亚太金融研究

亚太金融学会第七届年会论文选

Study on Asia Pacific Finance

The 7th Annual Conference of Asia Pacific Finance Association

主编　吴冲锋　黄培清

上海交通大学出版社

亚太金融研究

Study on Asia Pacific Finance

亚太金融学会第七届年会论文选

The 7th Annual Conference of Asia Pacific Finance Association

主编　吴冲锋　黄培清

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是亚太金融学会第七届年会的中文论文选集，收有论文31篇。这些论文涉及波动持续性对资产定价模型的影响分析、企业财务状况和风险水平的统计分析、非完备市场中衍生证券定价、行为金融学、风险测度、新股上市过度反应、公司治理与资本结构、融资机制等前沿课题。文中提出不少新观点和新方法，可供金融工作者和高校金融专业的师生参考。

图书在版编目（CIP）数据

亚太金融研究：亚太金融学会第七届年会论文选/吴冲锋，黄培清主编．—上海：上海交通大学出版社，2001

ISBN 7-313-02680-3

Ⅰ．亚… Ⅱ．①吴… ②黄… Ⅲ．国际金融-研究-亚太地区-文集 Ⅳ．F831-53

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第24837号

亚太金融研究

吴冲锋 黄培清 主编

上海交通大学出版社出版发行

（上海市番禺路877号 邮政编码200030）

电话：64071208 出版人：张天蔚

常熟市印刷八厂印刷 全国新华书店经销

开本：890mm×1240mm 1/32 印张：11.75 字数：336千字

2001年7月第1版 2001年7月第1次印刷

印数：1～850

ISBN 7-313-02680-3/F·379 定价：25.00元

前　言

以“21世纪的金融与科技”为主题的亚太金融学会第七届年会，2000年7月24日至26日在上海浦东金茂大厦凯悦酒店举行。全国人大常委会副委员长成思危担任大会主席并作大会主题报告，上海市副市长周禹鹏出席了大会的开幕式。亚太金融学会会长 Carl Chiarella、美国金融学会会长 Hans Stoll 教授、越南证监会主席 Chau Le Van、加州大学圣地亚哥分校 Robert Engle 教授、宾西法尼亚大学沃顿商学院 Anthony Santomero 教授、美国联邦银行(芝加哥)高级副总裁 Mr. William Curt Hunter、中国证监会首席顾问梁定邦、中国人民银行研究所所长谢平、中国证监会秘书长屠光绍等出席了大会并作了精彩的发言。

本届年会由上海交通大学和香港理工大学联合承办。来自亚太地区学术界、实业界的500余位专家、学者和企业家，(其中海外学者达200多人)为本届年会带来科技进步与发展如何影响金融产业的创新思维。会议议题包括破产与财务困难、银企关系及支付体系、公司治理结构、公司收购与兼并、金融市场与信息披露等内容；本届年会设立的金融界企业专题报告涉及当前中国金融市场的实际动作和政府决策所面临的诸多问题；针对本届年会的专题报告还涉及入世后的中国金融市场，会上讨论了公司治理结构、财务管理与国有企业改革、风险投资与基金管理、高科技产业与金融机制的发展、中国证券市场的发展以及香港创业板市场等为世人关注的内容。

本书是这次会议的中文论文汇集，收集了国内学者的31篇论文，可供金融业的专家、学者及关心我国金融发展的各界人士进行交流与探讨。文中不当之处欢迎各位读者批评指正。

编　者

2001年3月15日

目　　录

波动持续性对资产定价模型的影响分析

李汉东
（北京师范大学系统科学系，北京 100875）

张世英
（天津大学管理学院，天津 300072）

摘要 本文在将条件方差的概念应用于资本资产定价模型分析的基础上，讨论了资产收益的条件方差在服从广义自回归条件异方差模型的条件下，资本资产定价模型和套利定价模型的表现形式和有关性质，并分析了当存在条件方差持续性和协同持续性时，资产组合风险率和收益的变化情况。

