《最优化基础——模型与方法》系列教材

网络优化

谢金星
邢文训

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

《最优化基础——模型与方法》系列教材

网络优化

谢金星 邢文训 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书系统介绍了网络优化的基本模型和基本算法，包括构造这些算法的基本思想以及相应算法在计算机上的一些具体实现技巧和复杂性分析。

全书由 8 章组成：第 1 章为概论，第 2 章和从第 5 章开始的各章分别讨论树的问题、最短路问题、最大流问题、最小费用流问题和匹配问题，第 3 章和第 4 章则分别对整数规划和动态规划进行了简单介绍。

本书可作为数学、应用数学、运筹学、管理科学、系统科学、信息科学、计算机科学与工程等专业的高年级大学生和研究生教材，也可供其他相关专业的学者和技术人员参考。

书　名：网络优化
作　者：谢金星　邢文训　编著
出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
　　　　http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：清华大学印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：850×1168　1/32　印张：9.625　字数：240 千字
版　次：2000 年 8 月第 1 版　　2000 年 8 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-03998-4/O・246
印　数：0001～4000
定　价：13.50 元

《最优化基础——模型与方法》系列教材序言

最优化是人们在工程技术、科学研究和经济管理的诸多领域中经常遇到的问题。结构设计要在满足强度要求等条件下使所用材料的总重量最轻；资源分配要使各用户利用有限资源产生的总效益最大；安排运输方案要在满足物资需求和装载条件下使运输总费用最低；编制生产计划要按照产品工艺流程和顾客需求，尽量降低人力、设备、原材料等成本使总利润最高。可以预料，随着科学技术尤其是计算机技术的不断发展，以及数学理论与方法向各门学科和各个应用领域的更广泛、更深入的渗透，在即将到来的 21 世纪信息时代，最优化理论和技术必将在社会的诸多方面起着越来越大的作用。

解决实际生活中优化问题的手段大致有以下几种：一是靠经验的积累，凭主观作判断；二是做试验选方案，比优劣定决策；三是建立数学模型，求解最优策略。虽然由于建模时要作适当简化，可能使结果不一定非常完善，但是它基于客观数据，求解问题简便、灵活、经济，而且规模可以很大(将来会越来越大)。人们还可以吸收从经验得到的规则，用实验来不断校正建立的模型。随着数学方法和计算机技术的进步，用建模和数值模拟解决优化问题这一手段，将会越来越显示出它的效能和威力。显然，在决策定量化、科学化的呼声日益高涨的今天，数学建模方法的推广应用是符合时代潮流和形势发展需要的。

最优化理论、模型与方法所包含的内容很多，国内已出版了不少教材和专著介绍其各个分支。但是一方面，近年来发展起来的、有着广泛应用背景的规划模型(如随机规划、模糊规划等)，以及一些已经为许多人采用、受到广泛关注的优化算法(如模拟退火、遗

传算法等)，还缺乏详细和系统的介绍；另一方面，一些偏重优化理论和方法的教材，其要求难以与工科学生的数学知识衔接，也缺少对于应用来说十分重要的建模过程和软件介绍，而一些比较通俗的运筹学教材，则在加强理论基础，适应学生将来从事科研工作需要上考虑较少。我们这套教材试图弥补以上两方面的缺陷，力求体现下述特点：

1. 内容既包含传统的线性规划与非线性规划等部分，又纳入有广泛应用前景的随机规划和模糊规划；在传统内容中，既注重典型的数学思想和方法的系统叙述，又引入丰富的建模实例。

2. 数学基础既与工科学生所学知识衔接，又考虑到研究生阅读文献、从事科研工作的需要，适当提高理论基础的起点。

3. 对一般教材介绍的诸多算法进行精选，配合介绍一些应用软件，并引入近年来迅速发展的若干新算法。

本系列教材将陆续出版，首批四册为：《线性与非线性规划》、《网络优化》、《现代优化计算方法》、《随机规划与模糊规划》。

由于水平所限，书中难免有缺陷和错误，诚恳希望读者予以批评指正。

《最优化基础——模型与方法》系列教材编委会

1998 年 5 月

系列教材编委会成员名单

(以姓氏笔划为序)

