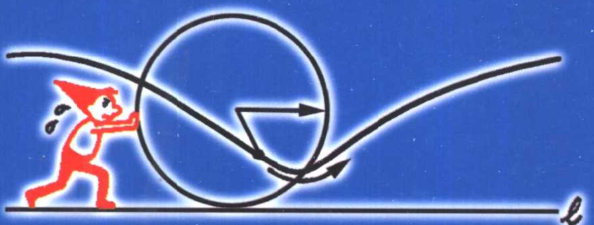
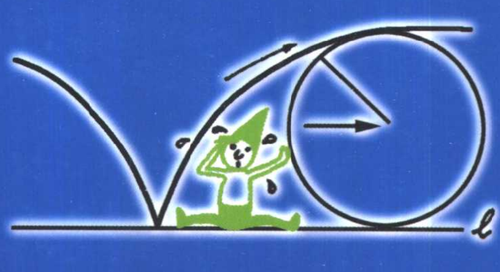
高中

数学解题方法全书

杨象富　陈振宣主编





上海远东出版社

高中
数学解题方法全书

杨象富 陈振宣 主编

上海遠東出版社

高中数学解题方法全书

主　　编/ 杨象富　陈振宣

责任编辑/ 汪维范
装帧设计/ 董于至
责任制作/ 晏恒全

出　　版/ 上海远东出版社
　　　　(200336)　中国上海市仙霞路 357 号
网　　址/ http://www.ydbook.com
发　　行/ 新华书店 上海发行所
　　　　上海远东出版社
排　　版/ 南京展望照排印刷有限公司
印　　刷/ 商务印书馆上海印刷股份有限公司
装　　订/ 上海望新印刷厂

版　　次/ 2001 年 12 月第 2 版
印　　次/ 2001 年 12 月第 1 次
开　　本/ 890×1240　1/32
字　　数/ 510 千字
印　　张/ 15.125
印　　数/ 1—6 000

ISBN 7—80661—511—3
G·196　定价：20.00 元

前　言

数学家、哲学家、方法论大师笛卡儿有言“最有价值的知识是关于方法的知识”. 自 20 世纪 80 年代以来，对数学思想方法的探索，波利亚三部经典著作的传播，在广大数学教育工作者的共同研讨和努力实践中，形成重视数学思想方法教育的共识. 我们在学习波利亚著作与长期教育科研的实践中，初步摸索到培养数学思维能力的一些粗浅认识，提出了

$$\boxed{\text{数学知识与数学语言}}$$
$$\times\boxed{\text{数学思维方法}}$$
$$\times\boxed{\text{情感智力}}$$
$$=\boxed{\text{数学思维能力}}$$

倡导跳出“题海”走“以少御多”之路. 并以此作指导思想编写了《中国中学生数学解题方法大全》初中和高中卷，两册共发行了二十余万册，深受读者欢迎.

由于高中新大纲、新教材将 2001 年秋全国大部分地区推广. 新教材增加了许多新内容，特别是新大纲首次将“内容、思想、方法和语言”并列，第一次将数学思想方法写进数学目的，都进一步坚定了我们的改革信念. 鉴于高考、中考命题改革的深入，提出了命题的新的指导思想

与理论．为了更好地贯彻中央深化素质教育的指示，对全书作了较大较深的改写．特别是在参考了国内外大量资料的基础上，花了很大心力，对高中增加了：逻辑初步知识、平面向量、概率统计、微积分初步等内容．初、高中都增加近五年来高考、中考的新试题、探究题、实际应用题、趣味题．初中全面改写了第二编，标题为“数学的思想、美妙、应用和学法”，由12组共50余篇相当引人入胜的数学千字文组成．希望能为数学教育改革略尽绵薄，并有助于读者数学思维能力的提高．限于作者水平，错误不当之处，热诚欢迎广大读者、专家指正．

参加高中卷改写的除主编外，还有柴盛楣（特级）、胡庆彪（特级）、贝跃敏、潘亚奎、项宁、胡明华、陈永箴、唐惠康、张文娟、章志强、钟群、张莉萍、范人伊、陈永莉．

陈振宣、杨象富

2001年8月

目录

第一编　基础知识、基本方法

代数

解析几何

第二编　常用的数学思维方法

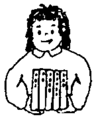
第一编

基础知识、基本方法

代 数

第1章 集合与简易逻辑

一、集 合



知识与方法提要

1. 集合的基本概念

某些指定的对象集在一起就成为一个集合，集合中的每个对象叫做这个集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，记作 $a\in A$. 不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$.