关键词 GARCH 模型，持续性，协同持续性，资本资产定价模型，套利定价模型

一、前言

现代资本资产定价理论体系是从 Markowitz(1952)的证券组合投资理论发展起来的。证券组合投资理论假定投资者都希望获得最大收益，而不喜欢风险，并在一定时期内按照预期收益率和风险率来选择一个具有较高收益和较低风险的最佳证券组合。在此基础上，Sharpe(1964)，Linter(1965)等人提出了资本资产定价模型(CAPM)，资本资产定价模型给出了在均衡状态下各种资本资产的均衡价格。与此同时，Ross(1976)，Chamberlain 和 Rothschild(1983)提出了套利定价理论(APT)。这一理论认为通过套利不可能使投资者创造无限财富，从这种意义上说，预期收益一定是与风险相关联的，风险可由几个因子产生，虽然我们不能准确地说明这些因子是什么，但却可以假设证券收益和因子之间的关系是线性的，并以此来确定未来的资产收益。

现代资本资产定价理论已经被广泛应用于经济和金融领域的实际

研究，并成为现代金融投资定量分析的基本工具。然而，尽管人们已经认识到了用方差和协方差作为风险度量的投资价格是随时间变化的，但是传统经济计量学和时间序列模型却通常假定模型的条件方差为常数（即同方差假定），而资本资产定价理论建立在投资收益的期望和方差都不变的基础上，静态地处理资本资产的定价问题，这显然不能完全反映现实中存在的随着时间变化的不确定性问题。近些年来，西方一些经济计量学家开始致力于金融和经济时间序列的二阶矩和高阶矩的时变建模研究，对时变方差建模的一种有效的工具就是自回归条件异方差即 ARCH 模型。自 ARCH 模型被 Engle(1982)[1]提出以来，它的各种扩展形式不断发展，其中最重要的是 Bollerslev(1986)提出的广义自回归条件异方差即 GARCH 模型[2]。与此同时，Bollerslev(1986, 1987)[2][3]，Bollerslve，Engle 和 Wooldridge (1988)[4] 以及 Chou (1988)[5]等人首先将 ARCH 类方法应用到资本资产定价模型的分析之中并取得了极大的成功。

在这里我们将考虑 GARCH 过程存在持续性时对资本资产定价模型的影响，并进一步讨论在组合证券投资中波动持续性对收益的影响。

二、条件方差的波动性、持续性和协同持续性

（一）条件方差及 GARCH 模型

现代经济计量学的一个重要特征就是引入了随机变量的条件期望和条件方差。考虑一个一阶自回归模型：

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \varepsilon_t \sim i.i.d \tag{1}$$

其中 $E(\varepsilon_t)=0$；$V(\varepsilon_t)=\sigma^2$。模型的平稳条件是 $|\phi|<1$。

令 y_{t+1} 的期望为零，即 $E(y_{t+1})=0$，但是条件期望为 $E_t(y_{t+1})=\phi y_t$。显然，条件期望是随时间变化的，并且与当前时间 t 的信息有关。无条件方差和条件方差分别为：

$$V(y_{t+1}) = \sigma^2/(1-\phi^2) \tag{2}$$

$$V_t(y_{t+1}) = E_t[y_{t+1} - E_t(y_{t+1})]^2 = \sigma^2 \tag{3}$$

其中 σ 为常数。从(1)式经过迭代可以得到：

$$y_{t+s} = \phi^s y_t + \sum_{i=1}^{s} \phi^{s-i} \varepsilon_{t+i} \tag{4}$$

右式第一项为 y_{t+s} 在时间 t 的条件期望，第二项为预测误差。y_t 的前向 s 步的条件方差为

$$V_t(y_{t+s}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{s} \phi^{2(s-i)} \tag{5}$$

这样，在条件方差为常数的情况下，条件方差依赖于预测的时间长度但并不依赖于在初始时刻 t 的已知信息集。然而在更具一般意义的情况下，条件方差的预测将依赖于已知信息集并且随着时间的变化而变化。对时变条件方差研究的一种最有效的分析工具就是 GARCH 模型。在模型中条件方差和条件期望都被作为已知信息集的函数并被参数化。

考虑一个简单的 AR(1)－GARCH(1-1)模型

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$E_{t-1}(\varepsilon_t) = 0$$
$$V_{t-1}(\varepsilon_t) = h_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \tag{6}$$