序 言

我们生活在一个网络社会中。从某种意义上说，现代社会是一个由计算机信息网络、电话通信网络、运输服务网络、能源和物质分派网络等各种网络所组成的复杂的网络系统。网络优化就是研究如何有效地计划、管理和控制这个网络系统，使之发挥最大的社会和经济效益。

网络优化是运筹学(Operations Research)中的一个经典和重要的分支，所研究的问题涉及经济管理、后勤管理、工业工程、交通运输、计算机科学与信息技术、通讯与网络技术、控制论及军事运筹学等诸多领域。因此学习一些有关网络优化的基本知识，对许多专业的学生和许多领域的科技人员、管理人员都是相当必要的。

本书系统介绍了网络优化的基本模型和基本算法。在基本模型方面，主要介绍树的问题(包括最小树、最小树形图、最大分枝)、最短路问题、最大流问题、最小费用流问题和匹配问题等。在基本算法方面，由于处理上述这些问题的算法非常多，而且新算法还在不断涌现，从大量算法中选择哪些典型算法进行介绍本身是见仁见智的事，我们只能有选择地介绍其中部分算法。我们既介绍一些比较经典的算法，也介绍一些比较新颖、实用的算法。

本书由 8 章组成。第 1 章为概论，主要介绍图和网络的一些基本概念、图和网络在计算机上的表示方法、计算复杂性理论等。第 2 章和从第 5 章开始的以后各章分别介绍树的问题、最短路问题、最大流问题、最小费用流问题和匹配问题，这是网络优化的基

本内容。由于网络优化与整数规划和动态规划有相当密切的联系，因此我们在第 3 章和第 4 章分别对整数规划和动态规划进行了简单介绍，对于不关心这部分内容的读者来说，也可以在阅读中略去其中的大部分内容。

笔者曾在清华大学以本书的主要内容为讲义授课多次，本次成书过程中又参考大量国内外有关文献和教材对原内容进行了进一步的筛选和扩充。我们希望本书能适合于不同层次的读者阅读。如果面对数学和计算机等理论性要求较高的专业教学时，最好能讲授本书全部或大部分内容，并要求读者在学习本课程之前已经掌握了线性规划的基础知识。我们希望不仅能让这部分读者了解各种网络优化算法的基本思想和基本理论，而且能了解一些实现技巧并学会算法的复杂性分析方法。在各章的练习题中，我们还配备了一定数量难度较高的题目作为对书中讲授内容的扩充。如果面对其他理论性要求不太高的专业教学时或对不太关心算法复杂性的读者来说，可以在阅读中略去部分理论内容。对于只想对网络优化有所了解或只希望从本书中查询一些具体算法的读者来说，完全可以略去全部的理论部分，而只了解相应的模型和算法就可以了。

清华大学数学科学系姜启源、谭泽光教授审阅了本书初稿的内容，提出了许多宝贵的修改意见，在此我们表示衷心感谢。最后，对我们家人的理解和支持表示由衷的谢意！

由于我们的水平有限，恳请读者对本书的不足之处提出批评指正。

谢金星　邢文训

2000 年春于清华园

目　录

序言 …………………………………………………………… Ⅶ

第 1 章　概论 …………………………………………………… 1

1.1　网络优化问题的例子 ………………………………… 1

1.2　图与网络 ……………………………………………… 3

1.3　图与网络的数据结构 ………………………………… 9

1.4　计算复杂性的概念 …………………………………… 16

1.5　NP,NPC 和 NP-hard 概念 ………………………… 28

1.6　小结 …………………………………………………… 48

练习题 …………………………………………………… 49

第 2 章　最小树与最小树形图 ……………………………… 53

2.1　树的基本概念 ………………………………………… 54

2.2　最小树算法 …………………………………………… 58

2.3　最小树形图 …………………………………………… 66

2.4　最大分枝 ……………………………………………… 73

练习题 …………………………………………………… 76

第 3 章　整数规划 …………………………………………… 80

3.1　整数规划问题 ………………………………………… 80

3.2　全幺模矩阵 …………………………………………… 83

3.3　分数割平面法 ………………………………………… 87

3.4 分枝定界法…… 92
练习题 …… 95

第4章 动态规划 …… 97
4.1 最优化原理…… 98
4.2 动态规划基本方程 …… 102
4.3 应用动态规划方法的几个例子 …… 105
练习题…… 115

