

运筹学论文集

(I)

中国科学院数学研究所运筹学研究室編

科学出版社

运筹学论文集

(I)

中国科学院
数学研究所 运筹学研究室編

科学出版社

1964

內 容 簡 介

此书为中国科学院数学研究所运筹学研究室在近年来所作的一些工作。論文集中包含八篇論文，牽涉到的問題較廣，有：拖拉机的合理配备問題；网路上多种物資的運輸問題；介紹 Gomory 所提出的求綫性規劃整數解的割平面方法；对一般凹規劃給出一个逐次改进的迭代程序；討論了由水庫調节問題所启发的一类規劃問題；产品的生产与分配部門間平衡經濟数学模型及其应用；国民經濟綜合平衡规划模型；对交通运输和自动生产綫上出現的一种 s 个服务台的等待排队系統的研究等。

运 筹 学 論 文 集

(I)

中国科学院 运筹学研究室編
数学研究所

*

科学出版社出版

北京朝陽門大街 117 号

北京市书刊出版业營業許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1964 年 7 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1964 年 7 月第一次印刷 印张：4 3/8

印数：0001—5,900 字数：114,000

統一书号：13031·1933

本社书号：2990·13-1

定价：[科七] 0.75 元

目 录

拖拉机配备問題中的一类数学模型.....	
.....朱永津 唐公正 裘宗沪 (1)	
网路上多种物资运价为凸函数的规划問題.....	朱永津 (17)
綫性规划整数解問題.....	馬仲蕃 (26)
一个非綫性凹规划的解法.....	应玫茜 (42)
一类最优过程的动态规划方法.....	吳滄浦 (60)
产品的生产与分配部門間平衡經濟数学模型及其若干应用	
.....李秉全 (85)	
国民經济綜合平衡规划模型及逾期使用产品問題...	陈錫康 (101)
到达时刻依赖于队长的排队模型.....	韓繼业 (120)

拖拉机配备問題中的一类数学模型

朱永津 唐公正 裘宗沪

摘 要

本文对拖拉机配备問題提出一个数学模型,同时考虑到配备拖拉机和使用拖拉机时的两种費用。根据单纯形方法的原理提供了一个特殊計算方法;討論了基底反映在表格上的形式,以及用位势法檢驗,和用迴路調整法調整。这算法可以理解為多重广义运输問題,能在比单纯形表小得多的表格上运算。

社会主义的农业,需要建筑在高度科学化的基础上。支援农业是我們的任务,也是发展科学的一个重要方面。1962年我們和农业机械化科学院及計算技术研究所的同志們协作,参加了关于拖拉机配备問題的研究。本文主要提出有关的数学模型的特殊算法。

設某地区每年有 m 种作业,每种作业有一定的日需作业量 b_i ,而且要 T_i 天才能完成。这些作业可以用 n 种型号的拖拉机进行工作,而各种拖拉机在各项作业上工作时,有相应的效率和相应的費用。問題是对这地区如何确定各种拖拉机的配备量,使任务既能完成,而总的費用又达到最小。

总的費用應該考虑到配备拖拉机所需要的費用(如折旧費等称为不变費用),和使用拖拉机时的費用(如油料費等称为可变費用)。多配备拖拉机就能用較合适的机型去完成有关的作业,所以增加配备的費用就可以减少使用时的費用,这两种費用如何統一考虑,使总費用达到最小,是这个模型所要考虑的目标。