其中 $|\phi|<1, \omega>0, \alpha\geqslant 0, \beta\geqslant 0$。这里 ε_t 是序列不相关的，但并不是独立的，因为它们的二阶矩是相关的。如果 $\alpha+\beta<1$，ε_t 的无条件方差为：

$$V(\varepsilon_t) = \sigma^2 = \omega(1-\alpha-\beta)^{-1} \tag{7}$$

ε_t 条件方差可以被表示为：

$$h_t - \beta h_{t-1} = (1-\beta(L))h_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$$
$$h_t = \omega(1-\beta(1))^{-1} + \alpha(1-\beta(L))^{-1}\varepsilon_{t-1}^2$$
$$h_t - \sigma^2 = \alpha(1-\beta(L))^{-1}(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^2) \tag{8}$$

其中 L 为滞后算子，$(1-L)h_t = h_t - h_{t-1}$。从而有：

$$E_t(y_{t+1}) = \phi y_t$$

$$\begin{aligned} V_t(y_{t+1}) &= V_t(\varepsilon_{t+1}) = h_{t+1} \\ &= \omega(1-\beta(L))^{-1} + \alpha(1-\beta(L))^{-1}(y_t + \phi y_{t-1})^2 \end{aligned} \tag{9}$$

式(9)表明条件期望和一步前向条件方差的预测都与已知信息集有关。类似地,AR(1)－GARCH(1-1)多步前向预测条件方差可以表示为:

$$V_t(y_{t+s}) = \sum_{i=1}^{s} \phi^{2(s-i)} E_t(h_{t+s}) \tag{10}$$

在(6)式中,因为 $\alpha+\beta<1$,并设 $s>2$。由

$$E_t(h_{t+i}) = \sigma^2(1-\alpha-\beta) + (\alpha+\beta)E_t(h_{t+i-1})$$

有

$$V_t(y_{t+s}) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{s-1} \phi^{2i} + (\alpha+\beta)^{s-1}(h_{t+1}-\sigma^2) \sum_{i=0}^{s-1} \phi^{2i} \tag{11}$$

从表达式(11)可以看出,条件方差与当前信息集有关。但由于 $\alpha+\beta<1$,所以当 $s\to\infty$ 时,方程右边第二项将趋于零。因为 $|\phi|<1$,所以方程右边第一项当 $s\to\infty$ 时有

$$\lim_{s\to\infty} \sigma^2 \sum_{i=0}^{s-1} \phi^{2i} = \sigma^2(1-\phi^2)^{-1} \tag{12}$$

以上的讨论可以推广到 GRACH(p,q)过程。

(二) 条件方差的持续性和协同持续性

条件方差的持续性是指当前条件方差对所有预测期的条件方差存在持续性的影响,即当前条件方差并不随着时间的推移而趋于零。条件方差的持续性最早是由 Engle 和 Bollerslev(1986)[6]提出的,他们对 IGARCH 模型的研究揭示了条件方差存在的持续特性。Bollerslev 和 Engle(1993)[7]讨论了向量 GARCH 模型的持续性问题,并提出了协同持续的思想,即如果向量 GARCH 过程的每一个分量都是持续的,而向量 GARCH 过程的某种线性组合却不表现出持续性,则称向量 GARCH 过程是协同持续的。协同持续表明了向量 GARCH 过程各分量之间存在一种长期的线性均衡关系。现在我们给出持续性的定义。

定义 1[8]:如果 ε_t 满足:$\lim_{k\to\infty} E_t(V_{t+k}(\varepsilon_{t+k+1}))\neq c$,则称 ε_t 是关于方差持续的,反之,则称之为非持续的。

其中 $E_t(\cdot)$表示 t 时期的条件期望,$V_{t+k}(\cdot)$表示 $t+k$ 时期的条件方差,c 表示 ε_t 的无条件方差。这个定义说明对条件方差预测来说,当前方差的扰动在概率的意义下并不随着时间的推移而趋于零。

下面我们给出向量 GARCH 模型的持续性和协同持续性定义。设 ε_t 为一个 N 维向量随机过程,且有 $\varepsilon_t|\Omega_{t-1}\sim N(0,H_t)$,$\Omega_{t-1}$表示从过去直到 $t-1$ 时刻的所有已知信息集,H_t 是 $N\times N$ 维矩阵,且是关于 Ω_{t-1}可测的,这里 $Vec(\cdot)$表示把矩阵 H_t 影射为 N^2 维向量的向量算子。则向量 GARCH(p,q)过程可以表示为下列形式

$$\begin{aligned} Vec(H_t) &= W+\sum_{i=1}^{q}A_iVec(\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-i'})+\sum_{i=1}^{p}B_iVec(H_{t-i}) \\ &= W+A(L)Vec(\varepsilon_t\varepsilon_t{}')+B(L)Vec(H_t) \end{aligned} \tag{13}$$

