一阶橢圓型微分方程組与边值問題

及其在薄壳理論上的应用

依・湟・維庫阿著

高等教育出版社

一阶椭圓型微分方程組与边值問題及其在薄壳理論上的应用

依·涅·維庫阿著
中国科学院数学研究所
一室偏微分方程組譯

高等教育出版社

本書正文部分根据依·涅·維庫阿 (И. Н. Векуа)的論文 “Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к Теории оболочек” 翻譯。原文載在 “Математический сборник” Т. 31 №2 (1952) 上。这篇論文总結了著者多年来用复变函数研究一阶椭圆型微分方程組的成果，成为这一方向进一步發展的基础。

为了帮助讀者閱讀正文，譯者把一些需要的补充知識編成四个附录，另外还增加了“补充文献”。

本書讀者对象是高等学校高年級学生、研究生以及各研究机关有关偏微分方程、函数論、几何曲面論、彈性薄壳等方面的科学工作者，特別可作为高等学校数学力学系專門化課程教学参考書。

一阶椭圓型微分方程組
与边值問題
及其在薄壳理論上的应用

依·涅·維庫阿著

中国科学院数学研究所
一室偏微分方程組譯

高等教育出版社出版(北京宣武門内承恩寺7号)
(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)
京华印書局印装　新华書店發行

統一書号13010·735　开本850×1168 1/32　印張6 3/4
字数161,000　印数0001–5,500　定价(8)￥0.85
1960年2月第1版　1960年2月北京第1次印刷

中譯本序言

我国今天正处于"一天等于二十年"的时代，社会主义建設事業各方面都正在飞躍地發展。去年大躍进以来，数学面向实际之后，不断地从实际部門提出不少偏微分方程的新問題。形势要求数学工作者，特别是偏微分方程工作者的队伍迅速成長。解放十年来在党和政府的关怀下偏微分方程方面从过去的空白点發展到今天已有了一支不小的队伍，但無論从質或量的方面来講都还很差，特别是不能适应今天形势發展的需要，因此加速發展偏微分方程事業已成为我們重要任务之一。在这方面加强学習苏联并介紹苏联的成就是我們的重要措施。

本書的目的就是介紹苏联在偏微分方程方面的一个重要方向。本書的正文部分是苏联科学院依·涅·維庫阿院士在1952年發表在"苏联数学彙刊"第31卷第2期上的一篇总結性的文章，总結了作者多年来用复变函数方法研究一阶橢圓型微分方程組所取得的成果。这篇文章不仅有它自己的完整性，而且已成为这一方向进一步發展的基础。在这篇文章發表后作者本人及其学生們又得到了一系列的新結果（参見补充文献），把这一方向向前大大推进了一步，特别是应用这方面的成果来研究从微分几何曲面論中及薄壳無矩理論中所提出的一系列具有实际意义的問題。这些新的成就作者亦已相当完整地总結在他的新著"广义解析函数"一書中。这書的中譯本不久亦將由高等教育出版社出版与讀者見面。

在資本主义国家中亦有不少数学家从事于这一方向的工作。除作者已提到的外，我們还补充了一些新的文献附在补充文献中。

在翻譯本書时我們得到了北大数学力学系函数論教研組的大

力支援，他們曾研讀过本文，并备有中文講义。本書就是在北大的講义和我們自己的講义的基础上整理成的。为了力求翻譯正确和完整，我們曾进行过兩次仔細的校对。

为了使讀者研讀正文时减少困难，我們把一些需要的补充知識編写成四个附录。附录1主要是为正文第八节服务的，但其中§1的內容在正文前几节都要用到，因此在开始閱讀正文之前最好先看一下。附录2、3是为正文第三节服务的，而附录4是为第九节服务的。这些附录在研讀作者另一著作“广义解析函数”时同样有用。

中国科学院数学研究所一室偏微分方程組

一九五九年十二月十八日

目 录

中譯本序言 ……………………………………………………(vii)

§ 1. 引言 ……………………………………………………(1)

§ 2. $C_{\bar{z}}$ 类函数 ……………………………………………………(4)

