

数理逻辑 发展史

——从莱布尼茨到哥德尔

张家龙 著

社会科学文献出版社

本书出版得到中国社会科学院出版基金资助

数理逻辑发展史

——从莱布尼茨到哥德尔

张家龙 著

社会科学文献出版社

(京)新登字 028 号

数理逻辑发展史
——从莱布尼茨到哥德尔
张家龙 著

社会科学文献出版社出版发行
(北京建国门内大街 5 号 邮政编码: 100732)
新华书店经销 中国科学院印刷厂印刷

850×1168 1/32 开本 14.25 印张 370 千字
印数 0001—1800

1993 年 8 月第一版 1993 年 8 月第一次印刷

ISBN 7-80050-398-4/B·48 定价: 9.20 元

版权所有 翻印必究

序 言

数理逻辑是一门新兴的学科,从创始至今约有 300 年的历史。300 年来,特别是近百年来,它取得了长足的发展,在现代的数学和计算机科学中,以及在自然科学和社会科学的一些部门中都有广泛的应用。在这样的背景下,学习和研究数理逻辑发展史具有十分重要的意义。大体说来,有以下几个方面:

1. 学习和研究数理逻辑发展史有助于锻炼逻辑思维能力,有助于学习数理逻辑的基本理论。一些重要成果的研究方法(如哥德尔证明不完全性定理的方法)可以启示后来者去从事新的探索,建树新的勋业。

2. 我国逻辑教学和研究的现代化工作,从 1978 年第一次全国逻辑讨论会以来,虽然取得决定性的进展,但总的说来,还很不理想。学习和研究数理逻辑史有助于促进我国逻辑教学和研究的现代化,开创我国逻辑研究的新局面。

3. 数理逻辑发展史与马克思主义哲学有密切联系。一方面,数理逻辑发展的过程充分证明了唯物辩证法的正确性;另一方面,数理逻辑史上一些重要成果具有精深的认识论意义,这就需要用马克思主义哲学观点加以总结和概括,以丰富和发展马克思主义哲学。恩格斯说:“随着自然科学领域中每一个划时代的发现,唯物主义也必然要改变自己的形式”。^①列宁说:“要继承黑格尔和马克思的事业,就应当辩证地研究人类思想、科学和技术的历史。”^②恩格斯和列宁的教导完全适用于数理逻辑史研究。

以上三点也正是本书想要达到的目的。

① 《马克思恩格斯选集》,第 4 卷,人民出版社 1972 年版,第 224 页。

② 列宁:《哲学笔记》,人民出版社 1961 年版,第 154 页。

我国的数理逻辑史研究领域原是一片未开垦的处女地，拓荒者是我的恩师王宪钧教授。他在《数理逻辑引论》（北大出版社，1982）中写了一篇《数理逻辑发展简述》，这是目前我国唯一的一部言简意赅的、肖尔兹式的数理逻辑简史。本书的写作受到这部简史的启迪和熏陶。

为节省篇幅起见，本书不详细开列参考文献目录，所引用的文献均已在脚注中标明，书末只列出以原著或原著汇编为主的一些重要文献。

最后，我要衷心感谢中国社会科学院科研局副局长黄浩涛同志、社会科学文献出版社社长沈恒炎同志、副社长邵波同志，没有他们的帮助，本书是不能与读者见面的。

张家龙

1993年1月

于中国社会科学院哲学研究所

目 录

序言

第一章 导论	1
第一节 数理逻辑史的研究对象和分期	1
第二节 数理逻辑史研究中的几个方法论问题	6
一、数理逻辑理论的发生和发展同社会实践的辩证关系	6
二、观点和材料的统一	7
三、逻辑方法和历史方法的统一	8
四、严格区别哲学观点和逻辑学说	10