其中 W 是一个 N^2 维向量,L 为滞后算子,$A(L)$和 $B(L)$分别为 q 阶和 p 阶滞后算子多项式,A_i 和 B_i 均为 $N^2\times N^2$ 矩阵,且 A_i 和 B_i 使 H_t 正定。

定义 2[8]:称 ε_t 是关于条件方差一阶单整的,如果$\det[1-A(\lambda^{-1})-B(\lambda^{-1})]=0$ 存在一个单位根。其中 $\det[\cdot]$表示行列式,λ 表示矩阵的特征根。

定义 3[8]:称向量 GARCH(p,q)过程是关于方差持续的,如果它是单整的。

定义 4:称向量 GARCH 模型是协同持续的,如果向量 CARCH 模型的系数多项式矩阵存在一个单位根,并且存在一个向量 $\alpha\in R^N$,$\{Vec(\alpha\alpha')\}\neq 0$,使得

$$\begin{aligned} Vec(\alpha\alpha')'Vec(H_t) = & W_0+\sum_{i=1}^{q}(Vec(\alpha\alpha')'A_i)Vec(\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-i}{}') \\ & +\sum_{j=1}^{p}[Vec(\alpha\alpha')'B_j]Vec(H_{t-j}) \end{aligned} \tag{14}$$

的系数多项式矩阵

$$\sum_{i=1}^{q}Vec(\alpha\alpha')'A_i+\sum_{j=1}^{p}Vec(\alpha\alpha')'B_j \tag{15}$$

所有特征值的模都在单位圆内。其中 $W_0=Vec(\alpha\alpha')'W$。$Vec(\alpha\alpha')$表

示一个 N^2 向量。从这个定义可以看到，协同持续向量可能不仅仅是一个，设为 $r\geqslant 1$ 个，这样，协同持续向量就构成了一个秩为 r 的 $N^2\times r$ 矩阵。

三、存在条件异方差的资本资产定价模型

资本资产定价模型要求在未来不确定性事件的基础上使投资效用最大化。假设某个投资者拥有资产 w_t，在存在无风险投资证券（如国债）的条件下，他以一部分资产投资无风险证券（购买国债），另一部分投资风险证券（如购买股票），形成一个简单的投资组合。即投资者以价格 p_t 购买某种股票 q_t 股，其余资产 x_t 全部用来购买国债，股票投资期末的收益为 y_{t+1}，$y_{y+1}=p_{t+1}+d_t$，其中 p_{t+1} 为 $t+1$ 时股票的价格，d_t 为 t 期期末股票的股息或红利。国债投资期末的收益为 r_tx_t，其 r_t 为无风险利率加上一。根据组合投资理论，为使期望收益最大和风险最小，上述问题可以用数学模型表示为：

$$\max_{q_t}\quad 2E_t(q_ty_{y+1}+r_tx_t)-\lambda_tV_t(q_ty_{t+1})$$

$$\text{s. t. } w_t = x_t + p_tq_t \tag{16}$$

这里 λ_t 表示一个随时间变化的比例系数。通过极值求解，可以得到：

$$p_t=\frac{1}{r_t}E_t(y_{t+1})-\frac{\lambda_tq_t}{r_t}V_t(y_{t+1}) \tag{17}$$

设 $\delta_t=\lambda_tq_t$，为讨论方便，我们把 δ_t 和 r_t 视为常数，当投资期为 s 时，上式就为：

$$p_t=\frac{1}{r_t^s}[E_t(y_{t+s})-\delta_tV_t(y_{y+s})] \tag{18}$$

这里 p_t 就表示为投资者愿意为 s 期股票所支付的价格。如果 y_t 可以表示为一个一阶自回归过程（高阶情况与一阶类似）$y_t=\phi y_{t-1}+\varepsilon_t$，则

$$V_t(y_{t+1})=V_t(\varepsilon_{t+1})=h_{t+1} \tag{19}$$

同时，y_t 也可以表示为一个无穷阶的移动平均过程：

$$y_t=\sum_{i=0}^{\infty}\theta_i\varepsilon_{t-i}=\theta(L)\varepsilon_t \tag{20}$$