第5章 最短路问题…… 119
5.1 最短路问题的数学描述 …… 119
5.2 无圈网络与正费用网络:标号设定算法…… 123
5.3 一般费用网络:标号修正算法…… 131
练习题…… 140

第6章 最大流问题…… 144
6.1 最大流问题的数学描述 …… 145
6.2 增广路算法 …… 153
6.3 最短增广路算法 …… 160
6.4 一般的预流推进算法 …… 168
6.5 最高标号预流推进算法 …… 177
6.6 单位容量网络上的最大流算法 …… 181
练习题…… 184

第7章 最小费用流问题…… 190
7.1 最小费用流问题的数学描述 …… 190
7.2 消圈算法与最小费用路算法 …… 196
7.3 原始-对偶算法…… 204

7.4 瑕疵算法 …… 211
7.5 松弛算法 …… 222
7.6 网络单纯形算法 …… 231
练习题 …… 245

第 8 章 匹配问题 …… 252
8.1 匹配问题的数学描述 …… 252
8.2 二部基数匹配问题 …… 257
8.3 非二部基数匹配问题 …… 262
8.4 二部赋权匹配问题 …… 269
8.5 非二部赋权匹配问题 …… 271
练习题 …… 284

参考文献 …… 289

索引及英文关键词 …… 291

第 1 章

概　论

我们生活在一个网络社会中. 从某种意义上说,现代社会是一个由计算机信息网络、电话通信网络、运输服务网络、能源和物质分派网络等各种网络所组成的复杂的网络系统. 网络优化就是研究如何有效地计划、管理和控制这个网络系统,使之发挥最大的社会和经济效益.

网络优化是运筹学(Operations Research)中的一个经典和重要的分支,所研究的问题涉及经济管理、工业工程、交通运输、计算机科学与信息技术、通讯与网络技术等诸多领域. 本书中将要讨论的最短路问题、最大流问题、最小费用流问题和匹配问题等都是网络优化的基本问题.

本章主要介绍网络优化问题的一些实际例子以及图与网络、计算复杂性等基本概念,为后续章节的学习奠定基础.

1.1　网络优化问题的例子

我们首先通过一些例子来了解网络优化问题.

例 1.1　公路连接问题

某一地区有若干个主要城市,现准备修建高速公路把这些城市连接起来,使得从其中任何一个城市都可以经高速公路直接或间接到达另一个城市. 假定已经知道了任意两个城市之间修建高速公路的成本,那么应如何决定在哪些城市间修建高速公路,使得总成本最小?

例 1.2 最短路问题(SPP-shortest path problem)

一名货柜车司机奉命在最短的时间内将一车货物从甲地运往乙地. 从甲地到乙地的公路网纵横交错,因此有多种行车路线,这名司机应选择哪条线路呢?假设货柜车的运行速度是恒定的,那么这一问题相当于需要找到一条从甲地到乙地的最短路.

例 1.3 运输问题(transportation problem)

某种原材料有 M 个产地,现在需要将原材料从产地运往 N 个使用这些原材料的工厂. 假定 M 个产地的产量和 N 家工厂的需要量已知,单位产品从任一产地到任一工厂的运费已知,那么如何安排运输方案可以使总运输成本最低?

例 1.4 指派问题(assignment problem)

一家公司经理准备安排 N 名员工去完成 N 项任务,每人一项. 由于各员工的特点不同,不同的员工去完成同一项任务时所获得的回报是不同的. 如何分配工作方案可以使总回报最大?

例 1.5 中国邮递员问题(CPP-chinese postman problem)

一名邮递员负责投递某个街区的邮件. 如何为他(她)设计一条最短的投递路线(从邮局出发,经过投递区内每条街道至少一次,最后返回邮局)?由于这一问题是我国管梅谷教授 1960 年首先提出的,所以国际上称之为中国邮递员问题.

例 1.6 旅行商问题(TSP-traveling salesman problem)

一名推销员准备前往若干城市推销产品. 如何为他(她)设计一条最短的旅行路线(从驻地出发,经过每个城市恰好一次,最后返回驻地)?这一问题的研究历史十分悠久,通常称之为旅行商问题.

