面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

几何学引论

（下 册）

郑崇友 王智秋 王汇淳

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

几何学引论

（下 册）

郑崇友 王智秋 王汇淳

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部"高等师范教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果.作者们根据高等师范院校数学教育专业几何课程的教学基本要求、实际特点以及教学实践,经多次修改而成.为了使用方便,分上、下两册出版.上册包括几何基础、解析几何、微分几何三部分;下册包括射影几何、拓扑空间两部分,以及两个附录:预备知识——集合与映射、几何发展简史.

本书可作为高等师范院校数学教育专业几何课程的教科书,也可供其他有关专业使用.

图书在版编目(CIP)数据

几何学引论.下册/郑崇友主编;王智秋,王汇淳
—北京:高等教育出版社,2000
ISBN 7-04-008531-3

Ⅰ.几… Ⅱ.①郑…②王…③王… Ⅲ.几何基础 Ⅳ.0181

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第02624号

几何学引论(下册)
郑崇友　王智秋　王汇淳

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　本	787×960　1/16	版　次	2000年3月第1版
印　张	11	印　次	2000年3月第1次印刷
字　数	195 000	定　价	9.50元

《几何学引论》简明目录

目　录

第 4 部分　射影几何

射影几何是几何学的一个分支，它研究图形的射影性质，即经过射影变换不变的性质．在经典几何中，射影几何处于一种特殊地位，通过它可以把其它一些几何联系起来．本部分主要介绍射影(平面)几何的基本内容，即射影平面，射影平面上点的射影坐标，对偶原理，射影变换，射影平面上二次曲线的射影性质，以及 F. Klein(克莱因)关于几何学的变换群观点等．

第 1 章　射影平面

本章在欧氏(平面)几何基础上，通过引入无穷远元素扩充欧氏平面的方法给出射影平面的概念，建立射影平面上点的射影坐标与引入基本射影不变量——交比的概念．最后阐述射影几何所特有的对偶原理．

§1.1　拓广平面与其上点的齐次坐标

1. 欧氏平面的拓广

考察作为射影几何基础的中心射影概念，设 l,l' 是欧氏平面上两条不同的直线，O 是在此平面上但不在直线 l 与 l' 上的一点，对于直线 l 上的任意点 M，若直线 OM 交直线 l' 于 M' 点，则 M' 点称为直线 l 上点 M 在直线 l' 上的中心射影，点 O 称为射影中心，直线 OM 称为投射线．显然，若点 M' 是直线 l 上点 M 在直线 l' 上的中心射影，则 M 点是直线 l' 上点 M' 在直线 l 上的中心射影．但应该指出，若过射影中心 O 作直线 p 平行于直线 l' 交直线 l 于 P 点，则 P 点无中心射影．没有中心射影的点称为影消点．若过射影中心 O 作直线 q' 平行于直线 l 交直线 l' 于 Q' 点，则 Q' 点无中心射影，即 Q' 点也是影消点．总之，在此中心射影下，直线 l 与 l' 上都存在唯一一个没有对应点

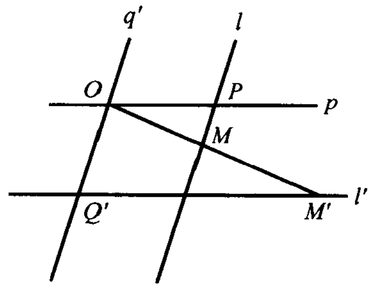

图 1.1.1

的影消点．所以，为了用中心射影方法建立两条相交直线上点之间的一一对应，必须在每一条直线上引进一个新点．如上所述，为了在中心射影下，直线 l 上点 P 有唯一对应点，则必须设想两条平行直线 p 与 l' 在无穷远处有唯一交点，记作 P'_∞；同样地，为使直线 l' 上 Q' 点有唯一对应点，则必须设想两条平行直线 q' 与 l 在无穷远处有唯一交点，记作 Q_∞，并且规定在此中心射影下，

$$P \mapsto P'_\infty,\ P'_\infty \mapsto P;\ Q' \mapsto Q_\infty,\ Q_\infty \mapsto Q'.$$

