公共课系列 2001年研究生入学考试应试指导丛书

5

策划：北京大学研究生院

2001

Entrance Exams for MD

# 研究生入学考试
# 数学应试指导
## （经济学类）

邵士敏 主编

北京大学出版社

2001年研究生入学考试应试指导丛书

# 2001年研究生入学考试
# 数学应试指导
## (经济学类)


主　编　邵士敏

撰稿人　邵士敏　娄元仁　文　丽
　　　　周建莹　庄大蔚　张立昂



北京大学出版社

北　京

图书在版编目(CIP)数据

2001年研究生入学考试数学应试指导.经济学类/邵士敏主编.
－北京:北京大学出版社, 2000.3
(2001年研究生入学考试应试指导丛书)
ISBN 7－301－04478－X

Ⅰ.2… Ⅱ.邵… Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第03849号

书　　名:2001年研究生入学考试数学应试指导(经济学类)
著作责任者:邵士敏
责任编辑:刘金海
标准书号:ISBN 7－301－04478－X/G·562
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话:出版部62752015　发行部62754140　编辑室62752027
电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京飞达印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850毫米×1168毫米　32开本　11.75印张　295千字
2000年4月第一版　2000年4月第二次印刷
定　　价:18.00元

# 前　　言

为了帮助参加研究生入学数学考试的考生复习和应考，我们按照教育部制定的全国经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲的要求，编写了这本书。

本教程内容有微积分、线性代数、概率论与数理统计三部分，包括了新数学考试大纲数学三、四类(经济学类)的全部内容。本书详尽地叙述了应考的基本概念、基本定理及计算公式，并配有尽可能多的典型例题，以帮助考生深入理解概念，加强公式的运用。此外，还备有练习题及答案，可供考生复习时使用。

在编写过程中，我们研究了数学考试大纲对各部分内容要求的深度。书中对基本概念、基础知识的叙述，使之尽量符合大纲要求的深度。我们还参考了近几年的试题，在选编典型例题时，既注意选编一些基本题，也选少量过去的试题，以提高考生的综合解题能力，使他们能较顺利地应考并进一步得到提高。本书中的概念、符号等均采用一般教科书的习惯用法，书中就不另作说明。

由于时间仓促，难免有疏误之处，望广大考生及众读者提供宝贵意见。

编　者

2000 年 2 月于北京大学

# 目　录

微积分 ……1
一　函数、极限、连续 ……1
习题一 ……18
二　一元函数微分学 ……21
习题二 ……51
三　一元函数积分学 ……54
习题三 ……90
四　多元函数微积分学 ……92
习题四 ……114
五　无穷级数 ……117
习题五 ……128
六　常微分方程与差分方程 ……130
习题六 ……161
线性代数 ……163
一　行列式 ……163
习题一 ……177
二　矩阵 ……178
习题二 ……201
三　向量 ……203
习题三 ……216
四　线性方程组 ……217

习题四 ……228
五　矩阵的特征值与特征向量 ……230
习题五 ……238
六　二次型 ……239
习题六 ……246
概率论与数理统计 ……248
一　随机事件和概率 ……248
习题一 ……261
二　随机变量及其概率分布 ……264
习题二 ……278
三　二维随机变量及其概率分布 ……281
习题三 ……294
四　随机变量的数字特征 ……296
习题四 ……306
五　大数定律和中心极限定理 ……308
习题五 ……313
六　数理统计的基本概念 ……314
习题六 ……325
七　参数估计 ……326
习题七 ……338
八　假设检验 ……340
习题八 ……350
习题答案 ……351

# 微 积 分

## 一 函数、极限、连续

### 1. 函数

(1) 函数的定义

设在同一过程中有两个变量 $x$、$y$, $x$ 的变化域是 $X$. 若对 $X$ 中每一个 $x$ 值,依照某一规律,变量 $y$ 都有惟一确定的值与之对应,则称 $y$ 是 $x$ 的函数,记作

$$y=f(x), \quad x\in X.$$

$x$ 称为自变量,$y$ 称为因变量, $X$ 称为函数的定义域. 因变量 $y$ 的变化域称为函数的值域,可以记作

$$y=f(X)=\{y \mid y=f(x), \quad x\in X\}.$$

在函数定义中,应注意对应关系 $f$ 和定义域 $X$,它们是函数定义中的两个要素.

