YUN CHOU XUE — GUAN LI ZHONG DE DING LIANG FANG FA

上海研究生教育用书

# 运筹学

## ——管理中的定量方法

黄培清　刘樵良　任建标　编著

上海交通大学出版社

本教材得到 上海市研究生教育专项经费
上海发展汽车工业教育基金会 资助

# 运 筹 学

## ——管理中的定量方法

黄培清　刘樵良　任建标　编著

上 海 交 通 大 学 出 版 社

## 内容提要

本书系统地讨论了运筹学中大量的管理定量方法，内容有线性规划、整数规划、动态规划、图与网络分析、存储论、决策论、博弈论等。

本书在讨论运筹学各种理论的原理与方法的基础上，突出了对现实背景的理解和说明、数学建模以及相应的计算机软件的求解。各章后附有一定数量的习题与案例。

本书可作为高等院校非数学专业本科生、研究生以及 MBA 学生的教材，也可作为广大管理工作者、科研人员和工程技术人员的参考读物。

**图书在版编目(CIP)数据**

运筹学：管理中的定量方法/黄培清等编著. - 上海：上海交通大学出版社，2000
ISBN 7-313-02465-7

Ⅰ.运… Ⅱ.黄… Ⅲ.①运筹学 - 研究②管理 - 定量分析 - 分析方法 Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 32654 号

**运筹学——管理中的定量方法**
**黄培清　刘樵良　任建标　编著**
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030)
电话：64071208　出版人：张天蔚
常熟市印刷二厂印刷　全国新华书店经销
开本：890mm × 1240mm 1/32　印张：9.875　字数：283 千字
2000 年 10 月第 1 版　2000 年 10 月第 1 次印刷
印数：1～1050
ISBN 7-313-02465-7/O·125　定价：18.00 元

# 前　言

运筹学是近几十年形成的一门新兴学科，它主要运用数学方法研究各种系统的优化途径及方案，为决策者提供科学决策的依据。运筹学的主要研究对象是各种组织系统的管理问题及其生产经营活动，其主要研究方法是定量化和模型化方法。运筹学的目的在于针对所研究的系统，求得一个合理运用人力、物力和财力的最佳方案，发挥和提高系统的效能及效益，最终达到系统的最优目标。实践表明，随着科学技术的日益进步，生产经营的日益发展，以及 21 世纪网络经济的迅猛发展，运筹学已成为现代管理科学的重要理论基础，已被人们广泛地应用到经济管理、工业、农业、商业、国防、科技等各个领域中去，发挥着越来越重要的作用。

本书的写作思路是从大量的实际问题出发，分析所要解决的问题，总结出数学模型，然后用阐述性的语言来介绍相应的运筹学理论，最后对模型用相应的计算机软件进行求解，并对结果进行分析。我们的思路有别于现有的许多运筹学著作，这也是我们的一种尝试，目标是要让读者真正掌握运筹学的大量理论和方法，并且能够对遇到的实际问题分析和求解。

全书共有 9 章：第一章是绪论，第二章介绍了线性规划原理及解法和灵敏度分析，第三章介绍了整数规划，第四章介绍了动态规划，第五章介绍了图与网络，第六章介绍了统筹方法，第七章介绍了决策分析，第八章介绍了博弈论，第九章介绍了存储论。

本书的出版得到了上海市研究生教育专项经费及上海发展汽车工业教育基金会的资助，得到了上海交通大学管理学院领导的大力支持。

管理学院系统工程研究所运筹小组对书稿进行了审阅，并提出了宝贵意见，在此表示感谢。

由于我们水平有限，错误难免，敬请广大读者批评指正。

编著者

2000年4月12日

# 目　录

# 第一章 绪 论

运筹学产生于20世纪30年代后期的二战时期。当时,英国已研制成雷达,这样就出现了一个问题,怎样把科学家研制的雷达与军队的防空设施(高炮、歼击机等)协调起来,从而提高防空系统的有效性问题。此时,第一次出现了"Operational Research"这样的名词,直译为"作战研究"。英国第一个运筹小组的领导人是一位著名的物理学家M.S. Blackett(此人后来因在宇宙射线方面的研究成果而获得诺贝尔物理学奖)。组成成员绝大多数是自然科学家(2位数学家,2位普通物理学家,1位理论物理学家,1位天体物理学家,1位测量员,3位生理学家,1位军官)。英国人幽默地称这个小组为"Blackett 杂技团"。稍后,美国也组成一个运筹小组,从事反潜水艇作战。组成成员与英国相仿,大多为自然科学家,包括数学家、物理学家,其中还有一位象棋大师。领导人是物理学家 Philip W. Morse,他后来成为美国运筹学会第一届主席。