如此引入的点称为无穷远点(如图 1.1.1)．

定义 1.1.1　欧氏直线上引入无穷远点后称为拓广的欧氏直线，简称拓广直线．在欧氏平面上的每一条直线上引入无穷远点，所有无穷远点的集合，称为无穷远直线．欧氏平面上引入无穷远直线后称为拓广的欧氏平面，简称拓广平面．

为了区别起见，把拓广直线或拓广平面上的原有点称为拓广直线或拓广平面上的通常点．根据以上讨论，对于引入无穷远点作出如下规定：

(1) 在每条欧氏直线上引入唯一一个无穷远点；

(2) 在平行的欧氏直线上引入相同的无穷远点；

(3) 在不平行的欧氏直线上引入不同的无穷远点．

在欧氏直线上引入无穷远点，解决了中心射影下两条直线上点之间的一一对应问题．

为了行文方便，以后将拓广平面上的拓广直线简称为拓广平面上的直线．

2. 拓广平面与其上点的齐次坐标

定义 1.1.2　设 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ 为欧氏平面上仿射坐标系，对于有序三数组 $(x_1,x_2,x_3)\neq(0,0,0)$，若满足以下条件，则称为拓广平面上点的齐次(仿射)坐标：

(1) 若 $x_3\neq 0$，则 (x_1,x_2,x_3) 是仿射坐标为 $\left(\dfrac{x_1}{x_3},\dfrac{x_2}{x_3}\right)$ 的拓广平面上通常点的齐次坐标(此时，该点的仿射坐标也称为拓广平面上点的非齐次坐标)；

(2) 若 $x_3=0$，则 (x_1,x_2,x_3) 规定为拓广平面上无穷远点的齐次坐标；

(3) 若 $\rho\neq 0$，则 $(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3)$ 与 (x_1,x_2,x_3) 表示拓广平面上同一点的齐次坐标．

例如，仿射坐标为 $(3,-2)$ 的点 P 的齐次坐标可以表为 $(3,-2,1)$，$(9,-6,3)$，$(3\rho,-2\rho,\rho)(\rho\neq 0)$ 等，通常可取较简单的一组数作为代表．

因为拓广平面上无穷远点的齐次坐标 (x_1,x_2,x_3) 满足 $x_3=0$，齐次坐标满足 $x_3=0$ 的点都是无穷远点，所以拓广平面上无穷远直线的方程是

$$x_3=0. \tag{1.1.1}$$

在仿射坐标系下，欧氏平面上直线的方程为

$$Ax+By+C=0, \tag{1.1.2}$$

其中 A,B 为不全为零的实数,(x,y)表示直线上动点的仿射坐标．若直线上动点的坐标用齐次坐标表示,即令

$$x=\frac{x_1}{x_3},\qquad y=\frac{x_2}{x_3},$$

其中 $x_3\neq 0$,则(1.1.2)式可表示为

$$Ax_1+Bx_2+Cx_3=0\quad(A,B\text{ 不全为零}). \tag{1.1.3}$$

若在(1.1.3)式中去掉 $x_3\neq 0$ 的限制,即将无穷远点添加进去,则知

$$Ax_1+Bx_2+Cx_3=0\quad(A,B,C\text{ 不全为零}) \tag{1.1.4}$$

表示拓广平面上拓广直线的方程(关于点的齐次坐标),称为拓广直线的齐次坐标方程.

对于拓广平面上的拓广直线(1.1.4),其上无穷远点的齐次坐标应满足:

$$\begin{cases}Ax_1+Bx_2+Cx_3=0,\\ x_3=0.\end{cases}$$

所以拓广直线(1.1.4)上无穷远点的齐次坐标为

$$(B,-A,0).$$

注意到 $k=-\dfrac{A}{B}$ 可视为拓广直线(1.1.4)的方向数. 若 $B\neq 0$,则拓广直线(1.1.4)上无穷远点的齐次坐标可写成:

$$\left(1,-\frac{A}{B},0\right).$$

即方向数为 k 的拓广直线上无穷远点的齐次坐标为$(1,k,0)$. 若 $B=0$(即 $k=\infty$),则拓广直线(1.1.4)上无穷远点的齐次坐标可写为

$$(0,1,0).$$

综上讨论可知,方向数为 $k(k\neq\infty)$的拓广直线上无穷远点的齐次坐标为$(1,k,0)$;方向数为∞的拓广直线上无穷远点的齐次坐标为$(0,1,0)$. 所以,拓广直线的方向数与拓广直线上的无穷远点之间相互唯一确定.