(2) 函数的图形

函数 $y=f(x) \quad (x\in X)$ 的图形是指点集

$$\{(x, y) \mid y=f(x), \quad x\in X\},$$

一般情形下,它是 $xy$ 平面上的一条或几条曲线, 且任何一条平行于 $y$ 轴的直线,与曲线 $y=f(x)$ 至多相交于一点.

(3) 函数的几种常见特性

**有界性** 若 $\exists\, M>0, \quad \ni\cdot\ |f(x)|\leqslant M, \quad \forall x\in X$,① 则称 $f(x)$

---

① 符号 $\exists$ 表示"存在", $\ni\cdot$ 表示"使得", $\forall$ 表示"对于任意的",或"任给".

在 $X$ 上有界.

有界函数 $f(x)$ 的图形 $y=f(x)$ 的特点是界于二直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

**奇偶性** 设有函数 $y=f(x)$, $x\in X$, 其中 $X$ 关于原点对称(即: 若 $x\in X$, 则 $-x\in X$).

若 $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 $X$ 上的奇函数.

若 $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 $X$ 上的偶函数.

奇函数的图形对称于原点,偶函数的图形对称于 $y$ 轴.

**单调性** 若 $\forall x_1, x_2\in X$, 当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \qquad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 $X$ 上单调上升(或单调下降). 此处的上升亦称递增,下降亦称递减.

若 $\forall x_1, x_2\in X$, 当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)<f(x_2) \qquad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 $X$ 上严格单调上升(或严格单调下降).

**周期性** 设有函数 $y=f(x)$, $x\in X$. 若 $\exists$ 常数 $T>0$, $\ni\cdot\forall x\in X$, 都有 $x+T\in X$, 且有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, $T$ 称为周期.

显然,任何周期函数都有无穷多个周期,若其中有一个最小的正数,则称它为最小正周期,亦称周期.

"周期"通常指最小正周期. 但周期函数未必都有最小正周期.

(4) 复合函数

设有函数

$$y=f(u) \qquad u\in U,$$

$$u=\varphi(x) \qquad x\in X \quad \text{值域为 } U',$$

若 $U'\subseteq U$, 则在 $X$ 上确定了一个新函数

$$y=f[\varphi(x)] \qquad x\in X,$$

称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，$u$ 称为中间变量.

(5) 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 $Y$. 若对 $Y$ 中每一个 $y$ 值，都可由方程 $y=f(x)$ 惟一确定出 $x$ 值，则得到一个定义在 $Y$ 上的函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y) \qquad y\in Y.$$

易知，严格单调函数必有反函数，并且其反函数也是严格单调的.

函数 $y=f(x)\quad(x\in X)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)\ (y\in Y)$ 的图形相同.

在习惯上，为了强调对应规律 $f^{-1}$，并将因变量仍记作 $y$，通常将反函数写为

$$y=f^{-1}(x) \qquad x\in Y,$$

它的图形与 $y=f(x)\quad(x\in X)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(6) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数，称为初等函数.

基本初等函数是指以下六类函数：常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数.

2. 极限

(1) 数列极限的定义

设有数列 $\{x_n\}$ 及常数 $a$. 若 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists$ 号码(即正整数) $N$, $\ni\cdot$ 当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称当 $n$ 趋向于无穷时，$\{x_n\}$ 以 $a$ 为极限，记作

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=a,$$

或

$$x_n\to a \qquad (n\to+\infty).$$

"$n \to +\infty$"称为极限过程.

(2) 数列极限的几何意义

$\forall$点 $a$ 的 $\varepsilon$ 邻域$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时,所有的点

$$x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_n, \cdots$$

全部落在邻域$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$之内.