1. 运算 $\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}}$ 的新定义 ……………………………………………………(4)
2. $C_{\bar{z}}$ 类函数的一般积分表达式 ……………………………………………………(6)
3. 奥斯特洛格拉斯基公式 ……………………………………………………(10)
4. $C_{\bar{z}}$ 类函数連續性的特征 ……………………………………………………(11)
5. 以解析函数来逼近 $C_{\bar{z}}$ 类的函数 ……………………………………………………(12)
6. $C_{\bar{z}}$ 类函数的乘积 ……………………………………………………(13)
7. $C_{\bar{z}}$ 类函数的比 ……………………………………………………(14)
8. 关于 $C_{\bar{z}}$ 类中的某些复合函数 ……………………………………………………(14)

§ 3. 方程組(1.1)的正則解和完全正則解及其一些性質 ……………………………………………………(15)

1. 定义 ……………………………………………………(15)
2. 关于正則解的零点 ……………………………………………………(17)
3. 关于正則解的一种表达式 ……………………………………………………(17)
4. 幅角原理 ……………………………………………………(19)
5. 基本引理 ……………………………………………………(19)

§ 4. 与二阶微分方程的連系．积分恒等式 ……………………………………………………(20)

1. 方程組(1.1)的标准形式 ……………………………………………………(20)
2. 区域的保角变换 ……………………………………………………(21)
3. 拉普拉斯算子概念的一种推广 ……………………………………………………(22)
4. 化成二阶微分方程 ……………………………………………………(25)
5. 一些积分恆等式 ……………………………………………………(26)
6. 化成二阶实微分方程 ……………………………………………………(28)
7. 关于一个积分的計算 ……………………………………………………(31)

§ 5. 正則解的一般表达式 ……………………………………………………(32)

1. 化成积分方程 ……………………………………………………(32)
2. 核和豫解式的性質 ……………………………………………………(35)
3. 相联方程和共軛方程的核与豫解式 ……………………………………………………(38)
4. 核的拓展 ……………………………………………………(39)
5. 核对区域的依賴性 ……………………………………………………(40)

6. 化成具有实未知函数的积分方程 ……………………(42)
§ 6. 广义柯西积分公式 ……………………(45)
1. 广义柯西公式的导出 ……………………(45)
2. 关于正則解的边界值 ……………………(46)
3. 相联方程和共軛方程的广义柯西公式 ……………………(47)
4. 广义柯西型积分 ……………………(47)
5. 关于正則解的連續拓展 ……………………(48)
§ 7. 正則解的一致逼近和級数展开……………………(49)
1. 完备特解系 ……………………(49)
2. 关于一个特解 ……………………(50)
3. 戴劳級数 ……………………(50)
4. 罗朗級数 ……………………(51)
5. 关于方程(7.2)的正則解序列的一致收歛定理……………………(52)
6. 致密性原理 ……………………(52)
7. 解对系数的稳定性 ……………………(55)
§ 8. 边值問題……………………(58)
1. 問題的提出 ……………………(58)
2. 化問題 A 为积分方程 ……………………(60)
3. 問題 A 的指数 ……………………(64)
4. 积分方程的指数 ……………………(64)
5. 負指数的情形($n<0$) ……………………(65)
6. 共軛边値問題 A_*……………………(67)
7. 計算齐次問題 $\mathring{A}$ 解的个数及非齐次問題 A 的可解条件的个数 ……………………(74)
8. 关于二阶橢圓型微分方程的"斜微商"問題 ……………………(75)
9. 直接化問題 A 为积分方程. 單連通区域($m=0$)及非負指数($n\geqslant 0$)的情形 ……………………(77)
10. 对于問題 A 解的实部的积分方程[在單連通域($m=0$)和非負指数($n\geqslant 0$)的情形] ……………………(83)
11. 关于解某些其他边界問題的附注 ……………………(85)
§ 9. 在彈性薄壳理論上的应用 ……………………(85)
1. 曲面理論的一些知識 ……………………(86)
2. 彈性薄壳無矩应力狀态的基本方程 ……………………(87)
3. 旋轉薄壳 ……………………(90)
4. 薄壳無矩应力狀态的边値問題 ……………………(94)
5. 單連通域的情形 ……………………(97)
6. 双連通域的情形($m=1$) ……………………(98)
7. 多連通域的情形($m>1$) ……………………(99)
§ 10. 解析系数的方程組 ……………………(100)