第一编 数理逻辑前史

——古典形式逻辑时期

第二章 亚里士多德的三段论	11
第三章 斯多阿学派的命题逻辑	16
第四章 中世纪的形式逻辑	20

第二编 数理逻辑初创时期

第五章 数理逻辑产生的时代背景	36
第六章 莱布尼茨的数理逻辑思想	40
第一节 莱布尼茨的三段论系统	40
第二节 莱布尼茨创建数理逻辑的指导思想	45
一、理性演算	45
二、普遍语言	46
第三节 莱布尼茨具体构造的演算	47
第七章 逻辑代数	53
第一节 逻辑代数建立前的逻辑发展	53

第二节 布尔的逻辑代数	59
一、逻辑代数的基本原理及类的解释	60
二、布尔对古典形式逻辑的处理	62
三、逻辑函项及其运算	65
四、逻辑代数的命题解释和概率解释	67
第三节 逻辑代数的发展	71
一、耶芳斯和文恩	71
二、皮尔士	73
三、施罗德	81
四、麦柯尔	82
第八章 关系逻辑	86
第一节 德摩根的关系逻辑	86
一、德摩根对古典形式逻辑的改造	87
二、关系逻辑的创建	89
第二节 皮尔士对关系逻辑的发展	94
一、皮尔士关系逻辑的一些基本概念	95
二、基本运算	96
三、关系逻辑的主要原理	98
四、量词理论	101

第三编 数理逻辑奠基时期

第九章 逻辑演算的建立和发展	109
第一节 弗雷格的逻辑演算	109
一、逻辑演算建立的历史背景	109
二、逻辑演算系统	110
三、自然数的定义	122
四、涵义和所指	127
第二节 皮亚诺的符号体系	136
一、数理逻辑	137
二、数学基础	140
第三节 罗素的逻辑演算	146
一、命题演算和谓词演算	148
二、关系逻辑	159

三、摹状词理论	167
第四节 逻辑演算的发展	178
一、命题演算和谓词演算的不同系统	178
二、逻辑演算的元理论	184
第五节 非经典逻辑简述	189
第十章 从素朴集合论到公理集合论	196
第一节 无穷集合的怪论	196
第二节 康托尔的集合论	199
一、康托尔的指导思想——实无穷的理论	200
二、可数集和不可数集	201
三、超穷基数和超穷序数	206
四、连续统假设	210
第三节 集合论悖论的出现——第三次数学危机	212
一、布拉里-福蒂悖论	213
二、康托尔悖论	214
三、罗素悖论	215
四、关系悖论	215
五、与集合论悖论不同的一些语义悖论	217
第四节 公理集合论的建立	221
一、策梅罗-弗兰克尔的公理集合论	221
二、冯·诺意曼的公理集合论	230
三、贝尔纳斯对冯·诺意曼系统的改进	237
第十一章 逻辑主义论题和逻辑类型论	243
第一节 数学概念和数学定理的推导	244
第二节 逻辑类型论	247
第三节 蒯因的新系统 NF	257
第四节 逻辑主义的历史地位	262
第十二章 直觉主义的数学基础和逻辑	267
第一节 直觉主义的数学哲学	268
第二节 直觉主义的数学基础	271
一、潜无穷论是直觉主义数学的出发点	272
二、在数学中不能普遍使用排中律	273
三、数学对象的可构造性	277

第三节 直觉主义逻辑	282
一、直觉主义的命题演算	283
二、直觉主义的一阶谓词演算	286
三、直觉主义逻辑与经典逻辑的关系	289
第十三章 形式公理学和证明论	293
第一节 从实质公理学到形式公理学	294
一、第一阶段——实质公理学:《几何原本》	295
二、第二阶段——从实质公理学向形式公理学的过渡(概括公理学): 非欧几何和射影几何	303
三、第三阶段——形式公理学:《几何基础》	310
第二节 证明论的建立	317
一、希尔伯特的元数学——证明论纲领	318
二、希尔伯特纲领的历史意义和哲学意义	324