(3) 函数极限的定义

**定义 1** ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在 $x$ 充分大时有定义, $A$ 为常数. 若$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ X>0$, $\ni$ 当 $x>X$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x$ 趋向于正无穷时, $f(x)$ 以 $A$ 为极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,$$

或 $$f(x)\to A \quad (x\to+\infty).$$

"$x\to+\infty$"称为极限过程.

可类似给出极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义.

**定义 2** ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义, $A$ 为常数. 若 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $\ni$ 当 $|x|>X$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x$ 趋向于无穷时, $f(x)$ 以 $A$ 为极限,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A,$$

或 $$f(x)\to A \quad (x\to\infty).$$

"$x\to\infty$"称为极限过程.

**定义 3** ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 附近有定义(点 $x_0$ 本身可能除外), $A$ 为常数.

若 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, $\ni$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时，$f(x)$ 以 $A$ 为极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A,$$

或 $$f(x) \to A \qquad (x \to x_0).$$

极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 的几何意义是：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当点 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 但 $x \neq x_0$ 时，相应的点 $(x, f(x))$ 全部落在图 0-1-1的带形区域(图中带斜线部分)内.

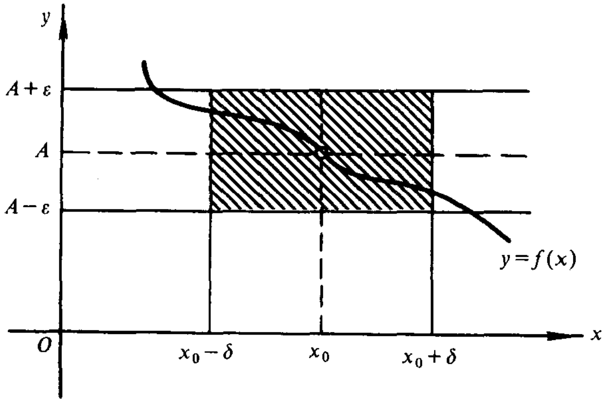


图 0-1-1

**定义 4** (右极限 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的右近旁有定义，$A$ 为常数. 若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，∍· 当 $0<x-x_0<\delta$ (即 $x_0<x<x_0+\delta$) 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的右极限为 $A$，记作

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x)=A,$$

或 $$f(x) \to A \qquad (x \to x_0+0),$$

有时也记作 $f(x_0+0)=A$.

可类似定义左极限 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$.

左、右极限统称为单侧极限.

以上“$x\to x_0$”等,均称为极限过程.

(4) 定理 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0\pm 0}f(x)=A$.①

类似地有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=A$.

(5) 无穷小量与无穷大量

**定义 1** 在某一极限过程中,以 0 为极限的变量(数列或函数)称为无穷小量.

无穷小量的阶的比较:

设 $\alpha,\beta$ 是同一极限过程中的两个无穷小量.

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=K\neq 0$,则称 $\alpha$ 与 $\beta$ 是同阶(或同级)无穷小量.特别地,

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$,则称 $\alpha$ 与 $\beta$ 是等价无穷小量,记作 $\alpha\sim\beta$.

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则称 $\alpha$ 是比 $\beta$ 更高阶的无穷小量,记作

$$\alpha=o(\beta).$$

**定义 2** 设有数列$\{x_n\}$. 当 $n\to+\infty$ 时,若绝对值 $|x_n|$ 无限变大,即

$\forall M>0,\ \exists N,\ \ni$ 当 $n>N$ 时,恒有

$$|x_n|>M,$$

① 记号“$\Longleftrightarrow$”指充分必要条件.

则称$\{x_n\}$当$n\to+\infty$时为无穷大量，记作

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\infty .$$

可类似定义 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\pm\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，

以及 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\infty$，$\pm\infty$.