1. 一般說明 ……………………………………………………………………………………(100)
2. 共軛函数 ……………………………………………………………………………………(101)
3. 方程組(10.1)的复数形式及化成标准型 ………………………………………………(102)
4. 在單連通区域上解的一般表达式 ……………………………………………………(104)
5. 豫解式的基本性質 ……………………………………………………………………(109)
6. 在多連通区域上解的一般表达式 ……………………………………………………(111)
7. 基本解 ………………………………………………………………………………………(115)
8. 广义柯西积分公式及其推論 …………………………………………………………(123)
9. 关于正則解的零点 ………………………………………………………………………(124)

文献 ……………………………………………………………………………………………(125)

附录 1　奇異积分方程 ……………………………………………………………………(129)

附录 2　卡萊曼定理 ………………………………………………………………………(171)

附录 3　广义柯西-黎曼方程組的解的一个性質 ………………………………………(175)

附录 4　彈性薄壳理論的基本方程 ………………………………………………………(179)

本文是要研究方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}&=au+bv+f,\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}&=cu+dv+g\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

解的性質，主要是闡明解的函数構造并研究边值問題。本文將証明，單复变解析函数的一系列重要性質可推广到型为$U=u+iv$的函数类，其中u,v滿足方程組$(*)$。許多实际問題都化为$(*)$型的方程組。本文將指出它在彈性薄壳理論上的应用。預先看一下引言(§1)和§ 8.1可以对本文的內容有一个比較完整的了解。

§ 1. 引　　言

1. 本文研究的是形式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}&=a(x,y)u+b(x,y)v+f(x,y),\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}&=c(x,y)u+d(x,y)v+g(x,y),\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)$$

的微分方程組，其中a,b,c,d,f和g是变量x,y的已知函数。a,b,c,d称为方程組(1.1)的**系数**。f和g称为**自由項**。

本文主要研究的是1)方程組(1.1)的解的一般性質，2)形式为

$$\alpha u+\beta v=\gamma\qquad(1.2)$$

的边值問題，其中α,β,γ是給定在区域边界上的实函数，而且α和β不同时为0。

我們已經建立了方程組(1.1)的解和單复变解析函数之間結構上和性質上的緊密联系。还發現了單复变解析函数的許多性質对方程組(1.1)的解亦成立。应該指出，在馬•阿•拉甫倫捷夫(M.A•Лаврентьев)关于拟保角变换的研究工作([7]、[8])中就曾建立了由方程組(1.1)的某一类解所实現的平面域之間的映射和通常的保角变换有許多共同之处(再參看[9])。

对边值間題(1.2)我們获得了在一定的意义下的完善的結果。我們建立等价于这一間題的积分方程并指出它們的可解性的簡單判別法。我們的研究指出了，对于方程組(1.1)的边值間題(1.2)，所有的备擇定理(альтернативные теоремы)——它們对單复变解析函数类中的同样間題是成立的——仍然成立。

一般应該說，在方程組(1.1)的基础上建立了函数理論，它和基于柯西-黎曼方程組而建立起来的通常的复变函数論之間有許多共同之处。

应当指出，对滿足方程組(1.1)的函数类的研究有重要的实际意义，因为連續介質力学的許多間題都归結为这类方程組。下面我們要指出这方程組对弹性薄壳理論間題的应用。

在以前其他作者([10]、[11])曾研究过和更特殊形式的方程組相联系的函数理論。如貝尔斯(L. Bers)[10]研究了滿足方程組(再參看[12])①

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\sigma(x,y)\frac{\partial w}{\partial y},\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\sigma(x,y)\frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

的函数的性質。这个方程組在气体动力学和弹性力学中会遇到，它是(1.1)的特別情形。因为如果考虑函数 $v=\sigma w$，則方程組(1.3)

①在著作[10]的第二部分，作者把自己的某些結果推广到更一般的方程組上去。然而，这些重要的結果是在形式的和人为的結構帮助之下获得的(參考[33]和[34])。

变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial y}v,\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x}v.\end{aligned}\right\}$$

2. 如果把方程組(1.1)写成复数形式，則以后会表明，方程組(1.1)的研究將在很大程度上被減輕了。为此目的我們对(1.1)的第二式乘以 i 并加到第一式上，再利用符号

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1.4}$$

于是得一复变量的方程

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}=AU+B\bar{U}+F, \tag{1.5}$$

