Economists' Mathematical Manual

经济学家数学手册

Knut Sydsaeter ◆ Arne Strøm ◆ Peter Berck 著

张涛 译　谢识予 校

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

复旦大学出版社

经济学家数学手册

Knut Sydsaeter
Arne Strøm　　　著
Peter Berck
张　涛　　　　译
谢识予　　　　校

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济学家数学手册/[挪威]席德斯特(Sydsaeter,K.)等著;张涛译 .—上海:复旦大学出版社,2001.2
ISBN 7-309-02731-0

Ⅰ.经… Ⅱ.①席…②张… Ⅲ.经济数学-手册
Ⅳ.F224-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 74645 号

出版发行 复旦大学出版社
上海市国权路 579 号 200433
86-21-65102941(发行部) 86-21-65642892(编辑部)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
经销 新华书店上海发行所
印刷 复旦大学印刷厂
开本 787×960 1/16
印张 14.25
字数 226 千
版次 2001 年 2 月第一版 2001 年 2 月第一次印刷
印数 1—5 000
定价 23.00 元

第三版序言

经济学的实践需要对来自数学、统计学和数理经济学公式的广泛知识。在本书中我们希望为经济学专业学生和学者提供一本专门的公式汇编。除了一些经常为经济学家所用到的数学和统计公式外，本书还包含了不少纯经济学的结论和定理。书中的公式还包含了回顾其数学内涵所需的最少限度的注解。我们努力使定理陈述保留在经济学家适用的一般化水平上。与经济学的格言"everything is twice more continuously differentiable than it needs to be"相反，我们陈述了定理通常成立的一般条件，希望达到了能够精确实用地阐明而不流于学究气。

Arne Strøm 作为协作者加入了扩展改进了的第三版的编写。本版包括了多于 250 条新增公式，许多原先只给出一般形式的公式，现在详述为更便利的方式。新增的领域包括单调比较静态及向量空间、标量向量空间、Banach 空间和 Hilbert 空间。第三版的另一特点是包含了许多图示，它们绝大多数是由 Arve Michaelsen 制作的。

在本书的编写过程中我们得到了许多人的帮助。本书最早产生于一组由 B. Thalberg 教授搜集的经济数学公式，并由斯堪的纳维亚的学生和经济学家广泛地使用了许多年，以后的版本的改进受益于来自 G. Asheim, T. Akram, E. Biørn, T. Ellingsen, P. Frenger, I. Frihagen, H. Goldstein, F. Greulich, P. Hammond, J. Heldal, Aa. Hylland, G. Judge, D. Lund, M. Machina, H. Mehlum, K. Moene, G. Nordén, A. Rødseth, T. Schweder, A. Seierstad, L. Simon 和 B. Øksendal 的建议和更正。

对于现在的第三版，我们特别感谢 Olav Bjerkholt、Jens-Henrik Madsen 和日语版的译者 Tan-no Tadanobu 的建议，作为参考工具书，错误是特别有害的。我们希望发现残留错误的读者能够批评指正，以便我们在今后的再版中更正。

Oslo & Berkeley, November 1998

Knut Sydsaeter, *Arne Strøm*, *Peter Berck*

目　　录

1 集合理论　关系　函数

1.1 $x \in A, x \notin B$

元素 x 属于集合 A，但 x 不属于集合 B.

1.2 A = {典型元素：定义特征}

集合定义的一般形式.

1.3 以下几种逻辑运算符号通常在表明 P 和 Q 关系时使用：

- $P \wedge Q$ 指“P 和 Q”
- $P \vee Q$ 指“P 或 Q”
- $P \Rightarrow Q$ 指“如果 P 则 Q”（或者“P 仅当 Q”，或“P 蕴涵 Q”.）
- $P \Leftarrow Q$ 指“如果 Q 则 P”（或“P 如果 Q”）
- $P \Leftrightarrow Q$ 指“P 当且仅当 Q”
- $\neg P$ 指“非 P”

逻辑运算符号.（注意“P 或 Q”是指“或者 P 或者 Q，或者两者都成立”.）

1.4

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

逻辑运算的是非表.在此 T 指“是”，F 指“非”.

1.5
- P 是 Q 的一个充分条件：$P \Rightarrow Q$
- Q 是 P 的一个必要条件：$P \Rightarrow Q$
- P 是 Q 的一个充分必要条件：$P \Leftrightarrow Q$

经常用到的术语.

1.6 $A \subset B \Leftrightarrow A$ 的每一个元素也是 B 的元素.

A 是 B 的一个子集.