第四编 数理逻辑发展初期

第十四章 哥德尔的伟大贡献	331
第一节 哥德尔完全性定理	332
第二节 模型论的两条基本定理——累文汉定理和紧致性定理	338
第三节 哥德尔不完全性定理	342
一、自然数算术的形式系统	343
二、哥德尔不完全性定理的直观说明	345
三、哥德尔配数法	346
四、形式算术系统元数学的算术化	347
五、原始递归函数和原始递归谓词	349
六、原始递归函数在系统中的数字可表示性	352
七、不可判定命题的形式结构	354
八、不可判定命题与说谎者悖论的关系	356
九、哥德尔不完全性定理的证明	357
十、哥德尔不完全性定理的哲学意义	360
第四节 选择公理和广义连续假设的一致性	368
第十五章 哥德尔不完全性定理带来的硕果	372
第一节 塔尔斯基论形式语言中的真值概念	372
一、在普遍的日常语言中不能定义真值概念	374

二、类演算的形式语言和元语言	379
三、在类演算的元语言中“真语句”的定义	382
四、关于“真语句”定义问题的一般结论	386
五、塔尔斯基定理及其与哥德尔不完全性定理的关系	390
六、塔尔斯基的成果的历史意义	393
第二节 艾尔伯朗——哥德尔——克林的一般递归函数定义	395
一、阿克曼函数	396
二、一般递归函数	397
第三节 λ 转换演算和丘吉论题	404
一、 λ 转换演算	405
二、丘吉论题	407
三、丘吉不可判定性定理	409
第四节 图灵机和可机算函数	414
一、图灵机的基本概念	415
二、可机算函数与 λ 可定义函数的等价性	417
三、图灵论题	418
四、一阶谓词演算的判定问题不可解	419
五、图灵机理论的历史意义	419
第五节 波斯特的符号处理系统	421
一、波斯特机	421
二、波斯特的符号处理系统	423
第六节 塔尔斯基证明不可判定性的一般方法	427
一、若干基本概念	428
二、一些重要定理	431
三、不可判定性成果的哲学意义	435
人名译名对照表	439
主要参考文献	445

第一章 导 论

第一节 数理逻辑史的研究对象和分期

数理逻辑史是研究数理逻辑的发生和发展过程的一门历史性科学。

至于什么是数理逻辑，对这个问题有不同的理解。王宪钧教授在《数理逻辑引论》一书中说：“狭义数理逻辑可以说是用数学方法研究数学中演绎思维和数学基础(如无穷问题)的学科。广义的数理逻辑则包括一切用特制符号和数学方法来研究处理演绎方法的理论。广义数理逻辑较之狭义数理逻辑多包括了例如逻辑代数、内涵逻辑和现代的规范逻辑、疑问句逻辑等等。广义数理逻辑有时也被称为符号逻辑。”^① 笔者同意这种定义，并采用广义的理解来论述数理逻辑史。

狭义数理逻辑包括四个部分(也可以说五个部分)：(1)模型论，(2)集合论，(3)递归论，(4)证明论，以及这“四论”共同基础的经典逻辑演算(命题逻辑和一阶谓词逻辑)。广义数理逻辑还包括非经典逻辑演算的各个分支。因此，广义数理逻辑包括各种逻辑演算(经典的和非经典的)和“四论”五个部分。有的文献把一些非经典逻辑分支称为哲学逻辑(或译为“哲理逻辑”)。有的文献把逻辑演算称为现代形式逻辑。广义的数理逻辑加上现代归纳逻辑等分支有时也被称为现代逻辑。

关于数理逻辑史的分期，存在不同的看法。著名逻辑史家和

① 王宪钧：《数理逻辑引论》，北京大学出版社1982年版，第257页。以下引证此书，只写书名。引用其他文献亦复如此。

哲学家波亨斯基 (Bochenski) 在《形式逻辑史》一书中把数理逻辑史分为四个时期:

1. 前史时期: 从莱布尼茨 (Leibniz, 1646—1716) 到 1847 年, 即布尔 (G. Boole, 1815—1864) 的《逻辑的数学分析》出版的一年。

2. 布尔时期: 从 1847 年到 1895 年施罗德 (E. Schröder, 1841—1902) 的《逻辑代数讲义》第三卷《关系代数和关系逻辑》的出版。