其中
$$U=u+iv,\qquad \bar{U}=u-iv; \tag{1.6}$$

$$A=\frac{1}{4}(a+d+ic-ib),\quad B=\frac{1}{4}(a-d+ic+ib),$$

$$F=\frac{1}{2}(f+ig). \tag{1.7}$$

不难看出，如果 U 是(1.5)的解，則它的实部和虛部將滿足(1.1)。

3. 通常在考察方程組(1.1)时，認为系数和自由項在某一域上是連續的，并要求 u, v 及其偏微商 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 在这域上連續。然而，正如我們在以后要看到的單是系数的連續性不足以保証 u, v 对 x, y 的偏微商的連續性。为了包括任意的連續系数的情形，我們应給出(1.1)的解的定义，这一定义不預先假定 u, v 的偏微商的連續性。方程組(1.1)的解的概念的这种推广的可能性是由它可表(1.5)的复形式所指出，因为它只要求 U 和 $\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$ 的連續性。但如果 $\frac{\partial U}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial U}{\partial y}$ 不是分别地都存在，則从上面

按公式（1.4）对运算$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$所作的定义，$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$的存在不是那么明显的。因此我們应給出运算$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$的另一种定义，它不預先假定偏微商$\frac{\partial U}{\partial x}$和$\frac{\partial U}{\partial y}$的存在。运算$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$的这种定义看来首先是龐貝(D. Pompeiu)[13]在1921年提出的。下面我們利用这一定义，并研究使运算$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$是連續的一类函数的某些基本性質。

§2 $C_{\bar{z}}$ 类 函 数

1. 运算$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$的新定义 設$U(z)=u+iv$是在域$T_0$上点$z=x+iy$的連續函数，它在$T_0$的內部有对$x,y$的一阶連續偏微商。則对任一以簡單而可求長的閉曲綫$L$为周界，并且整个包含在$T_0$內部的区域$T$，成立奥斯特洛格拉斯基公式

$$\iint\limits_T \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} dT = \frac{1}{2i}\int\limits_L U(t)dt. \tag{2.1}$$

此外，我們所定义的$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$暫且还是$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right)$.現在命曲綫$L$的長度減小，用任何方式收縮于一点$z=x+iy$，則从(2.1)得

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \lim_{L\to z}\frac{1}{2i\,|T|}\int\limits_L U(t)dt, \tag{2.2}$$

其中$|T|$表示区域T的面积，而$L\to z$是表示曲綫L長度減小，并用任意方式收縮于一点z。

等式(2.2)是在U对x,y有連續偏微商的假設下得出的。但可以發生这样的情况：这等式的右边可对于不具有对x和y的偏

微商的連續函数存在（这样的函数的例子將在下面給出）。

与前面一样假定函数 U 在区域 T_0 上連續，如果当任意的包含 z 点在其內部的可求長的閉曲綫 L 以任何方法收縮至 z 时①，等式(2.2)的右端存在同一的極限，則我們以等式(2.2)来定义在点 $z\in T_0$ 的 $\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$。

若 $\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$ 在 T_0 的每一点都存在且在 T_0 上連續，則称 U 是 $C_{\bar{z}}(T_0)$ 类的函数，这事实我們將記作 $U\in C_{\bar{z}}(T_0)$ 或簡單地記作 $U\in C_{\bar{z}}$。显然每一个在区域 T 上具有对 x,y 的一級連續偏微商的函数 U 屬于 $C_{\bar{z}}(T)$ 类。在此情况下，$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$ 可按公式(1.4)計算。

下面我們將会看到 $C_{\bar{z}}$ 类比 C^1 类广②，而比 C 类狹：$C(T)\supset C_{\bar{z}}(T)\supset C^1(T)$，而且 $C_{\bar{z}}(T)$ 是 $C(T)$ 的一个眞部分，$C^1(T)$ 是 $C_{\bar{z}}(T)$ 的一个眞部分。

現在由公式

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\overline{\frac{\partial \overline{U}}{\partial \bar{z}}} \tag{2.3}$$

定义运算 $\frac{\partial U}{\partial z}$，式中上面的一划表示取共軛的意思。从关系式(2.2)即得

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-\lim_{L\to z}\frac{1}{2i|T|}\int_L U(t)d\bar{t}. \tag{2.4}$$