1.7 $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$（$A$ 与 B 的并集）

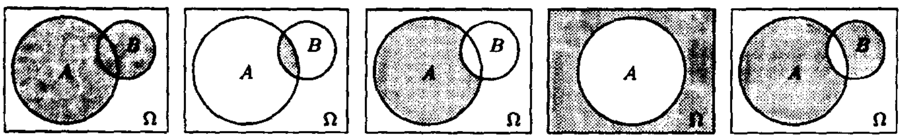
$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$（$A$ 与 B 的交集）

$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$（$A$ 与 B 的差集）

$A^c = \{x : x \notin A\}$（A 的补集）

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$（$A$ 与 B 的对称差）

集合理论的基本定义．如果 Ω 是一个全集，则 $A^c = \Omega \setminus A$．A^c 的另一种符号是 $\complement A$．



$A \cup B$　　$A \cap B$　　$A \setminus B$　　A^c　　$A \triangle B$

1.8
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$

集合理论的重要运算法则．

1.9 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡尔乘积．

1.10 $R \subset A \times B$

任何 $A \times B$ 的子集 R 称为从集合 A 到集合 B 的关系．

1.11 $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

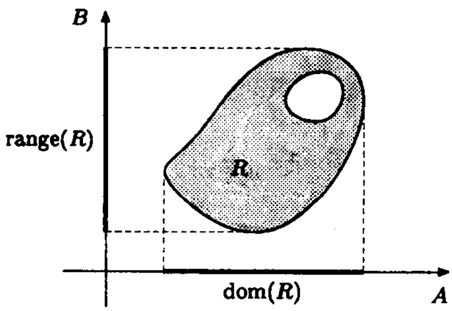
$x \not R y \Leftrightarrow (x, y) \notin R$

另一种关系和无关系的记法．我们称 x 满足对 y 的 R 关系，如果 $(x, y) \in R$．

1.12 • $\mathrm{dom}(R) = \{a \in A : (a, b) \in R$ 对于 B 中某一 $b\}$
$= \{a \in A : aRb$ 对于 B 中某一 $b\}$
• $\mathrm{range}(R) = \{b \in B : (a, b) \in R$ 对于 A 中某一 $a\}$
$= \{b \in B : aRb$ 对于 A 中某一 $a\}$

关系的区域及范围.

1.13



(1.13)定义的关系 R 的区域及范围，阴影部分集合是关系的图形.

1.14 $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$

从 A 到 B 的关系 R 的逆关系. R^{-1} 是从 B 到 A 的关系.

1.15 让 R 为从 A 到 B 的关系，S 为从 B 到 C 的关系，我们则可定义 R 和 S 的复合 $S \circ R$ 为属于 $A \times C$ 的 (a, c) 的集合，满足属于 B 的元素 b 具有 aRb 及 bSc. $S \circ R$ 是一个从 A 到 C 的关系.

$S \circ R$ 是两个关系 R 及 S 的复合.

1.16 从 A 到 A 自己的关系 R 称为 A 的二元关系. R 的二元关系具有

• 自反性如果 aRa 对于每一在 A 中的 a 成立；
• 非自反性如果 $a \not R a$ 对于每一在 A 中的 a 成立；
• 完整性如果 aRb 或 bRa 对于每一在 A 中的 a 和 b 成立，且 $a \neq b$；
• 传递性如果 aRb 及 bRc 则有 aRc；
• 对称性如果 aRb 则有 bRa；
• 反对称性如果 aRb 及 bRa 则有 $a = b$；
• 非对称性如果 aRb 则有 $b \not R a$.

特殊的关系.

1.17 A 的二元关系 R 被称为

- 先有序的(或拟有序的)关系,如果它是自反性的和传递性的;
- 弱有序的关系,如果它是传递性的和完整的;
- 部分有序的关系,如果它是自反性的,传递性的及反对称性的;
- 线性(或完全)有序的,如果它是自反性的,传递性的,反对称性的及完整的;
- 等价关系,如果它是自反性的,传递性的及对称的.
- 关系 $=$ 在实数中是一个相应关系.
- 关系 $\geqslant$ 在实数中是一个线性有序关系.
- 关系 $<$ 在实数中是一个弱有序及非自反性,非对称性关系.
- 关系 $\subset$ 在给定集合的子集中是一个部分有序关系.

特殊的关系.(这些术语并不是通用的.)注意线性有序与完整的部分有序是一样的.
序列关系通常用符号 $\preccurlyeq$, $\leqslant$, $\ll$ 等标示. 逆关系用 $\succcurlyeq$, $\geqslant$, $\gg$ 等标示.

1.18
- 关系 $x \preccurlyeq y$ (“y 至少与 x 一样好”)在一个商品向量集合里通常假定为完整的先有序关系.
- 关系 $x \prec y$ (“y(严格好于)x”)在一个商品向量集合里通常假定为非自反的,传递的(因此是非对称性).
- 关系 $x \sim y$(“x 与 y 无差别”)在一个商品向量集合里通常假定为等价关系.

关系的例子. 对于关系 $x \preccurlyeq y$, $x \prec y$, 及 $x \sim y$, 见第 26 章.