例 1 设 P,Q,R 是拓广平面上的任意三点,则 P,Q,R 三点共线(即 P,Q,R 三点在同一条拓广直线上)的充分必要条件是这三点的齐次坐标(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3),(r_1,r_2,r_3)满足

$$\begin{vmatrix}p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}=0$$

(换言之,三点的齐次坐标线性相关).

证明 因为 P,Q,R 三点共线的充分必要条件是存在直线

$$Ax_1+Bx_2+Cx_3=0,$$

使得

$$\begin{cases}Ap_1+Bp_2+Cp_3=0,\\ Aq_1+Bq_2+Cq_3=0,\\ Ar_1+Br_2+Cr_3=0,\end{cases} \tag{1.1.4}$$

于是方程组(1.1.4)存在非零解的充分必要条件是其系数行列式

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}=0.$$

所以,拓广平面上三点共线的充分必要条件是它们的齐次坐标组成的行列式的值为零.

§1.2 射影平面与其上点的射影坐标

1. 射影平面

在欧氏平面上引入无穷远元素后,得到了拓广平面.在拓广平面上的无穷远元素与通常元素有着明显的差别. 为了消除拓广平面上的无穷远元素与通常元素之间的差别,以下引进射影平面的概念.

定义 1.2.1 在拓广平面上,若将其上的无穷远元素与通常元素不加区别,同等看待,则称拓广平面为射影平面. 若将拓广直线上的无穷远点与通常点不加区别,同等看待,则称这条拓广直线为射影直线. 射影平面上的射影直线简称为射影平面上的直线;射影平面上的点称为射影点(即通常点与无穷远点),简称为射影平面上的点.

显然,若在射影直线上指定一点作为无穷远点,其余点视为通常点,则这样的射影直线就是拓广直线. 若在拓广直线上去掉无穷远点,则得到欧氏直线. 若在射影平面上指定一条直线作为无穷远直线,其余直线视为通常直线,则这样的射影平面就是拓广平面.若在拓广平面上去掉无穷远直线,则得到欧氏平面.

为了理解射影平面的形象,以下给出射影平面的一个模型.

射影平面的模型可以如下方式给出,设在欧氏空间中给定一个以原点 O 为球心的球面,作规定如下:将球面上对径点粘合为一点,视为射影点,并将对径点粘合为一点的球面上大圆视为射影直线,则如此得到的图形 Ω 即为射影平面的一个模型.

在此模型 Ω 中,射影直线都是封闭的,并且任意两条射影直线都相交于一点. 此外,还可以将此射影平面的模型 Ω 与前面定义的拓广平面之间建立

一一对应关系. 事实上,任意取定与给定球面相切于一点的一个欧氏平面 π^*,并且添加上无穷远点使其成为拓广平面,记作 π,以球心 O 为射影中心建立此模型 Ω 到拓广平面 π 的中心射影,在此中心射影下,对于 Ω 上的射影点 M,即球面上的一对对径点 M_1 与 M_2,从球心 O 作通过 M_1,M_2 两点的(拓广)直线交拓广平面 π 于点 M',则点 M' 为 Ω 上的射影点 M 在拓广平面 π 上的对应点;对于将一对对径点视为射影点的球面上的任意大圆,即 Ω 上的射影直线,则对应于拓广平面 π 上的拓广直线. 特别地,由位于过球心 O,平行于 π^* 的欧氏平面上的球面大圆所决定的射影直线,则对应于拓广平面 π 上的无穷远直线. 这样,射影平面的模型 Ω 与拓广平面 π 之间就建立了一一对应关系.

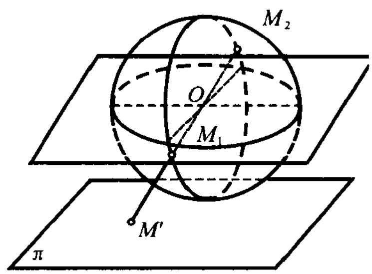

图 1.2.1

2. **射影坐标**

在射影平面上,若采用齐次(仿射)坐标,则可从坐标上区别出通常点与无穷远点,从方程上区别出通常直线与无穷远直线. 为了消除通常元素与无穷远元素之间的这种差别,必须在射影平面上引入另一种坐标.