我們觉得一般的机器配置問題,同样会有配备的費用和使用时的費用之間的矛盾,如何統籌兼顧,使总費用达到最小的問題,

这模型同样可作参考。

我們討論有若干个作业阶段，而每个阶段有若干作业项目要在这时期内完成的情形。

令 a_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) 表示第 j 型拖拉机在第 i 个作业项目工作的效率(亩/台日)。

b_i ($i = 1, \dots, m$) 表示第 i 项作业的日需作业量(而要 T_i 天才能完成第 i 项作业)。(亩/日)

x_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) 表示第 j 型拖拉机安排到第 i 个作业项目上工作的台数。

x_j ($j = 1, \dots, n$) 表示第 j 型拖拉机配备的台数。

y_{kj} ($k = 1, \dots, l; j = 1, \dots, n$) 表示第 j 型拖拉机在第 k 作业阶段用剩的台数。

c_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) 表示一台第 j 型拖拉机，在第 i 项作业工作 T_i 天所需要的可变費用(元/台)。

d_j ($j = 1, \dots, n$) 表示配备一台第 j 型拖拉机每年需要的不变費用(元/台)。

N_k ($k = 1, \dots, l$) 表示第 k 个作业阶段，同时期內进行的作业项目数。(在分作业阶段时，要使同阶段中各作业项目的 T_i 都相同。)

作业总費用最低的数学模型——問題(I)

求 $Y = \{x_{ij}; x_j; y_{kj}\}$ ，滿足

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} = b_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (1)$$

$$x_j - \sum_{i=M_k+1}^{M_k+N_k} x_{ij} - y_{kj} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, l \\ \text{令 } M_1 = 0; M_k + N_k = M_{k+1} \end{array} \right), \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; x_{ij} \geq 0; y_{kj} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, l), \quad (3)$$

使得

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^n d_jx_j \text{ 达到最小。} \quad (4)$$

表 1 (I) 和 (II) 的系数矩阵

[illegible]

(I) 的对偶問題——問題 (II)

求 $W = \{U_i; V_{kj}\}$, 滿足

$$a_{ij}U_i - V_{kj} \leq c_{ij} \quad (i = M_k + 1, \dots, M_k + N_k; \\ k = 1, \dots, l; j = 1, \dots, n) \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^l V_{kj} \leq d_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (6)$$

$$-V_{kj} \leq 0 \quad (k = 1, \dots, l; j = 1, \dots, n) \quad (7)$$

使得

$$\sum_{i=1}^m b_i U_i \text{ 达到最大.} \quad (8)$$

滿足(1)式表示所安排的拖拉机能使每天的作业量恰好完成。

(2)式表示各型拖拉机的配备量不少于各作业阶段的最大使用量。

(3)式表示配备量、使用量、剩余量都是非負的。(4)式表示完成各项任务所付出的总費用。

这是一类特殊形式的綫性规划問題，可以用一般的单纯形方法計算，但利用表 2 的形式进行計算較簡便。我們可把問題(I)的可行解写成如表 2 的形式：作业項目 B_i 的行相应于(1)式；每列中的每个作业阶段相应于(2)式，其中 $R_k (k = 1, \dots, l)$ 表示第 k 个作业阶段上各型拖拉机的剩余量，不妨假設各列中最少有一个 $y_{kj} = 0 (j = 1, \dots, n)$ ，即配备量等于各阶段的最大使用量。在表 2 上运算是 $(m + l + 1) \times n$ 的矩陣，較之用单纯形表是 $(m + l \times n) \times (m \times n + n + l \cdot n)$ 的矩陣上运算要簡單得多。現在把計算原理及步驟介紹如下。

設 Y^0 是一个可行解，填在表 2 上， $\{x_{ij}^0; x_j^0; y_{kj}^0\}$ 中的正变量称为頂点，在每个作业阶段的同列的頂点有稜相連，同作业項目的頂点也有稜相連，这样构成的綫性图称为 Y^0 的正图。可見正图的每一个連通片都只能在同一作业阶段內，在 R_k 的行上的頂点沒有稜相連，正变量 x_j^0 是孤立頂点。变量 $(x_{M_k+1}^0, \dots, x_{M_k+N_k}^0, y_{kj}^0)$ 称为組 (k, j) 的变量，而 x_i 可属于第 j 列的任一組中。

