面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等数学

陈庆华 主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

高 等 数 学

陈庆华 主编

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

全书内容共分9章，分别是：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，常微分方程，向量与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，数值计算初步。书后附有5个附录：基本初等函数表，常用平面曲线及其方程，积分表，习题答案，方程求根的C语言程序。

该书为总参军训部指定全军院校工科专科通用教材，也可作为地方院校专科教材或专科函授学员的辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/陈庆华主编．—北京：高等教育出版社，1999(2001重印)

ISBN 7-04-006973-3

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第02119号

书　名　高等数学

作　者　陈庆华　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　本	787×960　1/16	版　次	1999年6月第1版
印　张	28.5	印　次	2001年1月第4次印刷
字　数	520 000	定　价	23.50元

前　言

1995年春，总参军训部组织编写军队院校工科专科高等数学通用教材。编写组在广泛调研的基础上，根据军队院校工科专科高等数学教材建设的需要，吸收各院校高等数学教学改革的成果，于1996年夏完成了该教材的第一稿，并在国防科技大学出版社出版，在军内院校使用。1996年秋，经总参军训部推荐，申请"九五"国家级重点教材的立项，1997年底获得批准。编写组遵照总参军训部提出的编写要求，面向21世纪高等专科教育的发展，根据两年使用情况，对该教材的第一稿进行了校对、改写、调整、补充与完善。为了体现精讲多练的原则，将高等数学内容进行了适度精简，增加习题课的份量，将全书内容分为互为配套的两册，一册是讲大课用的《高等数学》，另一册是上习题课用的《高等数学习题课教程》。

其中《高等数学》一册，共设9章，依次是函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，常微分方程，向量与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，数值计算初步。每节后配有习题，每章后配有复习题，书末附有基本初等函数表，常用平面曲线及其方程，积分表，方程求根的C语言程序，部分习题答案等。本册约50万字，授课学时可控制在120—150学时。在内容的取舍上，适当减少了一些繁难的定理证明，突出了基本概念、基本方法、基本技能，增加了数值计算内容，为拓宽数学的应用打下基础。

《高等数学习题课教程》一册，按照《高等数学》的9章顺序，共设21讲，每讲设置"目的要求"、"基本训练"、"疑难解析与课堂练习"、"课外思考与练习"等四部分内容。其中"基本训练"内容是让学员以填空的形式复习大纲要求掌握的基本概念、基本公式、基本定理等，以便巩固这些知识。其中"疑难解析与课堂练习"是对《高等数学》一册中所选例题的辅助和补充。《高等数学习题课教程》一册既可作为教科书，也可作为教员指导学员自学的课外读物。

整套教材遵循总参军训部1994年10月颁发的军队工科专科《基础课教学基本要求》和"九五"国家级重点教材的编写要求，整体结构力求严谨简明；内容的深度与范围力求宽编窄用；定理证明注重几何直观，语言表述力求通俗易懂。

整套教材的内容结构由主编陈庆华教授设计制定，参加编写的单位有：指挥技术学院、测绘学院、海军航空技术学院、空军第一航空学院、防化指挥工程

学院、北京医学高等专科学校、空军第二航空学院、军事经济学院、汽车管理学院、运输工程学院。

《高等数学》各章撰写人分别是：第一章为李庆才、孙利民，第二章为王莉、郭瑞平，第三章为孙利民、王莉，第四、五章为朱铁稳，第六、八章为孙本利，第七章为姚红，第九章为张忠秀；郭瑞平、尹江丽分别对全书作了校对和修改。《高等数学习题课教程》各讲撰写人分别是：第一、二、三讲为佘贵清，第四、五、六讲为姚楠，第七、八、九讲为王莉，第十、十一讲为生汉方，第十二、十三讲为孙建建，第十四、十五讲为高大新，第十六、十七讲为姚红，第十八、十九、二十讲为许依群，第二十一讲为刘家学；王莉和孙建建对全书作了校对和修改。张德舜教授对全套教材作了认真审核，最后由主编陈庆华教授统稿定稿。

本教材出版前，邀请了教育部工科数学课程指导委员会委员盛祥耀教授、史荣昌教授，指挥技术学院常显奇教授，北方交通大学季文铎教授，装甲兵工程学院杨醒民教授，海军后勤学院金延年教授，空军后勤学院袁新生教授等，对整套教材进行了认真的审查。根据专家的意见，编写组又做了进一步的修改。为了本书的出版，高等教育出版社数学编辑室的胡乃冏、邵勇、李陶等同志给予了热情的关心和极大的帮助。参加编写的十所院校对本书的编写给予了很大的支持。在此，我们一并表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中的错误和不当之处，敬请读者和同行批评指正。