集合可分为有限集与无限集. 集合的表示法可用列举法、描述法以及图示法.

常见数集：**N**(自然数集)、**Z**(整数集)、**Q**(有理数集)、**R**(实数集).

2. 集合与集合的关系

对于两个集合 A 与 B，如果 A 的任何一个元素都是 B 的元素，就说集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$，此时也说 A 是 B 的子集.

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，那么 $A=B$.

补集：如果 $A\subseteq S$，那么 A 在 S 中的补集

$$\complement_S A=\{x\mid x\in S,\text{且 } x\notin A\}.$$

全集：如果一个集合含有要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，全集通常用 U 表示.

交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}$.

并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或 } x\in B\}$.

3. 不等式的解法

含绝对值的不等式

$|x|<a\ (a>0)$的解集是$\{x|-a<x<a\}$;

$|x|>a\ (a>0)$的解集是$\{x|x<-a$,或$x>a\}$.

一元二次不等式$ax^2+bx+c>0\ (a>0)$的解集:

当$\Delta>0$时,解集为$\{x\mid x<x_1$,或$x>x_2\}\ (x_1<x_2)$;当$\Delta=0$时,解集为$\{x\mid x\in \mathbf{R}$,且$x\neq-\dfrac{b}{2a}\}$;当$\Delta<0$时,解集为$\mathbf{R}$.

一元二次不等式$ax^2+bx+c<0\ (a>0)$的解集:

当$\Delta>0$时,解集为$\{x\mid x_1<x<x_2\}$;当$\Delta\leqslant 0$时,解集为$\varnothing$.

范 例

例1 写出下面集合中的元素:

(1) {英文元音字母};

(2) {既是质数又是偶数的整数};

(3) {大于 10 而小于 20 的合数};

(4) {小于 59 而能被 9 整除的自然数};

(5) {方程$x(x-1)(x+1)=x(x+1)(x+2)$的解}.

解 (1) a,e,i,o,u;　　(2) 2;

(3) 12,14,15,16,18;　　(4) 0,9,18,27,36,45,54;

(5) 0,−1.

说明 对(2),不能认为凡是偶数都不会是质数;

(5)中的方程即$x(x+1)[(x-1)-(x+2)]=0$,也就是$-3x(x+1)=0$,故$x=0,-1$.

例2 用列举法表示下列集合:

(1) $\{(x,y)\mid x+y=5,\ x\in\mathbf{N}^*,\ y\in\mathbf{N}^*\}$;

(2) $\{(x,y)\mid y=x^2-1,\ |x|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{Z}\}$.

分析 这里的元素是有序数对(x,y),可理解为直角坐标平面上点的坐标.因此,如果$a\neq b$,则(a,b)与(b,a)是不同的元素.

解 (1) 因为 x、y 都是正整数，而 $1+4=5=2+3$，故集合(1)即 $\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$；

(2) $\because |x|\leqslant 2$, $x\in \mathbf{Z}$, $\therefore x=0,\pm 1,\pm 2$，相应的 $y=-1,0,3$，故集合(2)即 $\{(0,-1),(1,0),(-1,0),(2,3),(-2,3)\}$.

例 3 用适当的符号，表示下列元素与集合，或集合与集合的关系：

(1) 0 与 $\{0\}$；　　(2) 0 与 $\varnothing$；　　(3) $\varnothing$ 与 $\{0\}$；

(4) $\{0,1\}$ 与 $\{(0,1)\}$；　　(5) $\{(a,b)\}$ 与 $\{(b,a)\}$.

分析 首先要分清是"元素与集合"的关系，还是"集合与集合"的关系. 是后者又要辨别两集合的元素是否相同.

解 (1) $\{0\}$ 是含单元素 0 的集合，0 与 $\{0\}$ 的关系是"属于与否"的关系，所以 $0\in\{0\}$；

(2) 空集 $\varnothing$ 不含任何元素，所以 $0\notin\varnothing$；

(3) 集合 $\varnothing$ 与 $\{0\}$ 的元素不同，所以 $\varnothing\neq\{0\}$；

(4) $\{0,1\}$ 是含两个元素 0 与 1 的集合，而 $\{(0,1)\}$ 是以"有序数对"为元素的单元素 $(0,1)$ 的集合，所以 $\{0,1\}\neq\{(0,1)\}$；

(5) 当 $a=b$ 时，$\{(a,b)\}=\{(b,a)\}$；

当 $a\neq b$ 时，$\{(a,b)\}\neq\{(b,a)\}$.