当时运筹学在军事领域中的应用取得的显著效果,为运筹学增添了声誉。例如,在第二次世界大战中,德国潜艇严重威胁盟军运输船队。因此,在反潜战中,除研究搜索技术外,一个重要问题是:当侦察飞机发现潜艇后,飞机投掷深水炸弹的最佳时间以及炸弹引爆的最佳深度应是多少?运筹工作者对大量统计数字进行认真分析后,提出:(1)应在潜艇浮出水面或刚下沉时,投掷深水炸弹;(2)炸弹起爆的最佳深度为离水面25英尺(当时深水炸弹所容许的最浅起爆点)。空军采用上述建议后,所击沉的潜艇数量大为增加。

值得注意的是:许多实际问题的解决,仅应用了初等概率和统计。

第二次世界大战以后,运筹学得到了很大的发展。一方面,运筹学得到了广泛应用,它几乎涉及经济管理的所有领域;另一方面,由于运筹学的需要和刺激,在理论方面发展了一些数学分支,例如数学规划、

应用概率、应用组合论、博弈论、数理经济学、系统科学，等等。理论的发展反过来又使运筹学得到更为广泛的应用。

对于学习经济管理的学生来讲，除少数专业(例如管理科学)外，学习运筹学的主要目的在于应用。要在运筹学有关的各数学分支理论发展方面作出贡献固然有相当的难度，运用已有的理论解决实际问题也并非易事。80 年代，前面提到过的麻省理工学院的 Morse 教授曾来华访问，在座谈时有人提出，在运筹学中最难的问题是什么？他回答说，最难的问题是应用，并说他当时的主要工作在于向有关领导人游说，劝他们应用由运筹学方法得出的解决问题的成果。

如果说运筹学是解决经济管理中许多问题的一种有力的武器，那么，对于研究开发武器、制造武器以及使用武器的这 3 种类型的人，有着不同的要求。数学家研究有关各数学分支的理论，对有应用前景的理论，数学家与计算机软件工作者合作研制出相应的计算机应用软件包。对于大多数经济管理人员来讲，他们的主要任务是用好这些工具，即能够巧妙地应用这些工具来解决经济管理实践中提出的问题。

为了用好这一工具，使用这些工具的人也应对运筹学的基本原理有一些了解，包括一些算法的思路及适用范围，等等。基于这一观点，本教材定位于运用运筹学方法解决经济管理问题。

计算机的发展给运筹学在经济管理中的应用带来了广阔的前景。把运筹学中的数学方法用某种计算机语言来描述，写成计算机程序，或者说形成算法，是运筹学在经济管理中得到广泛应用的前提。在经济管理中，有些问题可以用静态规划(线性规划、整数规划等等)来求解，也可以用动态规划或图论方法来求解。即使用同一种方法，例如线性规划，也可能有几种不同的算法(单纯形法、哈奇扬算法、Karmarkar 算法等等)，其效果是不同的。这里就产生了一个问题，怎样来评价算法的“有效性”或者优劣呢？

这里简单介绍一种算法有效性的区别方法：多项式时间算法和非多项式时间算法。这种区别方法认为：算法的时间需求是一个重要指标，而时间需求又与所谓问题的“规模”，即该问题所需输入的数据总量——输入长度有关。为此，提出了一个算法的时间复杂性函数表示

这个算法的时间需求。对每一个可能的输入长度，给出用该算法解决这种规模问题所需的最长时间。所谓多项式时间算法就是它的时间复杂性函数可表示成 $O(p(n))$ 的算法。其中，$p(n)$ 是输入长度 $n$ 的多项式。$O(p(n))$ 表示所用的计算时间能够找到一个多项式来限定。如果该算法所需的计算时间找不到一个多项式来限定，换句话说，随着 $n$ 的增加，该算法所需的计算时间比任何设定的多项式 $p(n)$ 的增加都来得大，则称该种算法为非多项式算法，或者称作指数时间算法。