表 2

	$A_1 \cdots \cdots A_j \cdots \cdots A_n$	
B_1	$x_{11} \cdots \cdots x_{1j} \cdots \cdots x_{1n}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_{N_1}	$x_{N_1 1} \cdots \cdots x_{N_1 j} \cdots \cdots x_{N_1 n}$	b_{N_1}
R_1	$y_{11} \cdots \cdots y_{1j} \cdots \cdots y_{1n}$	
B_{M_2+1}	$x_{M_2+1 1} \cdots \cdots x_{M_2+1 j} \cdots \cdots x_{M_2+1 n}$	b_{M_2+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$B_{M_2+N_2}$	$x_{M_2+N_2 1} \cdots \cdots x_{M_2+N_2 j} \cdots \cdots x_{M_2+N_2 n}$	$b_{M_2+N_2}$
R_2	$y_{21} \cdots \cdots y_{2j} \cdots \cdots y_{2n}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_{M_l+1}	$x_{M_l+1 1} \cdots \cdots x_{M_l+1 j} \cdots \cdots x_{M_l+1 n}$	b_{M_l+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$B_{M_l+N_l}$	$x_{m1} \cdots \cdots x_{mj} \cdots \cdots x_{mn}$	b_m
R_l	$y_{l1} \cdots \cdots y_{lj} \cdots \cdots y_{ln}$	
	$x_1 \cdots \cdots x_j \cdots \cdots x_n$	

定理 1. 問題 (I) 的可行解 Y^0 为基本可行解的充要条件是 Y^0 的正图的顶点可以分成两类: 一类是项目代表, 每个作业项目 B_i 最多有一个项目代表, 由该行的某顶点 x_{ij}^0 担任; 另一类是组代表, 每个组最多有一个代表, 由组中某一顶点 x_{ij}^0 或 y_{kj}^0 担任, 或由同列的顶点 x_{ij}^0 担任.

当問題 (I) 不退化时, 则每个作业项目及每一组都有且仅有一个代表.

(每一个顶点只能担任一次代表. $R_k (k = 1, \cdots, l)$ 不是作业项目, 故不能有该行的代表.)

证明. 只对不退化的条件进行证明即可.

充分性: 已知 Y^0 的正图满足定理中 (不退化时) 的条件, 要证相应于正图顶点的系数向量组 B 是线性独立的. 此时向量组 B 所决定的矩阵 (亦记为 B) 是正方的, 因此只须证明 B 的行列式不

为零。又由于效率 a_{ij} 测定时不可能完全准确,总可以认为这些系数作十分小的变更时,无碍于问题的讨论。故只须行列式 B 展开后各项不同时消失,便可认为这个行列式不为零。

从表 1 看到,可把 B 分为上下两半,对应于 m 个项目的那 m 行组成上半,记为 B^+ ,其余的行组成下半,记为 B^- 。而且

(A): B 中相应于 x_{ij}^0 的向量 P_{ij} 有两个非零分量,一个是 a_{ij} ,在上半 B^+ ,一个是 -1 ,在下半 B^- 。

(B): B 中相应于 y_{kj} 的向量 P_{kj} ,只有一个非零分量 -1 在下半 B^- 。

(C): 同组中的 $\{x_{ij}^0, y_{kj}^0\}$ 所对应的向量在下半 B^- 中的非零元素 -1 是在同一行的。

(D): B 中相应于 x_j^0 的向量 P_j 在下半有 l 个 1 , 这些 1 分别位于与组 (k, j) ($k = 1, \dots, l$) 所对应的那 l 行。

如果 Y^0 满足定理的条件,其项目代表是 x_{ii}^0 ($i = 1, \dots, m$),不妨认为 $x_1^0 > 0, x_2^0 > 0, \dots, x_s^0 > 0$, 设 x_j^0 为 (k_j, j) 组 ($j = 1, \dots, s$) 的代表, $x_j^0 = 0$ ($j > s$)。记 B^+ 中由 j_i 列 ($i = 1, \dots, m$)

