面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

代数与几何基础

张肇炽　主编
张肇炽　徐　仲　等编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 21 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for 21st Century

代数与几何基础

张肇炽 主编

张肇炽 徐 仲 等编著

高 等 教 育 出 版 社

HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材和普通高等教育“九五”国家教委重点教材，主要内容为线性代数与空间解析几何。

本书力求以近现代数学思想、观点统一处理有关内容，较传统工科的相应教材有了较大的拓宽、充实、更新和提高。全书以线性空间与线性映射为主线，将线性代数与解析几何融为一体，并与分析的内容相互渗透，使之成为一个有机的整体，以培养学生抽象思维和逻辑推理能力，加强应用数学能力的培养，也使课程体系整体优化。全书共八章，各章后均配有习题，书末有习题答案与提示。本书可作为理工科院校对数学要求较高的非数学类专业本科生教材；适当补充部分内容后也可作为信息与计算机科学等理科专业相关课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

代数与几何基础/张肇炽主编；徐仲等编著．—北京：高等教育出版社，2001

面向21世纪课程教材

ISBN 7-04-009136-4

Ⅰ．代… Ⅱ．①张…②徐… Ⅲ．①代数-高等学校-教材②解析几何-高等学校-教材Ⅳ．O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第75487号

代数与几何基础

张肇炽　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2001年6月第1版
印　　张	19.75	印　　次	2001年6月第1次印刷
字　　数	360 000	定　　价	16.90元

面向21世纪课程教材

普通高等教育“九五”
国家教委重点教材

前　言

本书是按照原国家教委面向21世纪教学改革立项项目“工科数学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”的要求，编写的一本改革教材，面向重点院校对数学要求较高的理工科非数学类专业.

20世纪80年代以来，主要为了适应计算机计算的需要，线性代数在我国部分高校逐渐成为一门“工程数学”必修课，内容以运算为主，突出“工具性”.解析几何(空间部分)长时间里则是“高等数学”课的一章，主要为了学习多元微积分的需要，介绍一些简单的空间几何形体.本书把“空间解析几何”从传统“高等数学”中分离，与“线性代数”合为一门“代数与几何”课程，和以微积分为主体的课程一起成为双线并设的工科数学基础课程，旨在突出其基础性地位，强调它的“素质性”教育作用.

线性代数主要是研究有限维线性空间及其线性映射(变换)这一代数结构的学科(流行的说法是研究线性范畴的理论).更一般地，线性代数讨论用数学语言表述自然科学中最为普遍的概念之一——线性概念.究其根源，它来自于古老的Euclid几何、线性方程组理论和解析几何.后者是基于在实数与直线上的点之间，实数对与平面上的点之间，以及实数三元组与空间中的点之间，都存在着自然的对应.于是数的运算和数集之间的关系可以用几何的方式来解释，而几何问题可以表述为代数问题，这正是17世纪Descartes和Fermat开始的工作.在此后的发展中，线性代数和几何学始终密切相关.线性空间的概念是几何空间的一种代数抽象；变换的理论，特别是正交变换、仿射变换、射影变换等都是从几何中产生的.一般地说，几何学的讨论给代数提出了一些问题，而代数研究的结果又应用到几何学中去.它们相互促进，并肩前进.例如，线性代数的重要对象——矩阵，有关它的等价、相合、正交相合、相似等问题，都明显地带着几何色彩。一个矩阵就是一个线性变换在选定基下的表示.上述种种问题就是讨论矩阵在所述关系下的不同分类及其全系不变量.这些问题都来源于19世纪的几何学.又如，行列式的研究始于线性方程组的求解，Leibniz早在17世纪90年代用行列式解过含有两个未知数的线性方程组.此后18世纪行列式的发展继续沿着方程组求解及其自身性质的研究.在19世纪，它同矩阵理论发展彼此促进，它们在解线性方程组、消元法、二次型以及高次型、变量代换、线性变换和不变量理论等的研究中发挥了重要作用，而且也在这些研究过程中得到了发展. 这些课题许多都具

有明显的几何色彩或者就来自几何学的需求.在现代工程技术的许多领域里,由于计算机及图形显示的强大威力,几何问题的代数化处理,代数问题的可视化处理,把代数与几何更加紧密地结合在一起,代数与几何综合的方法在工程技术中的应用已经相当地广泛和深入 这些都对理工科非数学类专业的教学,提出了新的要求.现在这样设课正是体现了这种内在联系与结合.