这两种类型的算法在规模甚小时，差别不明显；但在规模增加时，有较大差别。表 1.1 显示了在 $n$ 增加时几个典型的复杂性函数之间的差异。前面 4 个为多项式时间复杂性函数，后面为非多项式时间复杂性函数。后者以爆炸性的速率随 $n$ 而迅速增长（图中以微秒为单位表示执行时间）。

**表 1.1**

| 时间复杂性函数 | 规模 $n$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| $n$ | .00001 秒 | .00002 秒 | .00003 秒 | .00004 秒 | .00005 秒 | .00006 秒 |
| $n^2$ | .0001 秒 | .0004 秒 | .0009 秒 | .0016 秒 | .0025 秒 | .0036 秒 |
| $n^3$ | .001 秒 | .008 秒 | .027 秒 | .064 秒 | .125 秒 | .216 秒 |
| $n^5$ | .1 秒 | 3.2 秒 | 24.3 秒 | 1.7 分 | 5.2 分 | 13.0 分 |
| $2^n$ | .001 秒 | 1.0 秒 | 17.9 分 | 12.7 天 | 35.7 年 | 366 世纪 |
| $3^n$ | .059 秒 | 58 分 | 6.5 年 | 3855 世纪 | $2\times10^8$ 世纪 | $1.3\times10^{13}$ 世纪 |

下面我们看一下计算机技术的进步对算法的影响。

表 1.2 表明计算机技术进步对几种多项式和指数的时间算法的影响。

**表 1.2**

| 时间复杂性函数 | 用现在的计算机 | 用快 100 倍的计算机 | 用快 1000 倍的计算机 |
|---|---|---|---|
| $n$ | $N_1$ | $100N_1$ | $1000N_1$ |
| $n^2$ | $N_2$ | $10N_2$ | $31.6N_2$ |
| $n^3$ | $N_3$ | $4.64N_3$ | $10N_3$ |
| $n^5$ | $N_4$ | $2.5N_4$ | $3.98N_4$ |
| $2^n$ | $N_5$ | $N_5+6.64$ | $N_5+9.97$ |
| $3^n$ | $N_6$ | $N_6+4.19$ | $N_6+6.29$ |

设当前各典型算法在 1 小时内能解决最大问题的规模为 $N_i$，则当计算机速度增加 100 倍及 1000 倍时，表 1.2 表示其 1 小时内可解决问题规模增加数量。从表 1.2 可以看出，对于 $2^n$ 算法，如果计算机速度提高 1000 倍，在 1 小时内可解决的最大问题规模仅增加约 10，而对于 $n^5$ 算法，这个规模差不多增加到原来的 4 倍。

根据上面的讨论，对于一种类型的问题如果已找到多项式算法，则一般认为这类问题已很好地得到了解决。如果一个问题至今还未找到多项式算法，那么一般认为这个问题是难解的。所谓"难解"，应理解为当问题规模较大时，即使用计算机求解，所用的计算时间也是令人难以忍受的。"一个好的理论比得上一千台计算机的工作"，用这句名言来描述一个好的算法是再恰当不过的了。但这是摆在数学工作者面前的任务。

对于经济管理工作者来说，只要求能根据具体问题的性质，选择合适的工具去解决就行了。

有些问题可用整数规划求解，也可用动态规划，甚至图论方法求解，其区别在于算法的有效性。有些问题用整数规划求解时，常常是一种非多项式算法，而用图论方法求解时，则可能是一个多项式算法。如果在介绍算法时，能同时标明该算法的时间复杂性函数，那是再理想不过的事了。但作者面临的困难是：仅能对一部分算法标出其大致的时间复杂性函数，因为寻找一个算法的时间复杂性函数往往很困难。此外，时间复杂性考虑的是在最坏情况下所需的时间，而对大多数具体数