说明 空集是重要的特殊集合，值得重视. (5)中的 $a=b$ 是可能出现的特殊情况，不可不考虑到.

例 4 设 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，且 $A=\{|a+7|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求 a 的值.

解 根据补集的意义，应有

$$\begin{cases}|a+7|=3,\\ a^2+2a-3=5.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=-4 \text{ 或 } -10,\\ a=-4 \text{ 或 } 2.\end{cases}$$

$\therefore a=-4$.

例 5 已知元素 $(1,2)\in(A\cap B)$，$A=\{(x,y)\mid y^2=ax+b\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-ay-b=0\}$，求 a,b 之值.

分析 按题意，$x=1$，$y=2$ 满足 $y^2=ax+b$，$x^2-ay-b=0$.

解 $\begin{cases}4=a+b,\\ 1-2a-b=0,\end{cases}$　即 $\begin{cases}a+b=4,\\ 2a+b=1.\end{cases}$

$\therefore a=3,\ b=1$.

例6 (选择题)集合 $P=\{s \mid s=x^2+3x+1\}$，$T=\{t \mid t=y^2-3y+1\}$ 之间的关系是 (　　).

A. $P\cap T=\varnothing$　　　　B. $P\cup T=\left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$

C. $P\cap T=\{0\}$　　　　D. $P=T$

分析 集合 P,T 的元素分别为 s,t,而不是 x,y.

解 $\because s=x^2+3x+1=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}\geqslant-\dfrac{5}{4}$,

$\therefore P=\left\{s\,\middle|\,s\geqslant-\dfrac{5}{4}\right\}$.

$\because t=y^2-3y+1=\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}\geqslant-\dfrac{5}{4}$,

$\therefore T=\left\{t\,\middle|\,t\geqslant-\dfrac{5}{4}\right\}$.

$\therefore P=T$, 选 D.

例7 设集合 A,B 都是全集 $U=\{1,2,3,4\}$ 的子集,已知 $(\complement_U A)\cap B=\{1\}$，$A\cap B=\{3\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2\}$,求 $\complement_U(A\cup B)$.

分析 本题涉及集合 A,B 及其补集、交集和并集,关系比较复杂,可借助图形来表示和考虑.

解 如图 1－1,用方框表示全集 U,用两条封闭曲线分别表示集合 A 与 B.

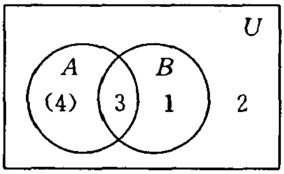


图 1－1

由 $(\complement_U A)\cap B=\{1\}$,就在 A 之外 B 之内填上 1;由 $A\cap B=\{3\}$,就在 A,B 的公共部分填上 3;又由 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2\}$,就在 A 与 B 之外,方框之内填上 2.

已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$,因此应在 A 之内 B 之外填写 4. 由此,从图上可知 $A\cup B=\{1,3,4\}$,从而 $\complement_U(A\cup B)=\{2\}$.

说明 1. 用来说明各个集合之间关系的图叫做韦恩图.

“画出韦恩图”是解本题的关键和诀窍.

“一图抵百语”,韦恩图常常可以帮助我们直观地理解某些关系,也有利于记忆和思考问题,值得重视.

2. 从本题我们发现：

$$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B).$$

例 8 设关于 x 的方程 $x^2+px-12=0$，$x^2+qx+r=0$ 的解集分别为 A，B，且 $A\neq B$，$A\cup B=\{-3,4\}$，$A\cap B=\{-3\}$，求 p,q,r 的值.

解 由 $A\cap B=\{-3\}$，可知方程 $x^2+px-12=0$ 有根 -3，故有 $(-3)^2-3p-12=0$，即 $3p=-3$，$\therefore p=-1$，此时

$A=\{x\mid x^2-x-12=0\}$，即 $A=\{-3,4\}$.