设在拓广平面上任意给定一点 X,其齐次(仿射)坐标为 (x_1,x_2,x_3),则 (x_1,x_2,x_3) 可表示为

$$(x_1,x_2,x_3)=x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1). \tag{1.2.1}$$

因为(1.2.1)式中 $(1,0,0)$,$(0,1,0)$ 分别是欧氏平面上 x 轴,y 轴上的无穷远点,即 X_∞,Y_∞ 的齐次(仿射)坐标,$(0,0,1)$ 是原点的齐次(仿射)坐标,所以,拓广平面上点的齐次(仿射)坐标可视为该点关于 X_∞,Y_∞,O 三点的分解式(1.2.1)式中的有序三数组.

因为在拓广平面上成比例的不全为零的有序三数组表示同一点的齐次(仿射)坐标,于是 X_∞,Y_∞,O 三点的齐次(仿射)坐标可以分别表示为

$$(\rho_1,0,0),(0,\rho_2,0),(0,0,\rho_3),$$

其中 ρ_1,ρ_2,ρ_3 都不为零. 因此(1.2.1)分解式又可表示为

$$(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1}{\rho_1}(\rho_1,0,0)+\frac{x_2}{\rho_2}(0,\rho_2,0)+\frac{x_3}{\rho_3}(0,0,\rho_3), \tag{1.2.2}$$

其中 ρ_1,ρ_2,ρ_3 都不为零.

显然,(1.2.2)式中有序三数组 $\left(\frac{x_1}{\rho_1},\frac{x_2}{\rho_2},\frac{x_3}{\rho_3}\right)$ 是拓广平面上点 X 的齐次(仿射)坐标 (x_1,x_2,x_3) 的充分必要条件是

$$\rho_1=\rho_2=\rho_3\neq 0.$$

这相当于适当地限制 X_∞, Y_∞, O 三点的齐次(仿射)坐标有序三数组取法的随意性. 因为

$$(\rho_1,\rho_2,\rho_3)=(\rho_1,0,0)+(0,\rho_2,0)+(0,0,\rho_3),$$

所以为了使得 $\rho_1=\rho_2=\rho_3$,只要限定(ρ_1,ρ_2,ρ_3)与$(1,1,1)$为拓广平面上同一点的齐次(仿射)坐标即可.

据此,在拓广平面上建立点的齐次(仿射)坐标的基础上,可以引进射影平面上点的射影坐标的概念.

定义 1.2.2 设在射影平面上任意取定不共线的三点 P,Q,R,以及不在 P,Q,R 三点中任意两点连线上一点 E,记 P,Q,R,E 四点(在拓广平面上)的齐次(仿射)坐标分别为:

$$(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3),(r_1,r_2,r_3),(e_1,e_2,e_3),$$

并且要求满足

$$(e_1,e_2,e_3)=(p_1,p_2,p_3)+(q_1,q_2,q_3)+(r_1,r_2,r_3), \tag{1.2.3}$$

则称此四点 P,Q,R 与 E 构成的系统为一个射影坐标系,记作$[P,Q,R;E]$,简记为 Δ. P,Q,R 三点都称为基点,E 点称为单位点,三点形 PQR 称为坐标三点形(三点形的定义见 1.4.6).

对于射影平面上的任意点 X,若点 X(在拓广平面上)的齐次(仿射)坐标(x_1^*,x_2^*,x_3^*)关于 P,Q,R 三基点的分解式为

$$(x_1^*,x_2^*,x_3^*)=x_1(p_1,p_2,p_3)+x_2(q_1,q_2,q_3)+x_3(r_1,r_2,r_3),$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \tag{1.2.4}$$

其中

$$M=\begin{pmatrix}p_1 & q_1 & r_1\\p_2 & q_2 & r_2\\p_3 & q_3 & r_3\end{pmatrix},$$

则有序三数组 x_1,x_2,x_3 称为射影平面上点 X 关于射影坐标系 Δ 的射影坐标,简称坐标,记作 $X=(x_1,x_2,x_3)$或 $X(x_1,x_2,x_3)$.

根据(1.2.4)式,可得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{pmatrix}, \tag{1.2.5}$$

其中 M^{-1}为 M 的逆矩阵．所以，根据(1.2.5)式可以求出射影点 X 的射影坐标. 根据定义 1.2.2 可知，三基点 P,Q,R 与单位点 E 关于射影坐标系 Δ 的射影坐标分别为 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$，和$(1,1,1)$.