则有

$$y_{t+s}=\sum_{i=0}^{\infty}\theta_i\varepsilon_{t+s-i}=\sum_{i=1}^{s}\theta_{s-i}\varepsilon_{t+i}+\sum_{i=0}^{\infty}\theta_{s+i}\varepsilon_{t-i}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\theta_{s-i}\varepsilon_{t+i}+y_t$$

$$V_t(y_{t+s})=E_t\Big[\sum_{i=1}^{s}\theta_{s-i}\varepsilon_{t+i}\Big]^2=\sum_{i=1}^{s}\theta_{s-i}^2E_t(h_{t+i}) \tag{21}$$

再回到价格公式，由(18)式在 $t+1$ 时刻，前向 s 期的价格 p_{t+1} 为

$$p_{t+1}=r_t^{1-s}[E_{t+1}(y_{t+s})-\delta_tV_{t+1}(y_{t+s})] \tag{22}$$

将上式两端取期望并乘以 r_t^{-1}，再与(18)式相减就得到与 p_{t+1} 的期望有关的 p_t 的价格公式。

$$p_t=r_t^{-1}E_t(p_{t+1})-\delta_tr_t^{-s}[V_t(y_{t+s})-E_t(V_{t+1}(y_{t+s}))] \tag{23}$$

根据(21)式，有

$$p_t=r_t^{-1}E_t(p_{t+1})-\delta_tr_t^{-s}\theta_{s-1}^2h_{t+1}$$

这个公式与一期定价公式(17)相类似。显然 y_{t+1} 的条件方差对 p_t 有明显的影响，并且这种影响是可以准确度量的。从这里我们可以得出结论，y_t 的未来的条件方差将影响当前资产的定价。但是，当 s 很大时，即投资期比较长时，有

$$E_t(h_{t+s})=\omega+\sum_{i=1}^{q})\alpha_iE_t(\varepsilon_{t+s-i}^2)+\sum_{i=1}^{p}\beta_iE_t(h_{t+s-i}) \tag{24}$$

经过迭代可以得到

$$E_t(h_{t+s})=\omega+\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i+\beta_i)E_t(h_{t+s-i})$$

$$=\sigma^2+\Big[\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i+\beta_i)\Big]^{s-1}h_{t+1} \tag{25}$$

其中 $m=\max\{p,q\}$，$\sigma^2=\omega(1-\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i+\beta_i))^{-1}$，当 s 取很大的值时，根据 GARCH 过程的平稳性条件，$\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i+\beta_i)<1$，方程(25)右边第二项将趋于零。所以 $E_t(h_{t+s})\approx\sigma^2$。因此当投资期很长时，当前条件方差的影响就可以忽略。此时价格公式为

$$p_t = \frac{1}{r_t^s}\left[E_t(y_{t+s}) - \delta_t\sigma^2\right] \tag{26}$$

但是，如果条件方差存在持续性，那么当前条件方差的影响就不能忽略。如果 ϵ_t 服从一个 GARCH(1,1)过程，由 $\alpha+\beta=1$(表明该过程是持续的)，则有

$$\begin{aligned} h_t &= \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + (1-\alpha)h_{t-1} \\ E_t(h_{t+s}) &= \omega + E_t(h_{t+s-1}) = (s-1)\omega + h_{t+1} \end{aligned} \tag{27}$$

此时 ϵ_t 的无条件方差为$(s-1)\omega$。如果令 y_t 是随机游动过程，则 $E_t(y_{t+1})=y_t$。扰动项 ϵ_t 为一不带趋势项($\omega=0$)的 GARCH(1,1)过程，则有

$$V_t(y_{t+s}) = E_t\left(\sum_{i=1}^{s}\epsilon_{t+i}^2\right)^2 = E_t\left(\sum_{i=1}^{s}h_{t+i}\right) = sh_{t+1} \tag{28}$$