作为新编教材,本书力求以原国家教委"'九五'重点教材审稿办法"之"审稿要求与标准"中提出的各项作为写作的指导准则,即:一、注重教材的科学性,"具有与本门学科发展相适应的科学水平,有较强的理论性和系统性,能够正确地阐述本门学科的科学理论和概念,贯彻理论联系实际的原则";二、要成为教学适用的基本参考书(当然不是惟一参考书),"符合本门课程在教学计划中的地位和作用,要求恰当,取材合适,内容阐述循序渐近,富有启发性,便于自学,使学生能够掌握基本理论和基本技能,利于学生相关能力的培养";并且"文字精确、流畅,符合规范的要求;插图正确,文字配合适当"(以上引文见上述"审稿要求与标准").与此同时,面向21世纪的教学改革教材还必须为近年来已逐渐形成共识的数学教育的"知识、能力和素质(或素养)"这一总目标服务,就是要在传输知识的同时,着意去启迪思维,开发悟性,激发兴趣、美感和创新的激情,培养应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

基于以上一些认识,本书的编写力求突出以下诸点:

(一)致力于以近现代数学思想、观点和语言处理有关题材,并使其内容比传统的工科相应教材有较大的拓宽、充实、更新和提高.例如,在线性方程组之后,介绍广义逆矩阵,从而使线性方程组的理论更趋完整与统一;在相似对角化之后,介绍矩阵的Jordan标准形(相应的理论证明省略);在二次型之后,介绍双线性函数;最后一章初步介绍一些基本的代数结构——群、环、域等.

(二)将线性代数与解析几何融为一体讲授.除了前面分析的学科内在根源外,从教学上看,这样做使学生易于由摸得着看得见的解析几何的事实推广到线性代数的抽象概念,又能从线性代数的高度更深刻地了解解析几何的内容.

(三)突出线性空间的结构和线性映射两大核心内容的地位及训练,并尽可能以它们为主线将各章内容贯穿起来,使之成为一个有机的整体,以期达到培养学生抽象思维和逻辑推理的能力,也使课程体系整体优化.

(四)注意揭示数学理论的相关背景,多处安排了不同领域的一些典型范例,如多项式插值、矩阵编码和译码、Fibonacci数列、多元函数极值等等.这些自然也是数学建模的初步训练.

(五)力求遵循教育学和教学法的原理,符合教学过程中学生的认知规律,切近我国大学(主要是重点高校)低年级学生的实际水平.在有关题材的处理上,尽量做到由易到难,由具体到抽象,由特殊到一般.如由几何空间到n维向量空间,再到线性空间;由二次曲面到二次型,再到双线性函数等,力求通俗

易懂，并便于学生在教师指导下自学.

众所周知,线性代数的基本内容在19世纪已经形成,其进一步发展主要是它的应用研究、数值线性代数和多重线性代数的研究.解析几何近代进入了多维的和无穷维的研究,以及代数几何的研究.作为本科生60～70学时的基础课程,除了就某些重要而又简单的应用予以例示外,这些主要来自本世纪的进展自然无法涉及.

现代数学最基础的内容仍然是分析、代数、几何,它们密切相关,互相渗透基于这种认识,本书也可安排在"一元微积分"与"多元微积分"之间进行一条线教学,特别对于教育部基础教育司制订的"全日制普通高级中学数学教学大纲"(1996)试点的省、市的高中毕业生,入大学后无论"双线"、"单线"安排,本书都将是适宜的.讲完全书基本内容约需64学时.如果适当补充部分内容,还可作为信息与计算机科学等更高要求的专业类相关课程的教材.