又由 $A\neq B$，$A\cup B=\{-3,4\}$，$A\cap B=\{-3\}$，可知方程 $x^2+qx+r=0$ 只能有重根 -3，即这个方程为 $(x+3)^2=0$，亦即 $x^2+6x+9=0$，故 $q=6$，$r=9$.

$\therefore p=-1$，$q=6$，$r=9$.

例 9 设 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+2=0\}$，若 $A\cup B=A$，求由 a 的值组成的集合.

解 由 $A\cup B=A$，可知 $B\subseteq A$，

而 $A=\{1,2\}$，故 B 可为 $\{1,2\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，或 $\varnothing$.

当 $B=\{1,2\}=A$ 时，显然有 $a=3$.

当 $B=\{1\}$，$\{2\}$，或 $\varnothing$ 时，方程 $x^2-ax+2=0$ 有等根或无实根，故 $\Delta\leqslant 0$，即 $a^2-8\leqslant 0$.

解得 $-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$.

但 $a=\pm 2\sqrt{2}$ 时，得出 $B=\{-\sqrt{2}\}$ 或 $\{\sqrt{2}\}$，不能满足 $B\subseteq A$. 故所求 a 值的集合为 $\{3\}\cup\{a\mid -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}\}$.

说明 解答本题的常见错误是：

(1) 未能通过检验剔除 $a=\pm 2\sqrt{2}$，(2) 遗漏 $B=\varnothing$ 的情况.

空集有许多特殊的性质，在解题时宜特别留心，如：

$\varnothing\cup A=A$，$\varnothing\cap A=\varnothing$，$\varnothing\subseteq A$，$\varnothing\subseteq(A\cap B)$，

$\varnothing=A\cap(\complement_U A)$，$\varnothing=\complement_U U$，$\complement_U\varnothing=U$.

在进行集合的运算时，空集是必不可少的，其作用可以与数值计算中数 0 的作用类比，值得重视.

例 10 解下列不等式：

(1) $\dfrac{|x|}{2}>1$；　　(2) $\dfrac{1}{|x|}>2$；　　(3) $|2x|-3<|x|$.

解 (1) 两边同乘以 2,得 $|x|>2$.

故 $x<-2$,或 $x>2$,即解集为$\{x \mid x<-2$,或$x>2\}$.

(2) 两边同乘以 $|x|$($|x|>0$),得 $1>2|x|$.

即有 $|x|<\frac{1}{2}$,故 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. 解集为$\left\{x \middle| -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right\}$.

(3) $\because |2x|=2|x|$,原不等式即 $2|x|-3<|x|$.

整理得 $|x|<3$,故 $-3<x<3$. 解集为$\{x \mid -3<x<3\}$.

例 11 解下列不等式:

(1) $|2-3x|\leqslant 2$;　　　　(2) $|3x-2|>2$.

解 (1) 由原不等式可得　$-2\leqslant 2-3x\leqslant 2$.

各加上 -2,得　$-4\leqslant -3x\leqslant 0$,

各除以 -3,得　$\frac{4}{3}\geqslant x\geqslant 0$.

故解集为$\left\{x \middle| 0\leqslant x\leqslant \frac{4}{3}\right\}$.

(2) 由原不等式可得　$3x-2<-2$,或 $3x-2>2$.

整理得　　$3x<0$,或 $3x>4$,

$\therefore$　　　$x<0$,或 $x>\frac{4}{3}$.

故解集为$\left\{x \middle| x<0\text{,或 }x>\frac{4}{3}\right\}$.

说明 因为 $|2-3x|=|-(3x-2)|=|3x-2|$,

故本题的两个不等式即 $|3x-2|\leqslant 2$,与 $|3x-2|>2$ 的解集的并集是实数集,即$\left\{x \middle| 0\leqslant x\leqslant \frac{4}{3}\right\}\cup\left\{x \middle| x<0\text{,或 }x>\frac{4}{3}\right\}=\mathbf{R}$.

例 12 解下列关于 x 的不等式:

(1) $|mx|>2\ (m>0)$;　　　　(2) $|mx|<2\ (m<0)$;

(3) $|mx-1|<3\ (m>0)$.

解 (1) 由原不等式可得 $mx<-2$,或 $mx>2$.

因为 $m>0$,故解集为$\left\{x \middle| x<-\frac{2}{m}\text{,或 }x>\frac{2}{m}\right\}$.

(2) 由原不等式可得 $-2<mx<2$.