根据射影坐标定义，可知射影平面上点的射影坐标也具有齐次坐标的特点，即射影平面上点的射影坐标是不全为零的有序三数组，成比例的有序三数组表示同一点的射影坐标；同一点的任意两组射影坐标成比例.

显然，在一般的射影坐标系下，不可能从射影平面上一点的射影坐标中的第 3 个坐标是否为零来判定该点是无穷远点还是通常点. 换言之，对于射影坐标，射影平面上的一切点都是平等的，无穷远点与通常点的差别完全消除.

根据定义 1.2.2 可知，拓广平面上点的齐次坐标也是一种射影坐标. 事实上，在射影平面上取定四点 P_∞,Q_∞,O,E 使得这四点的齐次(仿射)坐标分别为

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1),$$

则此四点 P_∞,Q_∞,O,E 构成射影平面上射影坐标系$[P_\infty,Q_\infty,O;E]$，称为射影平面上齐次仿射坐标系，简记作 Δ^*．显然，射影平面上任意点的齐次(仿射)坐标就是该点关于射影平面上齐次仿射坐标系 Δ^* 的射影坐标.

注 为了说明定义 1.2.2 的合理性，必须证明分解式(1.2.3)的存在唯一性. 换言之，设在射影平面上任意给定不共线三点 P,Q,R，以及不在 P,Q,R 三点中任意两点连线上一点 E，则对于点 E 任意取定的一组齐次(仿射)坐标，P,Q,R 三点分别存在唯一一组齐次(仿射)坐标

$$(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3),(r_1,r_2,r_3),$$

使得(1.2.3)式成立，即

$$(e_1,e_2,e_3)=(p_1,p_2,p_3)+(q_1,q_2,q_3)+(r_1,r_2,r_3).$$

证明 存在性：任意取定 P,Q,R 三点的齐次(仿射)坐标，设分别是

$$(p_1^*,p_2^*,p_3^*),(q_1^*,q_2^*,q_3^*),(r_1^*,r_2^*,r_3^*).$$

因为 P,Q,R,E 四点中任意三点不共线，于是

$$(e_1,e_2,e_3)=\lambda(p_1^*,p_2^*,p_3^*)+\mu(q_1^*,q_2^*,q_3^*)+\sigma(r_1^*,r_2^*,r_3^*),$$

其中 λ,μ,σ 都不为零. 取

$$(p_1,p_2,p_3)=(\lambda p_1^*,\lambda p_2^*,\lambda p_3^*),$$
$$(q_1,q_2,q_3)=(\mu q_1^*,\mu q_2^*,\mu q_3^*),$$
$$(r_1,r_2,r_3)=(\sigma r_1^*,\sigma r_2^*,\sigma r_3^*),$$

则$(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3),(r_1,r_2,r_3)$分别是 P,Q,R 三点的齐次(仿射)坐标，并且满足(1.2.3)式，即

$$(e_1,e_2,e_3)=(p_1,p_2,p_3)+(q_1,q_2,q_3)+(r_1,r_2,r_3).$$

唯一性：若 P,Q,R 三点分别存在齐次(仿射)坐标 (p_1',p_2',p_3')，(q_1',q_2',q_3')，(r_1',r_2',r_3') 使得

$$(e_1,e_2,e_3)=(p_1',p_2',p_3')+(q_1',q_2',q_3')+(r_1',r_2',r_3'),$$

则与存在性证明中 (e_1,e_2,e_3) 的分解式比较可知

$$\begin{aligned}&(p_1',p_2',p_3')+(q_1',q_2',q_3')+(r_1',r_2',r_3')\\&\quad=(p_1,p_2,p_3)+(q_1,q_2,q_3)+(r_1,r_2,r_3).\end{aligned}$$