上述问题有两个共同的特点:一是它们的目的都是从若干可能的安排或方案中寻求某种意义下的最优安排或方案,数学上把这种问题称为最优化或优化(optimization)问题;二是它们都易于用图形的形式直观地描述和表达,数学上把这种与图相关的

结构称为网络(network). 与图和网络相关的最优化问题就是网络最优化或称网络优化 (network optimization) 问题. 所以上面例子中介绍的问题都是网络优化问题. 由于多数网络优化问题是以网络上的流(flow) 为研究的对象,因此网络优化这门课程在许多学校里又常常被称为网络流(network flows) 或网络流规划等.

下面首先简要介绍图与网络的一些基本概念.

1.2 图与网络

1.2.1 有向图与网络的基本概念

定义 1.1 一个有向图(directed graph 或 digraph) G 是由一个非空有限集合 $V(G)$ 和 $V(G)$ 中某些元素的有序对集合 $A(G)$ 构成的二元组,记为 $G = (V(G), A(G))$. 其中 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 称为图 G 的顶点集(vertex set) 或节点集(node set), $V(G)$ 中的每一个元素 $v_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为该图的一个顶点(vertex) 或节点(node); $A(G) = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 称为图 G 的弧集(arc set), $A(G)$ 中的每一个元素 a_k(即 $V(G)$ 中某两个元素 v_i, v_j 的有序对) 记为 $a_k = (v_i, v_j)$ 或 $a_k = v_iv_j(k = 1, 2, \cdots, m)$,被称为该图的一条从 v_i 到 v_j 的弧 (arc). 在不引起混淆的情况下,记号 $V(G)$ 和 $A(G)$ 中也可以省略 G,即分别记顶点集、弧集为 V 和 A,而记有向图 $G = (V, A)$.

如果对有向图 G 中的每条弧赋予一个或多个实数,得到的有向图称为赋权有向图或有向网络, 简称为网络(network). 为了讨论方便,本书对图和网络不作严格区分,因为任何图总是可以赋权的.

当弧 $a_k = (v_i, v_j)$ 时,称 v_i, v_j 为弧 a_k 的端点(endpoint),其中 v_i 为尾(tail), v_j 为头(head),并称 v_j 在 G 中与 v_i 相邻(adjacent) 或

v_j 是 v_i 的邻居(neighbor);弧 a_k 称为与顶点 v_i,v_j 关联 (incident),并称弧 a_k 为 v_i 的出弧(outgoing arc),为 v_j 的入弧(incoming arc). 如果某两条弧至少有一个公共端点,则称这两条弧在图 G 中相邻.

图的概念是现实生活中图形概念的数学抽象,因此一个图也可以用图形来直观表示:用小圆圈表示顶点,用顶点间的带箭头的连线表示弧及其方向(箭头从弧的尾指向弧的头). 例如,如图 1.1 的图形表示的是有向图 $G = (V,A)$ 其中顶点集 $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$,弧集 $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$,弧 $a_1 = (v_1,v_2)$,$a_2 = (v_1,v_2)$,$a_3 = (v_2,v_3)$,$a_4 = (v_3,v_4)$,$a_5 = (v_4,v_1)$,$a_6 = (v_3,v_3)$. 在该图中,弧 a_1,a_2 都是从顶点 v_1 指向顶点 v_2,这种弧称为多重弧(multiarc),相应的图称为多重图(multi-graph). 值得注意的是:这时弧集合 A 也应当理解成多重集(multi-set),即 A 中可以包括多个相同的元素,这与我们通常所说的普通集合的概念有所不同. 在该图中,弧 a_6 的头和尾都相同(v_3),这种弧称为环 (loop). 在该图中,没有任何弧与顶点 v_5 关联,这样的顶点称为孤立点(isolated vertex).