学案例来讲，实际需要的时间远比这个时间来得少。例如求解线性规划的单纯形法，理论上已经证明是一种非多项式算法，但是在实际应用中，单纯形法计算的效率很高，甚至比有些人提出的求解线性规划的多项式算法还好。因此，在大多数教材中，对有些问题介绍多种算法。在问题规模较小时，这些算法的差异并不太大，但随着问题规模的增加，这种差异会变得越来越大。因此，我们在这本教材中介绍多种算法，使经济管理工作者在应用时有较大的挑选余地。

基于上述观点，本书力图将运筹学的基本内容从较注重于算法描述和定理论证逐步转向到建模以及对求解结果的分析上来。为此，本书中的数字实例都有一定的实际背景。在讨论基本概念时，也尽量采用较为简单的数字实例，以达到直观、实用的目的，尽量减少公式推导和数学定理的证明。但本书并不回避实际应用中较为复杂的情况。在习题及案例中安排有一定数量的练习，以提高读者在这方面的技能。在较为复杂的情况下，冗长而繁复的运算可求助于计算机软件包，这样，可使读者花较多精力于建模及优化后的分析上。

运筹学内容极为丰富。本书涉及的运筹学分支包括线性规划、整数规划、动态规划、图论与网络、统筹方法、决策、博弈及库存等 8 个方面。

如果读者把本书作为一本数学书来念的话，可能会感到失望，因为本书的论述不像数学教材那么严密。但如果读者想要了解怎样应用一些常规的数学方法(包括微积分、概率统计和线性代数)来解决经济管理中的一些实际问题，那么，也许本书会对你有所帮助。要是真能做到这一点，编著者也就感到欣慰了！

# 第二章　线性规划

**【提要】** 本章主要介绍线性规划的3个主要内容:建模、求解及灵敏度分析。建模部分介绍了7个典型案例,使读者了解建模的一些基本技巧。接下来通过一个简单的实例,使读者对用单纯形法求解线性规划有一个基本概念。对偶理论对于较深入地理解影子价格以及灵敏度分析是必要的。最后,通过练习,帮助读者巩固已学到的知识,并初步掌握运用线性规划软件包来解决问题的技巧。

## 第一节　概述

线性规划是运筹学中运用最为广泛的一个分支。早在20世纪四五十年代初,苏联数学家康托洛维奇就提出了"解乘数法"来解决下料等一系列最优化问题。在美国,丹切克于1947年独立地提出了求解线性规划的单纯形法。20世纪60年代,随着计算机技术的进步,线性规划得到进一步发展,成为解决经济管理问题的一种有力工具。线性规划得到如此广泛的应用,主要有以下3个原因:

(1) 求解线性规划的单纯形算法是一种非常有效的算法。在单纯形法基础上开发的线性规划商用软件包,已能处理几百万个变量和约束条件的线性规划;

(2) 在单纯型法基础上发展起来的一些其他算法,如列生成法、分解算法、灵敏度分析等等,不仅能求解,而且能对线性规划作优化后的分析,这是目前已有的其他算法所无法替代的;

(3) 线性规划和运筹学中的其他一些分支的发展密切相关,如整数规划、分数规划、随机规划、目标规划、非线性规划、博弈论以及多目标规划,等等。其中,有些是直接在单纯形法的基础上发展起来的。

因此，本书把线性规划放在前面，作为一个重要内容进行讨论。

用线性规划解决实际问题时，一般可分为5个阶段：

(1) 建立模型；

(2) 收集资料；

(3) 求得最优解；

(4) 优化后的分析(灵敏度分析)；

(5) 解的检验和实施。

显然，这些阶段有时并不能划分得非常清楚，它们常常是相互重迭、相互交叉而发生作用的。下面简单讨论各阶段的内容和特点：

1. 建立模型

对于管理人员来讲，建立模型是非常重要的核心问题。建立数学模型就是把所要探讨的决策问题用数学模型抽象和概括起来。这个模型一方面要求把所有重要的因素都考虑进去，使之能正确地反映决策问题的本质特征；另一方面，也必须尽可能简化，忽略一些次要的、非本质的因素，使建立的模型不致太复杂，以便于应用。建模过程要求管理人员对事物有丰富的经验和判断力。因此，建模是一种艺术或者技巧。