由(17)式可得

$$p_t = \frac{1}{r_t^s}\left[y_t - \delta_t sh_{t+1}\right] \tag{29}$$

当 $r_t=1$ 时，

$$p_t = y_t - \delta_t sh_{t+1} \tag{30}$$

因此当 $\delta_t\neq0$ 时，时变的风险率将影响股票的定价，并且这种影响将是显著而持续的。

四、动态 APT 因子模型以及持续性和协同持续性

(一) 时变的 APT 因子模型及性质

令$\{y_t\}$是一个 N 维离散时间的资产超额收益向量，其条件均值和方差函数分别为

$$\begin{aligned} E_{t-1}(y_t) &= u_t \\ Var_{t-1}(y_t) &= H_t \quad t = 0,1,\cdots \end{aligned} \tag{31}$$

其中 u_t 为 N 维随机向量，H_t 是对所有时间 t 几乎正定的对称的 $N\times$

N 协方差矩阵，令 N 维向量 ε_t 表示条件均值的新生过程向量或扰动向量

$$\varepsilon_t \equiv y_t - u_t$$

根据 Ross(1976)提出的套利定价理论，一个典型的资本资产超额收益可以表示为

$$y_t = u_t + \sum_{k=1}^{K} g_{kt}\eta_{kt} + v_t \tag{32}$$

其中

$$\begin{aligned} u_t, g_{kt} &\in F_{t-1} & \forall k,t \\ E_{t-1}(\eta_{kt}) &= 0 & \forall k,t \\ E_{t-1}(\eta_{kt}\eta_{jt}) &= 0 & \forall j \neq k, \forall t \\ E_{t-1}(v_t) = E_{t-1}(v_t \mid \eta_{1t}, \cdots, \eta_{Kt}) &= 0 & \forall t \\ E_{t-1}(v_t v_t') &= \Omega & \end{aligned}$$

这里 η_{kt} 表示影响所有资产的超额收益的因子，v_t 是噪声向量，g_{kt} 表示时变因子载荷向量，F_{t-1} 表示已知信息集合，Ω 是一个 $N\times N$ 半正定矩阵。

Engle 等人[9]曾指出该因子模型的协方差结构有一些良好的特性，总结如下：

性质 1：总可以构造某个资产超额收益组合，使该组合的条件方差可以代替因子方差。也即 H_t 总可以被表示成如下形式

$$H_t = \sum_{k=1}^{K} \beta_k\beta_k' h_{kt} + \Omega^* \tag{33}$$

其中 h_{kt} 是 N 种资产的某个组合的条件方差，Ω^* 是一个时不变 $N\times N$ 矩阵。

实际上，选择 α_k 使之与 $\beta_j, j\neq k$ 正交，并且 $\alpha_k'\beta_k=1$（因为 β_k 是线性独立的，因此这样的 α_k 总是存在的，并且如果 β_k 也是正交的，那么 $\alpha_k=\beta_k/(\beta'_k\beta_k)$，由 α_k 作为一个权重向量所构成的组合 $P_{kt}\equiv\alpha_k' y_t$ 的超额收益的条件方差可以表示为

$$h_{kt} \equiv \alpha_k' H_t \alpha_t = \theta_{kt} + s_k \tag{34}$$

其中 $s_k\equiv\alpha_k'\Omega\alpha_k$，则有

$$H_t = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \beta_k' h_{kt} + \Omega^* \tag{35}$$

其中 $\Omega^* = [\Omega - \sum_{k=1}^{K} \beta_k \beta_k' s_k]$。

使用 α_k 作为权重组成的组合被 Engle 等人(1990)[9]称为因子表示组合(factor—representing portfollios),权重可以是正的,也可以是负的。每个组合的条件方差与它的潜在变量(即因子方差)θ_{kt}是完全相关的。

性质 1 表明在因子表示组合中的信息对预测单个资产的方差和协方差是充分的,也即如 Granger, Robin 和 Engle(1984)[10]所指出的从因子表示组合到单个资产收益之间存在"关于方差的因果关系"(causaility in variance),这个性质在研究因子表示组合的条件方差的动态特性时是非常有利的。

性质 2:H_t 的多阶段预测可以直接从 h_{kt} 的多阶段预测得出。实际上,在时间 t 时的 $H_{t+\tau}$的预测可以表示为

$$E_t(H_{t+\tau}) = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \beta_k' E_t(h_{kt+\tau}) + \Omega^* \tag{36}$$