编 者

1998 年 12 月 20 日

目　录

第一章　函数、极限与连续

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系，是高等数学研究的主要对象，其研究的基本方法则是极限方法. 本章将介绍变量、函数、极限、函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

第一节　函数的概念

一、变量与区间

在观察自然现象或科学试验等过程中，经常会碰到两种不同的量：一种量在过程中不发生变化而保持一定的数值，这种量称为常量；另一种量在过程中可以取不同的数值，这种量称为变量. 通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、z 等表示变量.

变量的取值范围称为变域，即变量取值的集合. 如不特殊声明，我们以后所讨论的变域都是由实数组成的集合. 最常见的变域是区间，区间用数集的记号表示如下：

开区间：　$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$.

闭区间：　$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$.

半开区间：　$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$；

$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$.

无穷区间：　$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$；

$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$；

$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$；

$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$.

在数轴上，有限区间用数轴上从点 a 到点 b 的有限线段表示，无穷区间用射线或整个数轴表示. a 和 b 称为区间的端点（a 称为左端点，b 称为右端点），端点依照区间类型，有时包含在线段内，有时不包含在线段内. 属于区间而不

是端点的点称为区间的内点.

设 x_0,δ 是两个实数,且 $\delta>0$,称数集 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ 为 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0,\delta)$,x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径. 在数轴上 $U(x_0,\delta)$ 表示为以点 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内去掉 x_0,即数集 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为 x_0 的去心邻域,记为 $U(\hat{x}_0,\delta)$.

二、函数

函数反映了变量之间的依赖关系. 下面考察几个例子.

例 1　圆的面积 A 与半径 r 之间的关系由 $A=\pi r^2$ 表示. 这里 A 与 r 都是变量,当半径 r 变化时,圆的面积 A 作相应的变化.

例 2　气象台用自动记录仪把一天的气温变化情况自动描绘在记录纸上,得到如图1.1所示的曲线. 根据这条曲线,我们就能知道一天内任何时刻 t 的气温 T.

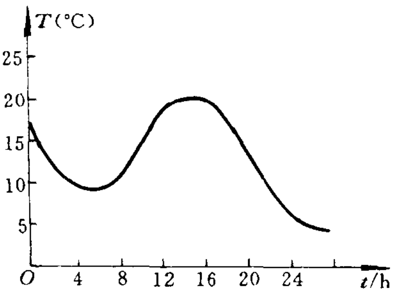


图 1.1

例 3　由实验测得某金属轴在不同温度 t(°C) 下的长度为 L (mm),数据如表1.1.

这里 t 和 L 是两个相互依赖的变量. 表1.1表示了 L 与 t 之间的依赖关系.

表 1.1

t(°C)	10	20	30	40	50	60
L(mm)	1 000.12	1 000.24	1 000.35	1 000.48	1 000.61	1 000.72

以上三例的实际意义虽不相同,但却具有共同之处:每个例子所描述的变化过程都有两个变量,当其中的一个变量在一定的变化范围内取定一数值时,按照某个确定的法则,另一个变量有唯一确定的数值与之对应. 变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义1　**设 x,y 是两个变量,D 是一个给定的数集. 如果有一个对应法则 f,使得对于每一个数值 $x\in D$,变量 y 都有唯一确定的数值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记为**

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量. 集合 D 称为函数的定义域,记为 D_f.

当 x 取数值 $x_0\in D_f$ 时,与 x_0 对应的数值 y 称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处

的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$．此时称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义．显然，函数的定义域是指使函数有定义的点的集合．函数值组成的数集称为函数的值域，记为 Z_f．

由函数定义知，定义域和对应法则是函数的两个要素．如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，则它们是相同的函数．

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，对于取定的 $x\in D_f$，对应的函数值为 y，以 x 为横坐标，y 为纵坐标，在 Oxy 面上确定一点 (x,y)，当 x 取遍 D_f 上的每一个数值时，就得到 Oxy 面上的点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x),\ x\in D_f\}$，称之为定义在 D_f 上的函数 $y=f(x)$ 的图形．