但是 (p_1,p_2,p_3) 与 (p_1',p_2',p_3')，(q_1,q_2,q_3) 与 (q_1',q_2',q_3')，(r_1,r_2,r_3) 与 (r_1',r_2',r_3') 分别是同一点 P,Q,R 的齐次(仿射)坐标，从而可得

$$\begin{aligned}(p_1',p_2',p_3')&=\lambda'(p_1,p_2,p_3),\\(q_1',q_2',q_3')&=\mu'(q_1,q_2,q_3),\\(r_1',r_2',r_3')&=\sigma'(r_1,r_2,r_3).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&(1-\lambda')(p_1,p_2,p_3)+(1-\mu')(q_1,q_2,q_3)\\&\quad+(1-\sigma')(r_1,r_2,r_3)=(0,0,0)\end{aligned}$$

但是 P,Q,R 三点不共线，所以

$$\lambda'=\mu'=\sigma'=1.$$

即

$$\begin{aligned}(p_1',p_2',p_3')&=(p_1,p_2,p_3),\\(q_1',q_2',q_3')&=(q_1,q_2,q_3),\\(r_1',r_2',r_3')&=(r_1,r_2,r_3).\end{aligned}$$

例1 设在射影平面上给定一个射影坐标系 $\Delta=[P,Q,R;E]$，其中 P,Q,R,E 四点的齐次(仿射)坐标分别为

$$(-2,0,3),(1,-1,2),(0,3,2),(7,0,2).$$

试求射影平面上 A,B 两点的射影坐标，其中 A,B 两点的齐次(仿射)坐标分别是

$$(2,-15,12),(-3,12,0).$$

解 因为 E 点的齐次(仿射)坐标

$$(7,0,2)=(-2)(-2,0,3)+3(1,-1,2)+1(0,3,2),$$

于是应取 P,Q,R 三点的齐次(仿射)坐标分别为

$$(4,0,-6),(3,-3,6),(0,3,2).$$

记

$$M=\begin{pmatrix}4&3&0\\0&-3&3\\-6&6&2\end{pmatrix},$$

则得射影平面上任意点 X 的齐次(仿射)坐标(x_1^*,x_2^*,x_3^*)关于 P,Q,R 三基点的分解式：

$$\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

其中(x_1,x_2,x_3)表示点 X 关于射影坐标系 Δ 的射影坐标．所以得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{pmatrix},$$

其中 M 的逆矩阵

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{25}&\frac{1}{25}&-\frac{3}{50}\\\frac{3}{25}&-\frac{4}{75}&\frac{2}{25}\\\frac{3}{25}&\frac{7}{25}&\frac{2}{25}\end{pmatrix}.$$

将 A,B 两点的齐次(仿射)坐标$(2,-15,12)$，$(-3,12,0)$分别代入上式，则得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{25}&\frac{1}{25}&-\frac{3}{50}\\\frac{3}{25}&-\frac{4}{75}&\frac{2}{25}\\\frac{3}{25}&\frac{7}{25}&\frac{2}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-15\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{25}&\frac{1}{25}&-\frac{3}{50}\\\frac{3}{25}&-\frac{4}{75}&\frac{2}{25}\\\frac{3}{25}&\frac{7}{25}&\frac{2}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\12\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

所以 A,B 两点关于射影坐标系 Δ 的射影坐标分别是

$$(-1,2,-3),(0,-1,3).$$

3. 射影直线的射影坐标方程

设在射影平面上任意取定一个射影坐标系 $\Delta=[P,Q,R;E]$，对于射影平面上的任意一点 X，记 X 点的齐次(仿射)坐标为(x_1^*,x_2^*,x_3^*)，于是(x_1^*,x_2^*,x_3^*)关于射影坐标系 Δ 的三基点 P,Q,R 的分解式为

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{1.2.6}$$

对于射影平面上的任意一条射影直线，设其齐次(仿射)坐标方程为

$$Ax_1^* + Bx_2^* + Cx_3^* = 0, \tag{1.2.7}$$

其中 A,B,C 不全为零，(x_1^*, x_2^*, x_3^*)表示动点的齐次(仿射)坐标，将(1.2.6)式代入(1.2.7)式(注意成比例的有序三数组表示同一点的齐次(仿射)坐标)，则得

$$A'x_1 + B'x_2 + C'x_3 = 0, \tag{1.2.8}$$

其中

$$A' = p_1A + p_2B + p_3C,$$
$$B' = q_1A + q_2B + q_3C,$$
$$C' = r_1A + r_2B + r_3C.$$

显然 A',B',C' 不全为零，所以(1.2.8)式是射影平面上给定射影直线在射影坐标系 Δ 下的方程，它是一次齐次方程. 反之，设在射影坐标系 Δ 下任意给定形如(1.2.8)式的一次齐次方程，则通过(1.2.6)式的逆作用后可得形如(1.2.7)式的一次齐次方程. 所以(1.2.8)式表示射影平面上的一条射影直线.