组成的方块为 B_1 , $|B| = \begin{vmatrix} B^+ \\ B^- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 B_2 \\ B_3 B_4 \end{vmatrix}$, 故 $|B_1| = \pm \prod_{i=1}^m a_{ii}$,

在 B_1 中对应于 P_{ij} 和 P_{kj} 的那些列中只有一个 -1 , 这些 -1 不同行(因为每组只有一个代表),依次按这些列展开行列式 $|B_1|$, 最后得到一个 s 阶子行列式是在相应于组 (k_j, j) ($j = 1, \dots, s$) 的行和在相应于 P_j ($j = 1, \dots, s$) 的列上,因为组 (k_j, j) 有代表 x_j 故这个 s 阶行列式中每行必有一个 1 , 因为每组只可能在表 2 的某一列上,故每行也只能有一个 1 。因为 x_j ($j = 1, \dots, s$) 为不同组的代表,故每列最少有一个 1 (这些 1 都不同行的)。因行数等于列数,故每列只有一个不同行的 1 , 可得 $|B_1| = \pm 1$ 。由此可见,行列式 $|B|$ 按拉普拉斯法则的展开式中有一项是 $|B_1| \cdot |B_4| =$

$\pm \prod_{i=1}^m a_{ii} \neq 0$, 故 B 的行列式展开后各项不能同时消失,由前面的

说明得 $|B| \neq 0$, 故 B 是一组基。

必要性：設已知基本可行解 Y^0 的基向量組 B ，故 $|B| \neq 0$ ，其中 $B^+ = (B_1 B_2)$ ， $B^- = (B_3 B_4)$ ，不妨認為 $|B_1| \neq 0$ ， $|B_4| \neq 0$ 。因 $|B_1| \neq 0$ ，故 $|B_1|$ 的展开式中有一項不为零，即 B_1 的各列有不同行的正元素 a_{ij} ，我們令相应的 x_{ij}^0 （不会是 y_{kj} 或 x_j ）作 a_{ij} 所在行相应的作业項目的代表。因 $|B_4| \neq 0$ ，故各列有不同行的非零元素，以每列相应的頂点 x_{ij}^0 或 x_j^0 或 y_{kj}^0 作該非零元素所在行相应的組的代表。故所有頂点恰分为两类，而每項目每組有一个代表。

定义 1. 若正图的一个連通片有唯一的閉迴路而沒有 y_{kj} 型的頂点，或有唯一的 y_{kj} 型的頂点而无閉迴路，則称为甲型連通片。如下述的表 11 中 $y_{21}x_{31}x_{33}x_{43}$ 是甲型片；若既无閉迴路又无 y_{kj} 型的頂点，則称为乙型連通片。如表 11 的 x_{23} 和 $x_{11}x_{31}$ 是两个乙型片。

定义 2. 正图的每个子图所占的列叫做該子图的寬度，所占的作业項目的行数叫做該子图的高度。

定理 2. 在不退化的情況下，問題 (I) 的可行解 Y^0 是基本可行解的充要条件是 Y^0 的正图满足下述条件：

- (1) 每一个連通片或为甲型，或为乙型。
- (2) 乙型連通片的个数和孤立頂点 x_j^0 的个数相等。
- (3) 任何 K 个乙型連通片的寬度不少于 K 。

证明。

必要性：設 Y^0 是一个不退化的基本可行解， Y^0 的正图的每一个連通片都在同一阶段內，若連通片的高度为 m_1 ，寬度为 n_1 。由定理 1 知道相应于这一片有 $m_1 + n_1$ 个代表，但这些代表中可能是由孤立頂点 x_j^0 担任的，因此在这連通片上最多有 $m_1 + n_1$ 个頂点，根据熟知的定理，这連通片的 m_1 个作业項目和 n_1 列上最少有 $m_1 + n_1 - 1$ 个頂点（即这片最多只有一个代表由孤立頂点 x_j^0 担任），如果这連通片有 $m_1 + n_1$ 个頂点，則它是甲型的，如果有 $m_1 + n_1 - 1$ 个頂点，則它是乙型的。故这連通片成为乙型的充要条件是有且仅有一个孤立点 x_j^0 作該片的組代表，从而 (2) 和 (3) 是显然的。