在中学数学里，我们已经学过以下五类最基本的函数：

(1) 幂函数 $y=x^{\mu}$ （μ 为实数）；

(2) 指数函数 $y=a^x$ （$a>0,a\neq 1$）；

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0,a\neq 1$）；

(4) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$；

(5) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$．

以上五类函数统称为基本初等函数，其定义域、图形，参见附录Ⅰ．

在实际问题中，有时会遇到一个函数在定义域的不同范围内，用不同的解析式表示的情形，这样的函数称为分段函数．分段函数在整个定义域上是一个函数而不是几个函数，如符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0\end{cases}$$

就是一个分段函数，它的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $Z_f=\{-1,0,1\}$（如图1.2）．

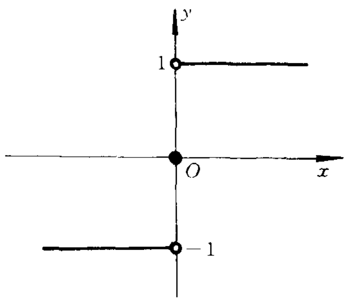


图 1.2

函数常用解析法（如例1），图象法（如例2），表格法（如例3）来表示．

三、反函数及隐函数

在函数的定义中，规定了对于变量 x 的每一个数值，变量 y 有唯一确定的数值与之对应，这样定义的函数，又称为单值函数；如果变量 y 有两个或更多个确定的数值与之对应，就称 y 是 x 的多值函数．本书主要讨论单值函数．

在函数中，自变量与因变量的地位是相对的，任意一个变量都可根据需要作为自变量．如在自由落体运动规律

$$s=\frac{1}{2}gt^2(t\geqslant 0)$$

中，t 是自变量，s 是因变量，由上式可算出 t 时间内物体下落的路程 s . 但有时也需要根据物体所经过的路程 s 来确定经过这段路程所需要的时间 t ，这只要从上式中解出 t ，就得到

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}(s\geqslant 0) ,$$

这里 s 是自变量，t 就是因变量. 上面两式反映了同一过程中两个变量之间地位的相对性，我们称它们互为反函数.

一般地，设 $y=f(x)$ 是定义在 D_f 上的一个函数，其值域为 Z_f . 如果对每一数值 $y\in Z_f$ ，有确定的且满足 $y=f(x)$ 的数值 $x\in D_f$ 与之对应，其对应法则记为 f^{-1} ，则定义在 Z_f 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$. 若把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一平面直角坐标系内，那么这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

由于我们只研究单值函数，故当反函数为多值函数时，应根据需要取它的一个分支. 例如，$y=x^2$ 的反函数是 $x=\pm\sqrt{y}$ ，可以根据需要取单值函数 $x=\sqrt{y}$ 或 $x=-\sqrt{y}$.

前面所介绍的函数，其因变量 y 是由含有自变量 x 的数学式子直接表示为 $y=f(x)$ 的形式，如 $y=\sin\sqrt{x^2+1}$，$y=e^{x^2}+\ln x$ 等. 用这种方法表示的函数称为显函数.

通常表示变量 x,y 之间相互依赖关系的方法很多，显函数就是其中的一种. 有时，变量 x,y 之间的相互依赖关系，是由某一个二元方程 $F(x,y)=0$ 给出，如 $x^3+y^3-1=0$, $\sin(xy)+e^{x+y}=0$ 等，用这种方法表示的函数称为隐函数.

注意，有些隐函数可以改写成显函数的形式，如 $x^3+y^3-1=0$ ，其显函数形式为 $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ ；而有些隐函数则不能改写成显函数的形式，如 $\sin(xy)+e^{x+y}=0$. 把隐函数改写成显函数，叫做隐函数的显化.

四、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正常数 M ，使得对于区间 I 内所有 x ，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在区间 I

上无界.

例如 $y=\sin x$，对于一切 x 都有

$$|\sin x|\leqslant 1,$$

所以函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

又如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有界，这是因为当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 但是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，请读者自己证明.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于区间 I 内的任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（或单调减少）的. 单调增加（或单调减少）的函数又称为递增（或递减）函数，统称为单调函数. 使函数保持单调性的自变量的取值区间称为该函数的单调区间.