本书四年多来已五易其稿,参加前三稿编写、修改的有张肇炽、叶正麟、王红和彭国华,由张肇炽主要执笔并统稿.1998年8月专家评审后,送审稿(即第三稿)又由徐仲、彭国华和唐国平分别修改其中第一、五、六、七章与第二、三、四章和第八章,最后由张肇炽、徐仲共同统稿.先后参加过本书研究、讨论的还有张凯院、吕全义、王雪芳等。作为讲义用稿,自1996学年至1999学年,曾同时在西安交通大学、西北工业大学各两个大班试用四届,先后有西安交通大学魏战线、李翠华、艾文宝三位副教授和阮小娥、翟桥柱两位讲师,西北工业大学张凯院、吕全义两位副教授和彭国华副教授、唐国平教授、徐仲教授,分别主讲了同名课程(其中阮小娥、彭国华两位连续主讲了三次).试点课的实践、主讲教师的经验和他们的宝贵意见,对本书的修改和完善起了重要作用.编者藉此机会谨向以上各位老师和积极支持、参与这些试点的两校同学,表示衷心的感谢！我们衷心感谢本书主审熊洪允教授、谢国瑞教授,他们花费了大量时间,认真细致地审阅了书稿,提出了许多宝贵的意见和建议.感谢主持和参加审稿会的汪国强、赵中时、乐经良和徐文雄诸教授对书稿提出的宝贵意见和建议.他们的意见和建议对本书的定稿和质量起了十分重要的作用.感谢高等教育出版社文小西编审、本书的责任编辑李陶对本书编写、出版的关心、大力支持和辛勤的工作.

本书得到原国家教委教学改革和重点教材建设基金的资助,还得到西北工业大学教务处、应用数学系自始至终的关心、支持和学校教学改革基金的资助,值此我们向以上各方一并表示感谢.

面向21世纪的改革教材应有多种模式、多个品种,我们只就一种模式作了初步探索与尝试.虽然尽了努力,但限于水平和经验,谬误、不妥,诚恐难免.加之一些问题虽然有所认识,做起来仍会力不从心,甚或偏离.尚祈有关专家、同行和广大读者批评指正.

张肇炽

2000年5月

目　　录

第一章 行列式·消元法

行列式的概念是人们从解线性方程组的需要中建立起来的.尽管行列式理论不是线性代数的主体,但它是处理各类代数问题的不可缺少的工具,在数学、物理、力学和工程技术等许多领域中都有广泛的应用.本章主要介绍行列式的概念与性质;行列式的展开定理; Cramer 法则;求解线性方程组的消元法等.

§1.1 行列式概念

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,由消元法求得的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为便于记忆,引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,称之为**二阶行列式**,用来表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

如果把 a_{11}, a_{22} 的连线称为主对角线,把 a_{12}, a_{21} 的连线称为次对角线,则二阶行列式的值就等于主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积.这种算法称为**对角线法则**.按此法则,(1.1) 的解(1.2) 可用二阶行列式表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

像这样用行列式来表示解,形状简单,容易记忆.再看三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

假如用数 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$ 乘(1.4)的第一式,用数 $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$ 去乘第二式,用数 $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ 去乘第三式,然后把这三个新的方程加起来,就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.$$

当 x_1 的系数

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时,得出

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3).$$

同样可求得 x_2 和 x_3 的表达式.为了便于记忆,引入

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.5}$$

上式左端的记号称为**三阶行列式**,它代表右端六项的代数和.三阶行列式的值也可采用**对角线法则**来计算,见图1.1,实线上三个元素的乘积组成的三项都取正号,虚线上三个元素的乘积组成的三项都取负号.

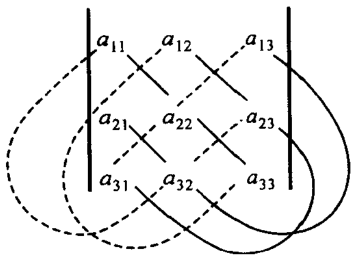

图 1.1

按此法则,(1.4)的解可用三阶行列式表为

$$x_1=\frac{D^{(1)}}{D},\quad x_2=\frac{D^{(2)}}{D},\quad x_3=\frac{D^{(3)}}{D},$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D^{(1)}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D^{(2)}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D^{(3)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

自然会想到怎样把二阶、三阶行列式的定义推广到一般的 n 阶行列式.在前面,由两个未知量中消去一个非常容易,但由三个未知量中消去两个就已经很麻烦,至于一般由 n 个未知量中消去 $n-1$ 个几乎是不可能的了.因此,不能用前面类似的方法来定义 n 阶行列式.为了定义一般的 n 阶行列式,需要介绍排列的有关概念.

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $q_1q_2\cdots q_n$ 称为一个 **n 阶排列**. 在排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 中,如果一个大数排在一个小数之前,就称这两个数组成一个**逆序**;该排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**,记为 $\tau(q_1q_2\cdots q_n)$. 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如,45321 是一个 5 阶排列,其中 43,42,41,53,52,51,32,31,21 是逆序,逆序数是 9,该排列是奇排列. $12\cdots n$ 是一个 n 阶排列,逆序数是 0,它是偶排列,这一排列称为**自然排列**. $n(n-1)\cdots 21$ 是一个 n 阶排列,其逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$.