若 $\frac{\partial U}{\partial z}$ 在 T 上存在且連續，則称 U 屬于 $C_z(T)$ 类。显然 $U\in C_z(T)$

---

①可以証明，当曲綫 L 收縮至 L 外的点 z 时，得到同样的極限（参看[14]）。

②符号 C^k 或 $C^k(T)$ 表在 T 上連續且对 x,y 有直到 k 阶在內的連續偏微商的函数类；$C^0(T)=C(T)$ 是所有在 T 上連續的函数类。

当且仅当$\bar{U}\in C_{\bar{z}}(T)$。因此今后只須研究函数类$C_{\bar{z}}(T)$的性質。

不难看出，如果U_1和U_2是$C_{\bar{z}}$类函数，則函数$c_1U_1+c_2U_2$也屬于$C_{\bar{z}}$类，式中c_1和c_2是任意复数。

2. $C_{\bar{z}}$ 类函数的一般积分表达式 显然，区域T上的每一个全純函数$f(z)$將是$C_{\bar{z}}$类的函数，根据柯西定理对此函数有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \quad (\text{在} T \text{上处处}). \tag{2.5}$$

容易証明它的逆命題：

如果函数$f(z)\in C_{\bar{z}}(T)$，并在T上滿足方程(2.5)，則$f(z)$是T上的全純函数。

$C_{\bar{z}}$类函数的一个十分重要的例子是：

$$U(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_T \frac{f(\xi,\eta)}{t-z}d\xi d\eta \quad (t=\xi+i\eta), \tag{2.6}$$

其中$f(x,y)$是T上的可积而且連續的函数。容易証明U在平面$z=x+iy$上到处連續，在$T+L$外部全純，并在無穷远处为0。現在証明$U\in C_{\bar{z}}(T)$。

我們可写成

$$U(z)=U_1(z)+U_2(z), \tag{2.7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} U_1(z)&=-\frac{1}{\pi}\iint_{T_1}\frac{f(\xi,\eta)}{t-z}d\xi d\eta,\\ U_2(z)&=-\frac{1}{\pi}\iint_{T_2}\frac{f(\xi,\eta)}{t-z}d\xi d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

T_1是T的任一子域，它以簡單的可求長的閉环路L_1为边界，而$T_2=T-T_1$。不难看出，U_1和U_2在全平面上連續且在無穷远处为0，而且U_1在T_1+L_1外全純，而U_2在L_1內全純。因此，由柯西定理得：

$$\frac{1}{2i|T_1|}\int_{L_1} U(z)\,dz =$$

$$=\frac{1}{2i|T_1|}\int_{L_1} U_1(z)\,dz+\frac{1}{2i|T_1|}\int_{L_1} U_2(z)dz=$$

$$=\frac{1}{2i|T_1|}\int_{L\infty} U_1(z)\,dz=\frac{1}{2i\pi|T_1|}\iint_{T_1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta\int_{L\infty}\frac{dz}{z-t}=$$

$$=\frac{1}{|T_1|}\iint_{T_1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{2.9}$$

其中 L_∞ 为半徑充分大的圓。在 (2.9) 式中取極限 $L_1 \to z$, 由于 $f(x,y)$的連續性得:

$$\lim_{L_1\to z}\frac{1}{2i|T_1|}\int_{L_1} U(z)dz=f(x,y),\ \text{即}\ \frac{\partial U}{\partial \bar z}=f(x,y). \tag{2.10}$$

这样,就証明了型如 (2.6) 的每一函数都屬于类 $C_{\bar z}(T)$。这一結論对于区域 T 是無穷的情况亦成立,只要求积分(2.6) 在 T 內一致收斂 (参看[16])。

不难看出

$$U(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_T\frac{f(\xi,\eta)d\xi d\eta}{t-z}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[\frac{2}{\pi}\iint_T f(\xi,\eta)\log|t-z|\,d\xi d\eta\right], \tag{2.11}$$

这兒 $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ 表示算子 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$。