充分性：如果可行解 Y^0 的正图满足条件(1),(2),(3),则甲型連通片上相应的代表可由片上的顶点担任。乙型連通片上需要由孤立頂点 x_j^0 中补充一个作为組代表。根据寇尼希、霍尔定理^[1], 条件(2)和(3)恰好保证了每个乙型片分别得到一个 x_j^0 作組代表, 因此这个正图满足定理 1 的条件,故 Y^0 是不退化的基本可行解。

計 算 程 序

1. 初始基本可行解的安排

安排原則：在成本低效率高綜合性能好的型号先安排，这列选取的配备量恰好完成某作业阶段若干行的作业量，对其他作业项目要就不安排，要就尽量安排——即安排的使用量或者完成該行的作业量，或者这使用量加上同組已安排的使用量等于配备量。然后对剩余的任务，选用其他型号的拖拉机，用同样的原則进行安排，容易验证，这样得到的初始方案是基本可行解。

2. 檢驗

先求位势 $W^0 = \{U_i^0; V_{kj}^0\}$, 若 Y^0 是不退化的基本可行解, 则 W^0 是唯一确定的。若 Y^0 是退化的, 則可根据定理 1, 2, 在适当位置上选取基变量使位势确定。如先除去 $x_{ij}^0 = 0$ 的列, 使滿足

$$x_{ij}^0 > 0 \text{ 时 } \alpha_{ij}^0 \equiv c_{ij} - a_{ij}U_i^0 + V_{kj}^0 = 0 \quad (i \in I_k), \quad (9)$$

$$x_j^0 > 0 \text{ 时 } \beta_j^0 \equiv d_j - \sum_{k=1}^l V_{kj}^0 = 0, \quad (10)$$

$$y_{kj}^0 > 0 \text{ 时 } \gamma_{kj}^0 \equiv V_{kj}^0 = 0, \quad (11)$$

其中 $I_k = \{M_k + 1, \dots, M_k + N_k\} \quad (k = 1, \dots, l)$

求得(9),(10),(11)的 U_i^0, V_{kj}^0 后, 再确定 $x_{ij}^0 = 0$ 的列的 V_{kj}^0 , 令 $V_{kj}^0 = \max_{i \in I_k} [-(c_{ij} - a_{ij}U_i^0); 0] \quad (k = 1, \dots, l)$, 这时有 $\alpha_{ij}^0 \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad \gamma_{kj}^0 \geq 0 \quad (k = 1, \dots, l)$ 这样确定的位势 W^0 相当于把 $x_{ij}^0 \quad (i \in F_{ij}^0)$, 其中 $F_{ij}^0 = \{i_k | \text{在每个作业阶段中最多取一个 } i_k, \text{ 而且 } -(c_{ikj} - a_{ikj}U_{i_k}^0) = \max_{i \in I_k} [-(c_{ij} - a_{ij}U_i^0); 0] > 0, (k = 1, \dots, l)\}$ 以及 y_{kj}^0 (其中 k 相应于 $V_{kj}^0 = 0$) 作

为基变量求得的位势。

由单纯形方法可得如下的判别法则：

$$\alpha_{ij}^0 \geq 0, \beta_j^0 \geq 0, \gamma_{ki}^0 \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; \\ j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, l),$$

则 Y^0 为最优解，在不退化时，这些检验数非负是最优解的充要条件。

3. 调整

如果某检验数小于零，便根据线性规划的基本原理进行调整，把相应变量尽可能增大，使目标函数值下降。

调整时，可分 (A) $\alpha_{ij}^0 < 0$; (B) $\gamma_{ki}^0 < 0$; (C) $\beta_j^0 < 0$ ，三种情况来讨论，在引进相应的新变量时，每种情况中都会出现两种情形：