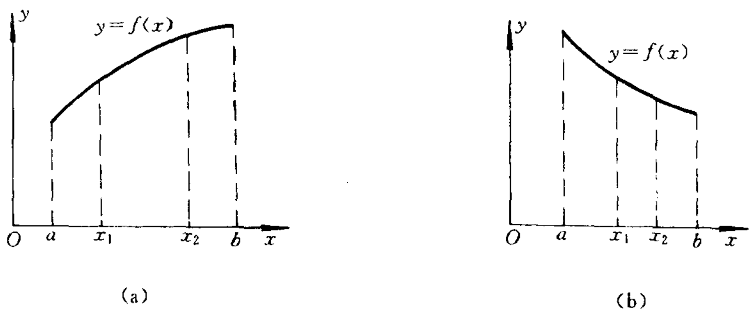


图　1.3

例如函数 $y=x^2$，在区间 $[0,+\infty)$ 内单调增加；在 $(-\infty,0]$ 内单调减少；在 $(-\infty,+\infty)$ 内则不具有单调性.

单调增加（或减少）的函数，其图形是随着自变量的增加而上升（或下降）的曲线（图1.3(a),(b)）.

3. 函数的奇偶性

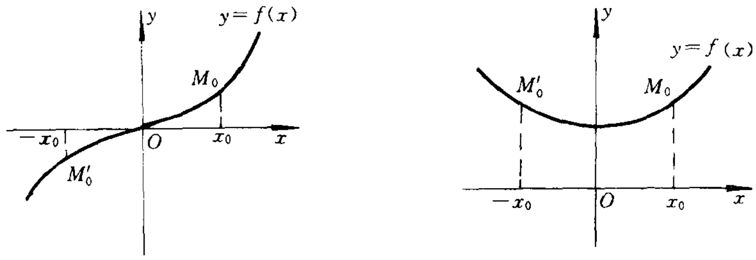
设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D_f$，恒有

$$f(-x)=-f(x)\quad(\text{或 } f(-x)=f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为奇（或偶）函数.

例如 $f(x)=x^3$ 是奇函数，这是因为 $f(-x)=-x^3=-f(x)$；又如 $f(x)=x^2$ 是偶函数，这是因为 $f(-x)=x^2=f(x)$；而 $y=x^3+x^2$ 既不是奇函数也不是偶函数.

奇函数的图形关于原点对称(图1.4(a)),偶函数的图形关于 y 轴对称(图1.4(b)).



(a)　(b)

图 1.4

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,如果存在一个常数 $T\neq 0$,使得对任意的 $x\in D_f$ 有 $x\pm T\in D_f$,且 $f(x\pm T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.通常我们所说的周期是指函数 $f(x)$ 的最小正周期.

例如 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期为 2π,$\tan x$ 和 $\cot x$ 的周期为 π.

五、初等函数

1. 复合函数

一个函数可以与另一个函数发生联系从而构成新的函数,例如函数 $y=\sin u$ 与 $u=x^2+1$ 可构成新函数 $y=\sin(x^2+1)$,使得 y 成为 x 的函数,这种由较简单的函数复合成较复杂的函数在应用上常常出现.下面给出复合函数的定义.

定义2　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$.如果对于 $\varphi(x)$ 的定义域中的某些 x 值所对应的 u 值,函数 $y=f(u)$ 有定义,则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数,称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为中间变量.

根据定义可知,复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域或者与 $\varphi(x)$ 的定义域完全相同,或者只是 $\varphi(x)$ 的定义域的一部分.不是任意两个函数都能复合成一个函数.例如,$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数,这是因为对于后一个函数的值域中的每一个 u 值,都不可能使前一个函数有定义.

例4　问函数 $y=\sqrt{\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ 是由哪些较简单的函数复合而成的?

解　$y=\sqrt{\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$,$u=\log_a v$,$v=1+\frac{1}{x}$ 三个较

简单的函数复合而成的.

把一个较复杂的函数分解成几个较简单的函数,这对于今后的许多运算是很有用的.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合步骤所构成,并可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\arcsin\dfrac{a}{x}$, $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 等都是初等函数.

工程技术中,常常用到一种由指数函数 e^x 和 e^{-x} 所组成的函数,称为双曲函数,它们的定义如下:

双曲正弦 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

双曲余弦 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;

双曲正切 $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;

双曲余切 $\coth x=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

由定义可以证明,双曲函数具有类似于三角函数的一些恒等式:

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$;

$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cdot\cosh y\pm\cosh x\cdot\sinh y$;

$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cdot\cosh y\pm\sinh x\cdot\sinh y$;

$\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$;

$\sinh 2x=2\sinh x\cdot\cosh x$.