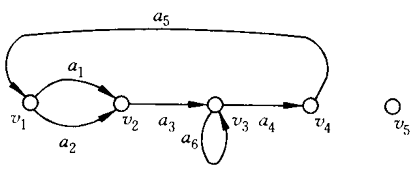

图 1.1 有向图的一般例子

图中顶点的个数称为图的阶(order). 通常用 $|V|$ 或 n 表示顶点个数(即图的阶数),用 $|A|$ 或 m 表示弧的条数. 特别地,我们称只有一个顶点的图为平凡图(trivial graph);不包括任何弧的图为空图(null graph). 没有环、且没有多重弧的图称为简单图(simple graph). 例如,在图 1.1 所示的图 G 中,图的阶数为 $n = |V| = 5$,弧的条数为 $m = |A| = 6$,图 G 不是平凡图或空图,也不是简单

图. 如不特别说明,本书中以后假设讨论的都是简单图.

图中与一个顶点关联的出弧的数目称为该顶点的出度(outdegree),入弧的数目称为该顶点的入度(indegree),而出度与入度之和称为该顶点的度(degree). 度数为偶数的顶点称为偶点(even point),否则称为奇点(odd point). 例如,在图1.1所示的图G中,节点v_2的度为3,一般记为$d_G(v_2)=3$;节点v_2的出度为1,一般记为$d_G^+(v_2)=1$;节点v_2的入度为2,一般记为$d_G^-(v_2)=2$. 在不引起混淆的情况下,也可以省略G,即分别记为$d(v_2)=3$;$d^+(v_2)=1$;$d^-(v_2)=2$. 图1.1所示的图G中节点v_1、v_2为奇点,v_3、v_4、v_5为偶点.

假设$G'=(V',A')$和$G=(V,A)$是两个有向图,如果$V'\subseteq V$,$A'\subseteq A$,则图$G'=(V',A')$称为图$G=(V,A)$的子图(subgraph),可简记为$G'\subseteq G$. 任给$V'\subseteq V$,以V'为顶点集的G的最大子图定义为:顶点集为V',弧集为两个端点都在V'中的G中所有弧的集合. 以V'为顶点集的G的最大子图称为G的由V'导出的子图(induced subgraph),即如果$V'\subseteq V$,$A'=\{(v_i,v_j)\in A\,|\,v_i,v_j\in V'\}$则图$G'=(V',A')$称为图$G=(V,A)$的由$V'$导出的子图(简称顶点导出子图),记为$G[V']$. 类似地,可以定义弧子集$A'\subseteq A$导出的子图(简称弧导出子图)$G[A']=(V',A')$,其中$V'=\{v\in V\,|\,\exists\ v'\in V$,使得$(v,v')\in A'$或$(v',v)\in A'\}$. 由此可以看出,给定$V'\subseteq V$(或$A'\subseteq A$),图$G(V,A)$的导出子图是唯一的. 例如,在图1.1所示的图$G$中,$G[\{v_1,v_2\}]=(\{v_1,v_2\},\{a_1,a_2\})$,$G[\{a_1,a_3\}]=(\{v_1,v_2,v_3\},\{a_1,a_3\})$,$G[\{a_1,a_3,a_5\}]=(\{v_1,v_2,v_3,v_4\},\{a_1,a_3,a_5\})$.

图$G=(V,A)$的支撑子图(spanning subgraph,又称生成子图)是包含G的所有顶点的子图,即当$V'=V$,$A'\subseteq A$时,$G'=(V',A')$称为$G=(V,A)$的支撑子图. 由此可以看出,图$G=(V,A)$的支撑子图一般是不唯一的. 例如,在图1.1所示的图G中,$(\{v_1,$

$v_2,v_3,v_4,v_5\}$,$\{a_1,a_3,a_5\}$)和($\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$,$\{a_1,a_2,a_5,a_6\}$)等都是 G 的支撑子图.

有向图中的途径(walk)是该图的一些顶点 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 和弧 $a_1,a_2,\cdots,a_{r-1}$ 所组成的子图,这些顶点与弧可以交错排列成点弧序列 $i_1,a_1,i_2,a_2,\cdots,a_{r-1},i_r$,其中 $a_k=(i_k,i_{k+1})$ 或 $a_k=(i_{k+1},i_k)(\forall\ k=1,2,\cdots,r-1)$. 如果该序列中的所有弧都指向同一方向,即 $a_k=(i_k,i_{k+1})(\forall\ k=1,2,\cdots,r-1)$,则该途径称为有向途径(directed walk). 在不引起混淆的情况下(如在简单图的情形下),可以仅仅用顶点序列 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 或弧序列 $a_1,a_2,\cdots,a_{r-1}$ 来表示途径. 我们称 $r-1$ 为途径的长,分别称 i_1,i_r 为途径的起点和终点.