如所週知,形如 (2.6) 的函数是并不总具有对 x,y 的偏微商的。若积分区域 T 包含原点,則对应于

$$f(x,y)=\frac{e^{2i\varphi}}{\log\frac{1}{r}},(re^{i\varphi}=z) \tag{2.12}$$

的(2.6)形式的函数就是一个例子。这样的函数在 $z=0$ 点沒有对 x,y 的偏导数。为了証明这一点,只須取 $|z|<R<1$ 作为区域 T,

则由簡單的計算就得(参看§4.7)：

$$U(x,y)=-\frac{1}{\pi}\iint_T\frac{e^{2i\varphi}\rho d\rho d\varphi}{(\rho e^{i\varphi}-z)\log\frac{1}{\rho}}=-2z\log\log\frac{1}{r}+$$

$$+2z\log\log\frac{1}{R}. \qquad (2.12_a)$$

由此得出

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}&=-2\log\log\frac{1}{r}-2\frac{e^{i\varphi}\cos\varphi}{\log r}+2\log\log\frac{1}{R},\\ \frac{\partial U}{\partial y}&=-2i\log\log\frac{1}{r}-2\frac{e^{i\varphi}\sin\varphi}{\log r}+2i\log\log\frac{1}{R}.\end{aligned}\right\}\qquad(2.12_б)$$

从这可清楚地看到$\frac{\partial U}{\partial x}$和$\frac{\partial U}{\partial y}$在坐标原点处都不存在(变成無穷大)。除此以外，容易求出

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \bar z}&=-\frac{e^{2i\varphi}}{\log r},\\ \frac{\partial U}{\partial z}&=-2\log\log\frac{1}{r}-\frac{1}{\log r}+2\log\log\frac{1}{R}.\end{aligned}\right\}\qquad(2.12_в)$$

由此可知$\frac{\partial U}{\partial \bar z}$在$T$内处处存在且連續，而$\frac{\partial U}{\partial z}$在点$z=0$变成無穷大。

所举的例子表明：1) $C_{\bar z}$ 类比 C^1 广，2) 一般說来 $C_{\bar z}$ 类的函数不屬于 C_z。

現在来証明下述定理：

定理 若

1) T 是一区域，它的边界 L 是由有限个無公共点的簡單的可求長的閉环路組成，

2) $U\in C_{\bar z}(T)$，且在 $T+L$ 上連續，

3) $\frac{\partial U}{\partial z}$ 在 T 上可积，

則

$$U(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{U(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{\pi}\iint_T \frac{\partial U}{\partial \bar t}\,\frac{d\xi d\eta}{t-z},\quad z\in T,\tag{2.13}$$

而且右边部分的二重积分一般說来应了解为非奇異的。

証明① 以 U_1 表(2.13)的右边部分

$$U_1(z)=\Phi(z)+U_0(z),\tag{2.14}$$

其中

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{U(t)}{t-z_0}\,dt,\tag{2.15$_1$}$$

$$U_0(z)=\frac{-1}{\pi}\iint_T \frac{\partial U}{\partial \bar t}\,\frac{d\xi d\eta}{t-z}.\tag{2.15$_2$}$$

我們应該証明 $U_1=U$。因为 $\Phi(z)$在 T 內全純，而 U_0 是 (2.6)型的函数$\left(\text{其中 } f=\frac{\partial U}{\partial \bar z}\right)$,所以有$\frac{\partial U_1}{\partial \bar z}=\frac{\partial U}{\partial \bar z}$。这就是說$U_1\in C_*(T)$和 $U-U_1=\Phi_0(z)$是 T 內的全純函数。設 L_n 是一多角形区域T_n的边界，L_n 和 T_n 都在 T 內。当 $z\in T_n$ 时，利用柯西公式及 (2.14)式有

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n}\frac{U(t)-U_1(t)}{t-z}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n}\frac{U(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n}\frac{U_1(t)}{t-z}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n}\frac{U(t)}{t-z}\,dt-\Phi(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n}\frac{U_0(t)}{t-z}\,dt.\tag{2.16}$$

把 U_0 写成下列形式：

$$U_0(z)=\frac{-1}{\pi}\iint_{T_n}\frac{\partial U}{\partial \bar t}\,\frac{d\xi d\eta}{t-z}-\frac{1}{\pi}\iint_{T-T_n}\frac{\partial U}{\partial \bar t}\,\frac{d\xi d\eta}{t-z}=U'+U'',$$

显然 U' 和 U'' 在 z 平面上处处連續，U'在 T_n+L_n 处全純且在

① 若認为$U\in C^1(T+L)$。則公式(2.13)的証明無大困难(例如，参看[13]，[17])。