mathbf{l}). \quad (1.31)$$

当位移 dl 的方向与重力 g 的方向垂直时, 有

$$dW = 0. \quad (1.32)$$

积分后, 得

$$W = \text{常量}. \quad (1.33)$$

这是一簇重力等位面的方程式。在重力学中称等位面为水准面, 所以称上式为重力位水准面方程式。

我们知道, 静止海水面上的重力方向处处与海水面垂直, 因此静止海水面就是一个特定的重力位水准面, 它称为大地水准面。假设它的重力位为 W_0 , 那么

$$W = W_0. \quad (1.34)$$

便是大地水准面方程式。它是一个非常复杂的曲面。

当 dl 的方向和 g 的方向相同时, (1.31)式成为

$$dW = g dl, \quad (1.35)$$

或

$$dl = \frac{dW}{g}. \quad (1.36)$$

既然两个重力位水准面之间的位差 dW 是一个常量, 而在同一个水准面上, 重力一般不是常量。因此, 由(1.36)式可以看出, 两个水准面之间的距离一般不是常量。又因为地球重力值总是有限量, 由(1.36)式可知总有 $dl > 0$ 。所以说, 重力位水准面之间既不平行, 又不相交, 也不相切, 重力位是单值函数。从另一方面看, 既然重力线方向与重力位水准面总是正交的, 而水准面之间又是相互不平行的, 那么重力线就必然是弯曲的(如图1.5所示)。人们所熟知的铅垂线便是该点重力线的切线, 代表该点的重力方向。

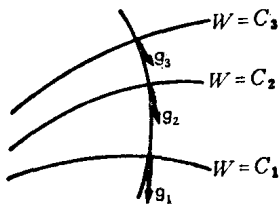


图1.5 重力线弯曲

1.4.3 重力位的球谐函数展开式

球坐标系中的拉普拉斯方程式为

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

如图1.6所示, 式中 r 为矢径, θ 为极距, λ 为地心经度。这个方程式的解为

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \lambda) \text{ 和 } V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}. \quad (1.38)$$