(i) 新变量的行和列不与乙型连通片连通，只与甲型连通片连接，这时可在该作业阶段内调整。

(ii) 新变量行连或列连或行列均连乙型连通片，这时调整会牵涉到其他作业阶段。

用数字例子阐明调整过程如下：

表 3

$a_{ij} \backslash i \quad j$	I	II	III	b_i
一	6	6	4	18
二	1	4	5	20
三	4	4	3	16
R_1				
四	2	4	3	8
五	3	2	5	23
R_2				

表 4

$c_{ij} \backslash i \quad j$	I	II	III
一	3	3	2
二	1	3	3
三	3	3	3
R_1			
四	2	$2\frac{2}{5}$	1
五	3	$1\frac{1}{2}$	4
R_2			
d_j	9	10	8

例。设已知实际情况如表 3，表 4，求最优的配备方案。根

据上述安排原则可求得初始基本可行解如表 5, 根据 (9), (10), (11) 求得位势如表 6, 这时 $\gamma_{kj}^0 \geq 0$, $\beta_j^0 \geq 0$, 而 α_{ij}^0 为 [] 内的数, 这里 $\alpha_{11}^0 = -1 < 0$, $\alpha_{52}^0 = -\frac{1}{2} < 0$, 即出现 (A) 的情况. 若引进 x_{52} 为新的基变量, 则出现 (i) 的情形; 而 (i) 的情形中可分三类:

表 5

$i \backslash j$	I	II	III
一		3	
二			4
三	4		
R_1			
四		2	
五	1		4
R_2	3	1	
x_j	4	3	4

表 6

$i \backslash j$	I	II	III	u_i
一	[-1]	0	$[\frac{1}{3}]$	$2\frac{1}{6}$
二	[8]	[5]	0	2
三	0	[1]	[1]	3
V_{1j}	9	10	7	
四	$[\frac{4}{5}]$	0	$[\frac{1}{5}]$	$\frac{3}{5}$
五	0	$[-\frac{1}{2}]$	0	1
V_{2j}	0	0	1	

(一) 引进新变量后, 构成连接两个 y_{kj} 型顶点的链 (无回路), 如表 5 中的 $y_{21}x_{51}x_{52}y_{22}$.

(二) 引进新变量后, 有某一个 y_{kj} 顶点与某一个闭回路连通, 如表 7 $y_{21}x_{51}x_{52}x_{53}x_{43}x_{42}$.

(三) 引进新变量后, 有两个连通的闭回路.

在调整时, 令新变量 $x_{52} = \theta$, 并在保证满足 (1), (2), (3) 的条件下取极大值. 如令 $x_{51} = x_{51}^0 - \frac{2}{3}\theta$ 就满足条件 (1), 令 $y_{22} = y_{22}^0 - \theta$, $y_{21} = y_{21}^0 + \frac{2}{3}\theta$ 就满足条件 (2), $\bar{\theta} = \min \left\{ 1 \times 1, \frac{3}{2} \times 1 \right\} = 1$ 就是满足条件 (3) 的 θ 的极大值. 这样得到新的基本可行解如表 7. 同样可算出位势和检验数如表 8, 其中 $\alpha_{43}^0 = -\frac{7}{40} < 0$, 引进新变量 x_{43} , 调整后可得新基本可行解如表 9. (三) 的调整和上述类型 (一), (二) 的调整是相似的, 可在两闭回路上各取一参变

表 7

$i \backslash j$	I	II	III
一		3	
二			4
三	4		
R_1			
四		2	
五	$\frac{1}{3}$	1	4
R_2	$3\frac{2}{3}$		
x_j	4	3	4

表 8

$i \backslash j$	I	II	III	u_j
一	$[-\frac{1}{2}]$	0	$[\frac{2}{3}]$	$2\frac{1}{12}$
二	[8]	$[\frac{9}{2}]$	0	2
三	0	$[\frac{1}{2}]$	[1]	3
V_{1j}	9	$9\frac{1}{2}$	7	
四	$[\frac{11}{20}]$	0	$[\frac{-7}{40}]$	$\frac{29}{40}$
五	0	0	0	1
V_{2j}	0	$\frac{1}{2}$	1	