3. 弗雷格 (G. Frege, 1848—1925) 时期: 从他的《概念语言》一书到怀特海 (A. Whitehead, 1861—1947) 和罗素 (B. Russell, 1872—1970) 合著的《数学原理》三大卷的出版 (1910—1913)。

4. 最近时期: 从《数学原理》的出版开始。对这一时期, 波亨斯基以 1930 年为界又再分为: 从 1910—1930 年元逻辑兴起时期和 1930 年后元逻辑用形式方法系统化时期。

按照这种划分, 波亨斯基还列了一张逻辑学家的时间表。^①

从波亨斯基对数理逻辑史的分期和他所论述的数理逻辑史部分来看, 他对数理逻辑的理解比较片面, 基本上讲的是逻辑代数和逻辑演算的历史, 除涉及到证明论中的哥德尔不完全性定理之外, 没有谈到“四论”的发生和发展的历史。这种处理方法根本不符合数理逻辑这门学科的历史和现状, 是我们所不取的。另外, 他把从莱布尼茨到 1847 年布尔《逻辑的数学分析》的出版说成是数理逻辑的“前史时期”, 这也是不妥的。莱布尼茨已提出了数理逻辑的基本概念, 是国际公认的数理逻辑奠基人, 因此, 我们认为, 从莱布尼茨到施罗德是数理逻辑的初创时期。前史时期只能是古典形式逻辑时期 [从古希腊亚里士多德 (Aristotle, 公元前 384—前 322) 到近代的形式逻辑时期], 这一时期的逻辑成就及其局限性,

① Bochenski: *A History of Formal Logic*, Notre Dame, 1961, p. 270.
以下引证此书, 缩写为 HFL。

成了数理逻辑产生的思想来源之一,下文将要论述这个问题。

罗马尼亚逻辑史家杜米特留 (A. Dumitriu) 在《逻辑史》一书中把数理逻辑史分成以下时期: ①

1. 先驱者: 卢里 (R. Lullus, 1234—1315) 和莱布尼茨。

2. 逻辑代数

杜米特留列举了四位英国逻辑学家: 布尔 (G. Boole, 1815—1864), 耶芳斯 (W. Jevons, 1835—1882), 德摩根 (A. de Morgan, 1806—1871), 麦柯尔 (H. McColl, 1837—1909); 这一时期还有其他三位逻辑学家: 皮尔士 (C. S. Peirce, 1839—1914), 格拉斯曼 (R. Grassmann, 1815—1901) 和施罗德 (E. Schröder, 1841—1902)。

3. 数理逻辑的第一时刻

杜米特留在这一时期列举了两位逻辑学家: 皮亚诺 (G. Peano, 1858—1932) 和弗雷格 (G. Frege, 1848—1925)。

4. 数理逻辑的完善

罗素 (B. Russell, 1872—1970) 和怀特海 (A. N. Whitehead, 1861—1947) 合著《数学原理》(3卷, 1910—1913) 是这一时期的标志。

杜米特留在这一时期列出了一个专题: 悖论问题, 涉及三位逻辑学家: 布拉里-福蒂 (C. Burali-Forti, 1861—1931), 康托尔 (G. Cantor, 1845—1918) 和罗素

5. 数理逻辑的发展

杜米特留列举了这一时期的主要内容有: (1) 直觉主义: 布劳尔维 (L. Brouwer, 1881—1966) 和海丁 (A. Heyting, 1899—1980), (2) 逻辑主义: 拉姆赛 (F. P. Ramsey, 1903—1930), 维特根斯坦 (L. Wittgenstein, 1889—1951) 和卡尔纳普 (R. Carnap, 1891—1971), (3) 形式主义: 希尔伯特 (D. Hilbert,

① A. Dumitriu: *History of Logic*, Vol. IV, Abacus Press, 1977, pp. 6—7.