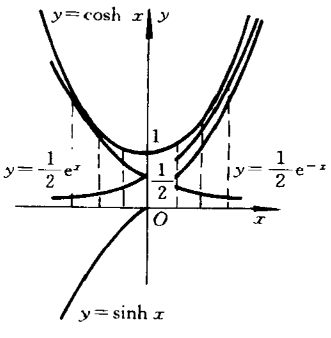


图 1.5

双曲正弦和双曲余弦的图形容易用“叠加”法作出(图1.5).

六、建立函数关系举例

用数学方法解决实际问题时，首先要建立数学模型，即建立函数关系. 为此需明确问题中的因变量与自变量，根据题意建立等式，从而得出函数关系，再根据实际问题的要求，确定函数定义域.

例5 某工厂 A 与铁路的垂直距离为 a 公里，它的垂足 B 到火车站 C 的铁路长为 b 公里，工厂的产品必须经火车站 C 方能转销外地. 已知汽车运费是 m 元/吨公里，火车运费是 n 元 / 吨公里($m>n$). 为节省运费，计划在铁路上另修一小站 M 作为转运站，那么运费的多少决定于 M 的地点. 试将运费表示为距离 $|BM|$ 的函数(图1.6).

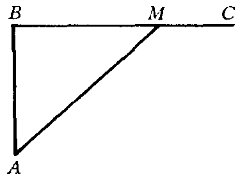


图 1.6

解 设 $|BM|=x$，运费为 y. 根据题意有

$$|AM|=\sqrt{a^2+x^2},\quad |MC|=b-x,$$

则

$$y=m\sqrt{a^2+x^2}+n(b-x),\quad x\in[0,b].$$

例6 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每吨公里为 k 元；超过 a 公里时，超过部分为每吨公里 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解 根据题意可列出函数关系如下：

$$m=\begin{cases} ks, & 0<s\leqslant a; \\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), & a<s. \end{cases}$$

这里运价 m 和里程 s 的函数是用分段函数表示的，定义域为$(0,+\infty)$.

习题 1－1

1. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x|\leqslant 3$；　(2) $|x-2|\leqslant 1$；

(3) $|x-a|<\varepsilon$(a 为常数，$\varepsilon>0$)；

(4) $|x|\geqslant 5$；　(5) $|x+1|>2$；

(6) $0<|x-x_0|<\delta$ (x_0 为常数，$\delta>0$).

2. 下列各题中，$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否表示同一个函数，说明理由.

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$，$\varphi(x)=1$；

(2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，$\varphi(x)=x+1$；

(3)　$f(x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$，　$\varphi(x)=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(4)　$f(x)=\lg x^2$，　$\varphi(x)=2\lg x$；

(5)　$f(x)=\arccos x$，　$\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$；

(6)　$f(x)=x$，　$\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$.

3. 设 $f(x)=1+x^2$，　$\varphi(x)=\sin 3x$，求 $f(0),f\left(\dfrac{1}{a}\right),f(t^2-1)$，$f[\varphi(x)],\varphi[f(x)],f\left[\dfrac{1}{\varphi(x)}\right],f[\varphi^2(x)],\{f[\varphi(x)]\}^2$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0;\\ 2, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f(-1),f(1)$.

5. 设 $f(x)=ax^2+bx+5$，而且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，试确定 a,b 的值.

6. 求下列函数的定义域：

(1)　$y=\sqrt{x^2-4x+3}$；　　(2)　$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$；

(3)　$y=\lg\sin x$；　　(4)　$y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

(5)　$y=1-e^{1-x^2}$；　　(6)　$y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$.

7. 如果 $f(x)=a^x$，证明 $f(x)f(y)=f(x+y),\dfrac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$.

8. 将函数 $y=5-|2x-1|$ 用分段函数形式表示，并作出函数图形.

9. 设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$　求 $\varphi(x)$.

10. 下列函数是由哪些较简单函数复合而成的？

(1)　$y=\ln\sin^2(3x+1)$；　　(2)　$y=\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2$；

(3)　$y=\arctan(x^2+1)$；　　(4)　$y=(1+x)^{\tan x}$.

11. 求下列函数的反函数：

(1)　$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，　$\left[-\dfrac{3}{4}\pi,\dfrac{\pi}{4}\right]$；

(2)　$y=x^2-4x$，　$[2,+\infty)$；

(3)　$y=\sinh x$，　$(-\infty,+\infty)$.

12. 判断下列函数的奇偶性：

(1)　$y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{10}$；　　(2)　$y=x+\sin x$；

(3)　$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$；　　(4)　$y=\begin{cases}-x, & x<-1;\\ 1, & |x|\leqslant 1;\\ x, & x>1;\end{cases}$