量, 与下节 (ii) 的计算类似。对表 9 检验可得表 10, 其中 $\alpha_{11}^0 = -\frac{1}{2} < 0$, 引进新变量 $x_{11} = \theta$ 就出现(ii)的情形。为了满足(1)或下述的(12), 令 $x_{12} = x_{12}^0 - \frac{6}{6}\theta$, 为了满足(2)或(13), x_1 的增量 $\theta_1 = \theta$, x_2 的增量 $\theta_2 = -\theta$, θ 变化时对甲型片也有相应的影响, 故 $x_{21} = x_{21}^0 - \theta$, $x_{31} = x_{31}^0 + \frac{2}{3}\theta$, $y_{21} = y_{21}^0 + \theta - \frac{2}{3}\theta$, 极大的 $\theta = 3$, 故得表 11, 容易验证表 11 的解为最优解, (即 $a_{ij} \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\gamma_{kj} \geq 0$ ($i = 1, \dots, 5; j = 1, 2, 3; k = 1, 2$), 其中 $V_{12}^3 = 9$, $V_{22}^3 = \frac{1}{2}$)。即 $x_1 = 7$ 台, $x_3 = 4$ 台为最优配备方案。

調整的一般原理中我們对 (A) (ii) 加以詳述, 其他情况簡略說明。

已知 $\alpha_{i_0 j_0}^0 < 0$, 引进 $x_{i_0 j_0}^0$ 为新的基变量且出现(ii)的情形, 我

表 9

$i \backslash j$	I	II	III
一		3	
二			4
三	4		
R_1			
四			$2\frac{2}{3}$
五	$3\frac{4}{9}$	3	$1\frac{1}{3}$
R_2	$\frac{5}{9}$		
x_j	4	3	4

表 10

$i \backslash j$	I	II	III	u_i
一	$[-\frac{1}{2}]$	0	$[\frac{2}{3}]$	$2\frac{1}{12}$
二	[8]	$[\frac{9}{2}]$	0	2
三	0	$[\frac{1}{2}]$	[1]	3
V_{1j}	9	$9\frac{1}{2}$	7	
四	$[\frac{2}{3}]$	$[\frac{7}{30}]$	0	$\frac{2}{3}$
五	0	0	0	1
V_{2j}	0	$\frac{1}{2}$	1	

表 11

$i \backslash j$	I	II	III
一	3		
二			4
三	4		
R_1			
四			$2\frac{2}{3}$
五	$5\frac{4}{9}$		$1\frac{1}{3}$
R_2	$1\frac{5}{9}$		
x_j	7		4

們暫不考慮甲型連通片的基变量，先考慮乙型連通片，設 $x_{i_0}^0$ 的基变量只有 s 个，由定理 2 知乙型連通片就有 s 个，按乙型片的定义每片就是一棵树。

設 $x_{i_0}^0$ 的增量为 θ ，基变量 x_j^0 的增量为 θ_j ，每个乙型片可以列出一个方程，故有 s 个方程。 $s+1$ 个增量，方程的列法如下：

某乙型片 T 若与 $x_{i_0}^0$ 不連接，則 T 就是一棵树，記 $J_i = \{j | x_{ij}^0 \in T\}$ ， $I_i = \{i | x_{ii}^0 \in T\}$ 。

令 $x_{ij}^1 = x_{ij}^0 + \theta_{ij}$ ($x_{ij}^0 \in T$)， $x_j^1 = x_j^0 + \theta_j$ (j 为 T 的所在列)

$$\sum_{j \in J_i} a_{ij} \theta_{ij} = 0 \quad (i \text{ 在 } T \text{ 的所在行}), \quad (12)$$

$$\sum_{i \in I_j} \theta_{ij} = \theta_j \quad (j \text{ 在 } T \text{ 的所在列}). \quad (13)$$