这个性质对多种资产的衍生资产估计以及资本预算问题是非常有用的。

性质 3:H_t 的扰动的持续性可以由 h_{kt} 的扰动的持续性来决定。特别地,对于 $E_t(H_{t+\tau}) = H_t$,其充分必要条件为 $E_t(h_{kt+\tau}) = h_{kt}$。

现在我们讨论多因子情况下的资本资产定价公式。令 R_t^c 是在时刻 t 的消费边际效用的变化率。假设 R_t^c 和资产超额收益向量 y_t 的随机行为可以由下列动态因子模型给出

$$y_t = u_t + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \eta_{kt} + v_t \tag{37}$$

$$R_t^c = u_t^c + \sum_{k=1}^{K} b_k \eta_{kt} + \mu_t^c \tag{38}$$

其中 $u_t, u_t^c \in F_{t-1}$ F_{t-1}为已知信息集。 $\forall t$

$$E_{t-1}(\eta_{kt}) = 0 \qquad \forall k, t$$

$$E_{t-1}(\eta_{kt}\eta_{jt}) = 0 \qquad \forall j \neq k \, \forall t$$

$$E_{t-1}(v_t) = E_{t-1}(v_{-t} \mid \eta_{1t}, \cdots, \eta_{Kt}) = 0 \qquad \forall t$$

$$E_{t-1}(\mu_t^c) = E_{t-1}(\mu_t^c \mid \eta_{1t}, \cdots, \eta_{Kt}) = 0 \qquad \forall t$$

$$Var_{t-1}(\eta_{kt}) = \theta_{kt} \qquad \forall t$$

$$E_{t-1}(v_t v_t{}') = \Omega, \quad E_{t-1}(v_t \mid \mu_t^c) = 0, \quad Var_{t-1}(\mu_t^c) = \sigma_c^2 \qquad \forall t$$

则

$$\begin{bmatrix} y_t \\ R_t^c \end{bmatrix} \mid F_{t-1} \sim N\left[\begin{bmatrix} u_t \\ u_t^c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{K}\beta_k\beta_k{}'\theta_{kt} + \Omega & \sum_{k=1}^{K}\beta_k b_k\theta_{kt} \\ \sum_{k-1}^{K}\beta_k{}' b_k\theta_{kt} & \sum_{k=1}^{K} b_k^2\theta_{kt} + \sigma_c^2 \end{bmatrix}\right] \tag{39}$$

资产收益将满足下列定价方程

$$u_t = \delta_t \cdot \mathrm{cov}_{t-1}(y_t, R_t^c) = \sum_{k=1}^{K}\beta_k \cdot (\delta_t b_k \theta_{kt}) \tag{40}$$

其中 δ_t 是一个偏好参数。

令 $\{P_{kt} = \alpha_k{}' y_t, k = 1, \cdots, K\}$ 是 K 因子表示组合所组成的集合的资产超额收益，π_{kt} 表示第 k 个因子表示组合的风险率，根据前面的讨论，π_{kt} 可以表示为

$$\pi_{kt} = \alpha_k{}' u_t = \delta_t b_k \theta_{kt} \tag{41}$$

则有

$$u_t = \sum_{k=1}^{K}\beta_k \pi_{kt} \tag{42}$$

因为 $h_{kt} = \theta_{kt} + s_k$，所以当 $\delta_t = \delta$ 时

$$\pi_{kt} = c_k + \gamma_k h_{kt} \tag{43}$$

其中 $c_k \equiv -\delta \cdot b_k s_k, \gamma_k \equiv \delta \cdot b_k$。

现在我们研究 h_{kt} 或 θ_{kt} 的表现形式。原则上，h_{kt} 可以是关于 $t-1$ 时刻信息集的任何可测变量的函数，但是一个一般的表示形式却并不一定切合实际。对 h_{kt} 的动态特性的一般的表示公式仍然需要估计由 N 种资产组成的系统，为了简化这一问题，对 h_{kt} 的动态特性的进一步约束是必要的。

最简单但也是最严格的假定是“单变量组合表现形式假定(univariate portfolio representation assumption)”[9]。K 个因子表示组合所