1.19 令 $\preccurlyeq$ 为在集合 A 中的一个先有序关系. 在 A 中的一个元素 g 称为在 A 中对于关系 $\preccurlyeq$ 的最大元素,如果 $x \preccurlyeq g$ 对于每一在 A 中的 x 成立. 在 A 中的一个元素 m 称为在 A 中对于关系 $\preccurlyeq$ 的极大元素,如果 $x \in A$ 且 $m \preccurlyeq x$ 意味着 $x \preccurlyeq m$. 对 $\preccurlyeq$ 的最小和极小元素分别是对于 $\preccurlyeq$ 的逆关系 $\succcurlyeq$ 的极大和最大元素.

有序集合中最大元素,极大元素,最小元素和极小元素的定义.

1.20 如果$\leqslant$是一在 A 中的先有序关系,M 是 A 的一个子集,在 A 中的元素 b 称为 M 的一个上限(对于$\leqslant$),如果 $x \leqslant b$ 对于每一在 M 中的 x 成立.一个 M 的下限是一在 A 中的元素 a 使 $a \leqslant x$ 对于所有在 M 中的 x.

上限和下限的定义.

1.21 如果$\leqslant$是在非空集合 A 中的一个先有序关系,且如果 A 的每一线性有序子集 M 都在 A 中有上限,则对于关系$\leqslant$在 A 中存在一个极大元素.

Zorn 引理.(通常适用于部分有序,但对于先有序同样适用.)

1.22 一个从 A 到 B 的关系 R 称为函数或映射,如果对于每一在 A 中的 a,在 B 中都存在一个唯一的 b,使 aRb.如果用 f 作为函数符号,则 afb 可写成 $f(a) = b$. f 的图形则定义为 $\mathrm{graph}(f) = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = b\}$.

从集合 A 到集合 B 的函数及其图形的定义.

1.23 一个从 A 到 B 的函数 $f(f: A \to B)$ 称为

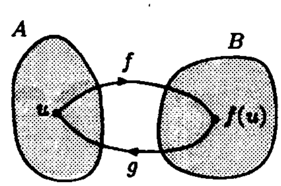
- 单射的(或一一对应的)如果 $f(x) = f(y)$ 意味着 $x = y$;
- 满射的(或自身映射)如果范围 $\mathrm{dom}(f) = B$;
- 双射的如果它既是单射的又是满射的.

函数的一些重要概念.

1.24 如果 $f: A \to B$ 双射的(即既是一一对应的又是自身映射的),则它有反函数 $g: B \to A$,定义为 $g(f(u)) = u$ 对于所有 $u \in A$.

反函数的特点. f 的反函数通常记为 f^{-1}.

1.25



反函数概念的图示.

1.26 如果 f 是一个从 A 到 B 的函数,且 $C \subset A$, $D \subset B$,我们则可使用记法

- $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$
- $f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$

$f(C)$称为 A 在关系 f 下的像, $f^{-1}(D)$称为 D 的逆像.

1.27 如果 f 是从 A 到 B 的一个函数，而且 $S \subset A$，$T \subset A$，$U \subset B$，$V \subset B$，则

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$$
$$f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$$
$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$$
$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$$
$$f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$$

重要的事实.(包含符号 $\subset$ 不能由 $=$ 替代)

1.28 如果 $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 为自然数的集合，而 $\mathrm{N}_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$，则

- 集合 A 是有限的如果它是空的，或对于某一自然数 n，存在一从 A 到 N_n 的一一对应函数.
- 集合 A 是可数性无限的如果存在一从 A 到 N 的一一对应函数.

一个有限的或可数性无限的集合通常称为可数的. 有理数集合是可数性无限的，而实数集合是不可数的.

参 考 文 献

参照 Halmos (1974), Ellickson (1993)及 Hildenbrand (1974).

2 方程式 一元函数 复数

2.1 $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

一般一元二次方程的根. ($a \neq 0$) 如果 $b^2 \geqslant 4ac$ 则是实数根. (假设 a, b, 和 c 是实数)

2.2 如果 x_1 及 x_2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的根,则

$$x_1+x_2=-p, \quad x_1x_2=q$$

Viète 定理.

2.3 $ax^3+bx^2+cx+d=0$

一般一元三次方程.

2.4 $x^3+px+q=0$

如果在(2.3)中的 x 写为 $x-b/3a$, (2.3)可简写为(2.4).

2.5 $x^3+px+q=0$ 且 $\Delta=4p^3+27q^2$, 则有

- 三个不同的根,如果 $\Delta<0$;
- 三个实根,其中至少两个相等,如果 $\Delta=0$;
- 一个实根,两个复根,如果 $\Delta>0$.

(2.4)中根的分类. (假设 p 和 q 是实数)

2.6 方程 $x^3+px+q=0$ 的解为

$x_1=u+v$, $x_2=\omega u+\omega^2 v$, 以及 $x_3=\omega^2 u+\omega v$, 其中 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}$, $x_3=-\dfrac{u+v}{2}-\dfrac{u-v}{2}\sqrt{-3}$, 且有

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{27}}}$$

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{27}}}$$

对于一元三次方程的根的 Cardano 公式. i 是虚数单位(参照(2.72)), 而 ω 是 1 的第三个复根(参见(2.85)). (除非必要时,尽量不要使用这一公式!)