有向图中的路(path)是该图的不包含重复顶点的途径. 路中的弧可以分成两类:其中一类弧 $a_k=(i_k,i_{k+1})$ 的方向与路的起点到终点的方向一致,称为路的前向弧(forward arc);另一类弧 $a_k=(i_{k+1},i_k)$ 的方向与路的起点到终点的方向不一致,称为路的后向弧或反向弧(backward arc). 路 P 的所有前向弧的集合一般记为 P^+,反向弧的集合记为 P^-. 有向图中的有向路(directed path)是该图的不包含重复顶点的有向途径,即不包含反向弧的路. 例如,在图 1.1 所示的图 G 中,$v_1a_5v_4a_4v_3$ 就是从顶点 v_1 到 v_3 的一条路,但不是从顶点 v_1 到 v_3 的有向路,因为路上的弧都是反向弧;而 $v_3a_4v_4a_5v_1$ 就是从顶点 v_3 到 v_1 的一条有向路. 又如,$v_2a_3v_3a_4v_4$ 是从顶点 v_2 到 v_4 的一条有向路.

有向图 $G=(V,A)$ 中,如果$(i_1,i_r)\in A$ 或$(i_r,i_1)\in A$,则路 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 加上弧(i_1,i_r)或(i_r,i_1)组成的途径称为该有向图的圈(cycle),即圈是起点和终点重合且不含其他重复顶点的途径. 同路的前向弧和反向弧的定义类似,可以定义圈的前向弧和反向弧. 有向图中的有向圈(directed cycle)是该图的不包含反向弧的圈,即由路 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 加上弧(i_r,i_1)组成. 例如,在图 1.1 所示的图 G 中,$v_1a_1v_2a_2v_1$ 就是一个圈,但不是有向圈,而 $v_1a_1v_2a_3v_3a_4v_4a_5$

v_1 就是一个有向圈. 不包含有向圈的图称为无圈图(acyclic graph). 因此,图 1.1 所示的图 G 不是无圈图.

对于有向图 $G=(V,A)$ 中的两个顶点,如果在图中至少存在一条路把它们连接起来,则称这两个顶点是连通的(connected). 如果图中任意两个顶点都是连通的,则称该图为连通的;否则被称为不连通的(disconnected). 若 $G=(V,A)$ 不连通,$G'=(V',A')$ 是 $G=(V,A)$ 的连通子图,且不存在 $G=(V,A)$ 的连通子图 $G_1=(V_1,A_1)$ 满足 $G'\subseteq G_1,G'\neq G_1$,则称 $G'=(V',A')$ 为 G 的连通分支(component). 也就是说,连通分支是图中的极大连通子图,不连通图可以分解成一些连通分支的并,而连通图只有一个连通分支. 例如,图 1.1 所示的图 G 是不连通的,G 包括两个连通分支,其中一个是只包括节点 v_5 的空图,另一个是除去节点 v_5 后所有节点和弧所构成的子图.

如果有向图中从任意一个顶点出发,都存在至少一条有向路到达任意另一个顶点,则称该图为强连通的(strongly connected). 同样可以与连通分支类似地定义强连通分支. 例如,图 1.1 所示的图 G 除去节点 v_5 后所有节点和弧所构成的子图是强连通的(因此,这样的子图不仅是 G 的连通分支,也同时是一个强连通分支).

设 S,T 是节点集合 V 的一个划分(即 $S,T\subseteq V;S,T\neq\varnothing;S\cup T=V;S\cap T=\varnothing$),则称两个端点分别位于 S,T 的弧为一个割(cut),记为 $[S,T]=\{(i,j)\in A|i\in S,j\in T\}\cup\{(j,i)\in A|i\in S,j\in T\}$. 例如,在图 1.1 所示的图 G 中,若 $S=\{v_1,v_4,v_5\},T=\{v_2,v_3\}$,则 $[S,T]=\{a_1,a_2,a_4\}$.

1.2.2　无向图与无向网络的基本概念

有时我们关心的只是两个顶点之间的联系,而不关心这种联系的方向性,这样就自然得到了无向图和无向网络的概念.