综上所述，可得以下定理

定理 1.2.3　在射影平面上的射影坐标系下，射影平面上射影直线的方程是三元一次齐次方程；反之，任意三元一次齐次方程表示射影平面上的一条射影直线.

在射影平面上任意取定一个射影坐标系 $\Delta=[A_1,A_2,A_3;E]$，设 P 与 Q 是射影平面上的两个不同点，P,Q 两点关于射影坐标系 Δ 的射影坐标分别为

$$(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3),$$

则用§1.1中例1的方法可知，点 X 与 P,Q 两点共线的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0,$$

其中(x_1,x_2,x_3)为点 X 在射影坐标系 Δ 下的射影坐标. 所以

$$(x_1,x_2,x_3) = \lambda(p_1,p_2,p_3) + \mu(q_1,q_2,q_3) \tag{1.2.9}$$

简记作

$$X = \lambda P + \mu Q, \tag{1.2.10}$$

其中 λ,μ 是不全为零的实数，称为由 P,Q 两点确定的射影直线的参数方程，(λ,μ)称为齐次参数.

在(1.2.10)式中,若$\lambda\neq 0$,则令$\rho=\frac{\mu}{\lambda}$;若$\lambda=0$,则规定$\rho=\infty$. 于是(1.2.10)式可表示为

$$X=P+\rho Q. \tag{1.2.11}$$

此时,当$\rho=\infty$时,(1.2.11)式表示Q点. 所以,(1.2.11)式是以ρ表示的射影直线的参数方程,ρ称为非齐次参数.

4. **点列上点的射影坐标**

对于射影平面上的一条直线,其上全体点的集合称为点列,这条直线称为点列的底.

在射影平面上任意取定一个射影坐标系,对于给定的一个点列Ω,在其上取定P,Q,E三点,并且选定它们的射影坐标(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3),(e_1,e_2,e_3),使得

$$(e_1,e_2,e_3)=(p_1,p_2,p_3)+(q_1,q_2,q_3), \tag{1.2.12}$$

则$\Delta=[P,Q;E]$称为点列Ω上的一个射影坐标系,其中P,Q两点都称为基点,E称为单位点,于是对于点列Ω上任意点X,X点的射影坐标可以表示为

$$(x_1,x_2,x_3)=\lambda(p_1,p_2,p_3)+\mu(q_1,q_2,q_3), \tag{1.2.13}$$

或简记作

$$X=\lambda P+\mu Q. \tag{1.2.14}$$

(1.2.13)式或(1.2.14)式中有序数组(λ,μ)称为点X关于点列Ω上射影坐标系$\Delta=[P,Q;E]$的射影坐标,简称坐标. 根据上述定义,显然P,Q,与E三点关于点列Ω上射影坐标系$\Delta=[P,Q;E]$的射影坐标分别为$(1,0)$,$(0,1)$和$(1,1)$.

根据射影平面上点的射影坐标的齐次性和(1.2.13)式或(1.2.14)式不难证明,此处定义的点列Ω中点X(关于射影坐标系$\Delta=[P,Q;E]$)的射影坐标(λ,μ)也是一种齐次坐标. 因此,(λ,μ)也称为点列Ω中点的齐次坐标.

沿用从(1.2.10)式得到(1.2.11)式的方法,可将(1.2.14)式表示为

$$X=\rho P+Q. \tag{1.2.15}$$

其中$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$,并且约定$\rho=\infty$时,(1.2.15)式表示P点,则ρ称为点X关于点列Ω中射影坐标系$\Delta=[P,Q;E]$的非齐次射影坐标,简称非齐次坐标. 显然,P,Q与E三点关于点列Ω上射影坐标系Δ的非齐次射影坐标分别为∞,0和1.

比较(1.2.10)式和(1.2.14)式可知,只要在(1.2.10)式中固定P,Q两点的一组射影坐标,则有序参数组(λ,μ)就是此点列中点关于点列上某一确定射影坐标系的射影坐标,其中单位点就是以取定两点的射影坐标之和为射影坐