1862—1943), 阿克曼 (W. Ackermann, 1896—1962) 和贝尔纳斯 (P. Bernays, 1888—1977), (4) 多值逻辑和模态逻辑: 卢卡西维茨 (J. Łukasiewicz, 1878—1956) 和波兰学派, 路易斯 (C. I. Lewis, 1883—1964), (5) 判定理论: 哥德尔 (K. Gödel, 1906—1978)。

6. 形式技巧: 卡尔纳普的语形学和塔尔斯基 (A. Tarski, 1902—1983) 的语义学。

杜米特留指出, 这种划分仅仅给出数理逻辑发展主要阶段的思想, 没有提供有关重要问题的线索。^① 然而根据杜米特留在《逻辑史》一书中对数理逻辑史的论述来看, 我们觉得他的分期有一些重要缺点: 1. 对应当属于分期中的集合论、模型论的早期成就没有提及, 对递归论也几乎没有讲述。2. 卢里是中世纪逻辑学家, 把他同莱布尼茨并列, 一起作为数理逻辑的先驱者, 这是不妥当的。莱布尼茨应当是数理逻辑的创始人。3. 从莱布尼茨到逻辑代数应当归并为数理逻辑的初创时期, 不应把莱布尼茨同逻辑代数分为两个阶段。4. 杜米特留所说的“数理逻辑的第一时刻”、“数理逻辑的完善”和“数理逻辑的发展”等三个阶段实际上是数理逻辑奠基时期的内容, 这一时期还应加上一个重要内容——从素朴集合论到公理集合论的发展。5. 数理逻辑发展时期的标志应当是哥德尔完全性定理和不完全性定理的建立, 而不是直觉主义、逻辑主义和形式主义学派的形成。

总之, 杜米特留的数理逻辑史分期有很多弊病, 我们也是不能同意的。

王宪钧教授最先在我国从事数理逻辑史的研究工作, 写出一部数理逻辑简史(《数理逻辑引论》第三篇“数理逻辑发展简述”)。他将数理逻辑史分成: 1. 第一阶段, 即初始阶段, 从莱布尼茨到布尔、德摩根、施罗德等共延续了约二百年。2. 第二阶段, 19世纪中叶数学科学的发展提出了研究数学思想方法和数学基础问题的必

^① 同上, p. 7。

要性。数理逻辑适应数学的需要,联系数学实际,在六十年的时间内奠定了它的理论基础,创建了特有的新方法,取得了飞跃的发展,成长为一门新学科。这阶段的主要内容有:(1)集合论的建立,(2)公理方法的发展,(3)逻辑演算的建立,(4)证明论的提出。3. 过渡时期,从希尔伯特计划以后直至 30 年代末。这一时期主要是哥德尔的工作。4. 第三阶段,1940 年前后到 70 年代是数理逻辑的发展阶段,主要内容大致分为五个方面:逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论。^①

笔者基本上同意这种分期方法,但需要进行补充和修改:1. 为了历史地说明数理逻辑的一个重要来源——古典形式逻辑,在初始阶段前加上一个“前史时期”是很有必要的。2. 在王宪钧教授的简史中,由于篇幅的限制,因而没有包括一些重要内容,例如,皮尔士对逻辑代数和关系逻辑的发展,公理集合论的建立和发展,逻辑语义学的建立,判定问题的重要结果,等等。这些内容在数理逻辑史专著中应当加以论述。3. 一般认为,哥德尔在 30 年代所取得的一系列重要结果,特别是不完全性定理,标志着数理逻辑的发展进入了一个新时期。正如王浩教授所说:“从 1930 年开始,哥德尔发表了一些有份量的结果,……开辟了数理逻辑的新纪元。”^②因此,我将王宪钧教授所说的“过渡时期”改称为“数理逻辑初步发展时期”(简称为“数理逻辑发展初期”)。

综上所述,我们这部数理逻辑史专著采用以下的分期:

1. 数理逻辑前史时期——古典形式逻辑时期。这一时期主要论述亚里士多德的三段论,斯多阿学派的命题逻辑和中世纪形式逻辑所取得的成就。

2. 数理逻辑初创时期——逻辑代数时期。这一时期从莱布尼茨到施罗德,主要论述数理逻辑产生的社会历史背景,莱布尼茨的数理逻辑思想,逻辑代数和关系逻辑的建立和发展。

^① 《数理逻辑引论》第 257—259 页。

^② 王浩:《数理逻辑通俗讲话》,科学出版社 1981 年版,第 5 页。

3. 数理逻辑奠基时期。这一时期从 1879 年弗雷格《概念文字》的出版到希尔伯特的元数学纲领的提出,主要论述逻辑演算的建立,素朴集合论、第三次数学危机和公理集合论,为解决第三次数学危机三大学派所取得的重要结果:逻辑类型论,直觉主义数学基础和逻辑,形式公理学和证明论。

4. 数理逻辑发展初期。这一时期是 20 世纪 30 年代,主要论述哥德尔的几项重大结果——完全性定理、不完全性定理和连续统假设的一致性,以及在哥德尔不完全性定理之后所取得的一系列成果,例如,形式语言中真值概念的定义,一般递归函数和图灵机理论,判定问题的重要成果,等等。

5. 数理逻辑现代发展时期。这一时期从 20 世纪 40 年代开始,主要内容是各种非经典逻辑演算和四论——模型论、集合论、递归论和证明论的突飞猛进的发展。这一时期的历史发展不属于本书论述的范围,有兴趣的读者可以参看 1977 年出版的《数理逻辑手册》和 80 年代出版的四卷《哲学逻辑手册》。^①

第二节 数理逻辑史研究中的几个方法论问题

一、数理逻辑理论的发生和发展同社会实践的辩证关系

在研究数理逻辑史时,必须以辩证唯物主义和历史唯物主义为指导。社会实践是数理逻辑的理论产生和发展的源泉。17 世纪,资本主义上升时期生产力的发展,自然科学的长足进步,数学方法的广泛使用,对建立新的逻辑学的迫切需要,这些客观条件为莱布尼茨创建数理逻辑奠定了基础。但是,数理逻辑的发展与实践的联系不是机械的,除了对实践的依赖性的一面之外,还有它自

^① *Handbook of Mathematical Logic* Edited by J. Barwise, North-Holland Publishing Company, 1977. *Handbook of Philosophical Logic* Edited by Gabbay and Guenther, 4 vols. Reidel, Dordrecht, 1983—1988.

己的相对独立性。它具有自身发展的继承关系，有古典形式逻辑的成就作为思想前提，这也是我们在数理逻辑史的分期中列出前史时期的一个原因。数理逻辑的相对独立性还表现在，它在外观上可以走在实践的前面，尔后受实践检验，得以进一步发展，臻于完善。恩格斯说：“正如同在其他一切思维领域中一样，从现实世界抽象出来的规律，在一定的发展阶段上就和现实世界脱离，并且作为某种独立的东西，作为世界必须适应的外来的规律而与现实世界相对立。社会和国家方面的情形是这样，纯数学也正是这样，它在以后被应用于世界，虽然它是从这个世界得出来的，并且只表现世界的联系形式的一部分——正是仅仅因为这样，它才是可以应用的。”^①例如，作为形式系统的逻辑代数，最初是英国逻辑学家布尔用代数方法研究传统逻辑而产生的，后来在逻辑、数学和电子计算机中得到广泛的应用。非欧几何最初是从探讨平行公设的证明过程中产生的，后来在相对论中得到应用，并在天文学的观察材料中得到检验，这就证明了它确实是客观世界的空间形式的反映，并非是虚构的几何学。

总之，我们在研究数理逻辑史的时候，一方面承认数理逻辑的概念和理论的产生和发展从本源来说是由实践决定的，另一方面也承认其相对独立性，这就和机械唯物主义划清了界限，坚持了辩证唯物主义。

二、观点和材料的统一

研究数理逻辑史必须从历史事实出发，详细占有材料，从大量事实材料中形成观点。

马克思说：“当然，在形式上，叙述方法必须与研究方法不同。研究必须充分地占有材料，分析它的各种发展形式，探寻这些形式的内在联系。只有这项工作完成以后，现实的运动才能适当地叙

^① 《马克思恩格斯选集》，第3卷，人民出版社1972年版，第78页。