在线性规划建模中要考虑以下因素：

(1) 模型涉及的范围(时间范围、问题规模)；

(2) 决策变量和参数的选择，其中，决策变量是决策者所寻求的答案，而参数表示那些对决策有影响，但又不能直接加以控制的因素(例如价格、成本、需求等等)；

(3) 约束条件的确定；

(4) 目标函数的选择。

2. 收集资料

模型确立以后，通过收集资料确定问题的参数。通常这一阶段需要花费较多的时间和精力。

3. 求得最优解

通过软件包求得最优解。

4. 优化后的分析(灵敏度分析)

现有的线性规划软件包大都附有灵敏度分析的程序，使它能够在

得到的最优解的基础上进行灵敏度分析。优化后的分析之所以重要，有以下几点原因：

(1) 数据的估计不十分精确；

(2) 动态上的考虑；

(3) 输入的错误对结果的影响。

*5. 解的检验和实施*

为了保证模型能准确反映现实情况，应对求得的解进行全面检验。如果发现所得的解与现实情况不符，那么必须对模型作出修正，再求出新的修正后的解，直到合适为止。

## 第二节　建模

建模是非常重要的一个环节。把现实情况抽象成一个数学规划模型是一种艺术或者技巧。这里先介绍几个典型的模型，然后，通过习题及案例使读者初步掌握这方面的技巧。

### 一、资源分配问题

南洋公司计划生产 2 种产品：$A$ 和 $B$。公司有 3 种设备甲、乙、丙可供 2 种产品加工使用。生产 1 个产品 $A$ 需占用甲设备 1 工时，乙设备 1 工时。生产 1 个产品 $B$ 需占用甲设备 2 工时，丙设备 1 工时。供产品 $A$、$B$ 加工的设备工时数有限：甲设备每周可用 120 工时，乙设备每周可用 70 工时，而丙设备每周可用 50 工时。生产 1 个产品 $A$ 的收益为 20 元，生产 1 个产品 $B$ 的收益为 30 元。问：在现有资源限制（即各设备可用加工工时有限）的条件下，怎样安排生产才能使总收益最大？

对于上述问题可先列出如下表格：

按题意，当前要作出的决定是：应生产多少个产品 $A$ 和产品 $B$？故定出决策变量 $x_1$ 表示生产产品 $A$ 的个数，决策变量 $x_2$ 表示生产产品 $B$ 的个数。于是，可以写出下列线性规划的数学模型：

表 2.1

| 决策变量 | 设备<br>产品 | 甲(工时) | 乙(工时) | 丙(工时) | 收益/单个产品(元) |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $A$ | 1 | 1 | | 20 |
| $x_2$ | $B$ | 2 | | 1 | 30 |
| | 工时限制 | 120 | 70 | 50 | |

$$\max z = 20x_1 + 30x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 120 & (1) \\ x_1 \leqslant 70 & (2) \\ x_2 \leqslant 50 & (3) \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 & (4) \end{cases} \tag{2.1}$$

式(2.1)表示该实例的线性规划模型。$z = 20x_1 + 30x_2$ 称为目标函数,为使总收益最大,在 $z$ 前加上“max”符号。(1)(2)(3)为 3 个约束条件,表示生产产品 $A$、$B$ 所用设备甲、乙、丙的工时数分别不应超过 120、70 和 50 小时。(4)称为非负约束条件,在这个案例中,$x_1$、$x_2$ 分别代表产品 $A$、$B$ 的生产数量,小于 0 是没有意义的。式(2.1)中的符号“s.t.”是 subject to 的首字母缩写,表示“受制于”后面的那些约束条件。

## 二、配料问题

小张下岗以后回农村从事种植业。根据当地的气候、土壤等情况,某种作物在全部生产过程中至少需要 32 斤氮,磷以 24 斤为适宜,钾不得超过 42 斤。现有甲、乙、丙、丁 4 种肥料,各种肥料的单位价格及含氮、磷、钾的数量如表 2.2 所示:

表 2.2

| | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 |
|---|---|---|---|---|
| 氮 | 0.03 | 0.30 | 0 | 0.15 |
| 磷 | 0.05 | 0 | 0.20 | 0.10 |
| 钾 | 0.14 | 0 | 0 | 0.07 |
| 单价 | 0.04 | 0.15 | 0.10 | 0.13 |