容易知道,不同的 n 阶排列的总数有 $n!$ 个.

从二阶和三阶行列式的定义(1.3)和(1.5)可以看出,它们都是一些乘积的代数和,而每一项乘积都是由行列式中位于不同行和不同列的元素构成的,并且代数和恰由所有这种可能的乘积组成. 对于二阶行列式,这种乘积项有 $2!=2$ 项,而对于三阶行列式,这种乘积项有 $3!=6$ 项. 另一方面,每一乘积项都带有符号. 在三阶行列式的表达式(1.5)中,项的一般形式可以写成

$$a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3},$$

其中 $q_1q_2q_3$ 是 1,2,3 的一个排列. 可以看出,当 $q_1q_2q_3$ 是偶排列时,对应的项在(1.5)带有正号,当 $q_1q_2q_3$ 是奇排列时带有负号. 二阶行列式显然也符合这个原则.

上面关于二阶和三阶行列式的分析对于理解一般的 n 阶行列式的定义是有帮助的.

定义 1.2 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$,把它们写成一个有 n 行和 n 列的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

称之为 **n 阶行列式**,它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$$

的代数和,这里 $q_1q_2\cdots q_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $q_1q_2\cdots q_n$ 是偶排列时,这项取正号. 而当 $q_1q_2\cdots q_n$ 是奇排列时,这项取负号. 用式子表示,就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}, \tag{1.7}$$

其中 $\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. n 阶行列式(1.6)常用 D 或 D_n 来表示,简记为 $D=\det(a_{ij})$.(1.7)称为 n 阶行列式的展开式,a_{ij} 称为行列式的 i 行 j 列的元素.

当 $n=2,3$ 时,按此定义的二阶、三阶行列式与用对角线法则求得的结果一致.当 $n=1$ 时,$|a_{11}|=a_{11}$.注意不要与绝对值记号相混淆.

例 1.1 计算 n 阶行列式(其中未写出的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 根据定义,n 阶行列式中项的一般形式为

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}.$$

由于在这个行列式的第 n 行中,除 a_{nn} 外,其余元素都是0,所以只要考虑 $q_n=n$ 的项即可;再看第 $n-1$ 行:这一行中除 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 外,其余元素都是0,因此 q_{n-1} 只有 $n-1$ 和 n 这两种可能.但因 $q_n=n$,且 $q_{n-1}\neq q_n$,所以 $q_{n-1}=n-1$.这样逐步推上去,可知:在展开式中,除去

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这一项外,其他的项都等于 0.于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这样的行列式称为**上三角形行列式**(类似地有**下三角形行列式**).这个例子说明:上三角形行列式等于**主对角线**(从左上角到右下角这条对角线)上元素的乘积.作为这种行列式的特殊情形,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这样的行列式称为**对角行列式**,它也等于主对角线上元素的乘积.

例 1.2 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}.$$

解 依行列式定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

这一例子表明,行列式中**次对角线**(从右上角到左下角这条对角线)上元素的乘积不一定取负号,从而二、三阶行列式的对角线法则不能用于四阶及四阶以上的行列式.

以上这些例子的结论都可以作为公式来应用.

利用行列式的定义计算一个 n 阶行列式时,需要计算 $n!$ 个项,而每个项又是 n 个元素的乘积,需要作 $n-1$ 次乘法,所以一共需作 $n!(n-1)$ 次乘法.当 n 比较大时,$n!(n-1)$ 就是一个惊人的数目,即使用电子计算机来进行计算也是难以实现的.因此,必须对行列式作进一步的研究,找出其他可行的计算方法.

习题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a+b & a \\ a-b & 2a-b \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x-5y=6, \\ x-y=5; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=10, \\ x_1+4x_2-2x_3=-8, \\ 3x_1+2x_2-x_3=1. \end{cases}$

3. 求下列排列的逆序数,并确定其奇偶性:

(1) 4267351; (2) 1357246; (3) 54782136; (4) 61472853.

4. 选择 i 与 j 使

(1) $215i7j946$ 为奇排列; (2) $3972i15j4$ 为偶排列.