把树 T 相应的这些方程縮成一个方程的过程，是以 θ_j 为参变量逐步地部分解出 (12) 和 (13) 的过程。如先划去 T 的列連端点

(即行中只有这一个 T 的顶点), 因为由(12)可确定这些 θ_{ij} , 故可从未知增量所构成的树 T 中划去. 设划后 T 剩下的树 T_1 中有行連端点(即列中 T_1 的顶点只有一个)如 $x_{i_1 i_1}^0 x_{i_2 i_2}^0 \cdots x_{i_p i_p}^0$, 可由(13)得 $\theta_{i_i i_i} = \theta_{i_i}$ ($i = 1, \cdots, p$), 同样这些顶点从 T_1 中划去而得剩下的树 T_2 , T_2 也会产生行連端点如 $x_{i_{p+1} i_{p+1}}^0 \cdots x_{i_s i_s}^0$, 这些增量可由(12)和已确定的增量来确定, 故这些顶点也可划去而得树 T_3 , 如此继续进行下去必出现(一)或(二)的情形:

(一)缩成一棵树, 其所有顶点在同一行, 如第 i_* 行.

(二)缩成一棵树, 其所有顶点在同一列, 如第 j_* 列.

在(一)或(二)的情形都可根据(12)或(13)列出一个以 θ_j ($1 \leq j \leq s$) 为参变量的齐次方程.

若乙型片 T 与 $x_{i_0 j_0}^0$ 连接, $x_{i_0 j_0}^0$ 的增量 θ 可作为已知的参变量, 故 θ 在(12), (13)相应地出现外, 并不妨碍树 T 中未知增量 θ_{ij} 的确定, 用同样方法可把树 T 缩成一个方程, 以 θ 和 θ_j ($j=1, \cdots, s$) 为参变量, 因为有 s 个乙型片, 故有 s 棵树, 确定 s 个方程, 而有 θ 和 θ_j ($j=1, \cdots, s$) 等 $s+1$ 个变量, 因为(12), (13)的方程是相应于基的独立方程的一部分故也是独立的, 因此部分地解(12), (13)而剩下的 s 个方程也是独立的. 故有一个自由度, 能以 θ 为参变量地解出各增量的值, 如 $\theta_j = h_j \theta$, 从而可确定乙型片上的 $\theta_{ij} = h_{ij} \theta$. 在计算 θ 能增到多大时, 要考虑到每个甲型片, 即把(12), (13)中的 T 作为某甲型片, 类似地定义指标集和各增量, 即得 x_{ij}^0, y_{ki}^0 的增量 θ_{ij}, θ_{ki} 的(12)和(13)式. 而式中的 $\theta_j = h_j \theta$ 是已知的. 当甲型片与 $x_{i_0 j_0}^0$ 连接时可和乙型片与 $x_{i_0 j_0}^0$ 连接时同样方法来处理. 因方程都是独立的, 故这些增量也唯一确定并以 θ 为参变量. 甲型片若无閉迴路时是容易解出的. 若有閉迴路, 则在閉迴路上任取增量 $\theta_{i_1 j_1}$ 作已知, 再缩成一个变量的一个方程以确定 $\theta_{i_1 j_1}$ 的值(以 θ 为参变量), 因此所有基变量的增量都唯一确定为 $\theta_{ij} = h_{ij} \theta, \theta_{ki} = h_{ki} \theta, \theta_j = h_j \theta$ (其中 h_{ij}, h_j, h_{ki} 为常数). 而 θ 尽量增大时要保证所有变量是非负的, 即 $x_j^1 = x_j^0 + h_j \theta \geq 0, x_{ij}^1 = x_{ij}^0 + h_{ij} \theta \geq 0, y_{ki}^1 = y_{ki}^0 + h_{ki} \theta \geq 0$,