(6) 极限的四则运算

**定理** 若$\lim f(x)$和$\lim g(x)$都存在，则

(i) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$,

(ii) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$,

特别地，$\lim K\cdot f(x)=K\lim f(x)$，$K$为常数，

(iii) 当$\lim g(x)\neq 0$时，有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} .$$

(7) 极限存在准则

**准则 Ⅰ(夹逼定理)** 若在点$x_0$的某邻域内(点$x_0$本身可能除外)恒有

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x),$$

且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

则

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=0.$$

夹逼定理的数列形式为：若$\exists N$，$\ni\cdot$当$n>N$时，恒有

$$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n ,$$

且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=A$,

则

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = A.$$

**准则Ⅱ** 单调上升(或下降)且有上界(或下界)的数列必有极限.

(8) 两个重要极限

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

或

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{e}.$$

(9) 极限的不等式性质

(i) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, 且 $A < B$, 则必 ∃ 正数 $r$, ∍· 当 $0 < |x - x_0| < r$ 时, 恒有

$$f(x) < g(x).$$

(ii) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, 且 ∃ 正数 $r$, ∍· 当 $0 < |x - x_0| < r$ 时, 恒有 $f(x) < g(x)$, 则

$$A \leqslant B.$$

3. 连续性

(1) 函数在某一点处连续

**定义 1** 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域内有定义. 若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续. 否则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续, 此时 $x_0$ 称为 $f(x)$ 的间断点.

**定义 2** 若 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处右连续.

可类似定义左连续. 左、右连续统称为单侧连续.

(2) 间断点的分类

(i) 可去(或可改)间断点

若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处无定义,但极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在;或 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义, 且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

(ii) 第一类间断点

若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的左、右极限都存在, 但不相等: $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, 则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

可去间断点有时也称为第一类间断点.

(iii) 第二类间断点

若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的左、右极限至少有一个不存在,则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

(3) 函数在某一区间连续

**定义 3** 若 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内每一点处都连续,则称 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内连续,记作 $f \in C(a, b)$.

**定义 4** 若 $f \in C(a, b)$, 且在点 $a$ 处右连续,在点 $b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,记作 $f \in C[a, b]$.

(4) 连续函数的运算

**定理 1(四则运算)** 若 $f(x)$, $g(x)$ 在点 $x_0$ 处连续,则

(i) 和、差、积

$$f(x) \pm g(x) \qquad f(x) \cdot g(x)$$

在点 $x_0$ 处连续,

(ii) 当 $g(x_0) \neq 0$ 时,商

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

在点 $x_0$ 处连续.

**定理 2**(复合函数的连续性)　设 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$. 若 $u=\varphi(x)$ 在点 $x_0$ 处连续, 且 $y=f(u)$ 在对应点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续, 则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x_0$处连续.

**定理 3**(反函数的连续性)　若 $y=f(x)$ 在$[a, b]$上严格单调上升(或下降), 并且连续, 则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在值域区间$[f(a), f(b)]$(或$[f(b), f(a)]$)上也严格单调上升(或下降), 并且连续.

对于开区间$(a, b)$或无穷区间, 有类似定理.

(5) 初等函数的连续性

一切初等函数在各自的定义域内都是连续的.

(6) 闭区间上连续函数的性质

**定理 1**(最大值、最小值定理)　若 $f\in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有最大值和最小值, 即 $\exists\, x_1, x_2\in[a, b]$, $\ni\cdot$ $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a, b]}\{f(x)\}$, $f(x_2)=\min\limits_{x\in[a, b]}\{f(x)\}$.

**推论**　闭区间上的连续函数是有界的.

**定理 2**(中间值定理, 或介值定理)　若 $f\in C[a,b]$, 且 $f(a)\neq f(b)$, $\mu$ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数, 则在$(a, b)$内部至少存在一点 $\xi$, 使得 $f(\xi)=\mu$.

**推论 1**(零点存在定理)　若 $f\in C[a, b]$, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 则在$(a, b)$内部至少存在一点 $\xi$, 使得　$f(\xi)=0$.

**推论 2**　若 $f\in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 可以取到介于其最大值 $M$ 与最小值 $m$ 之间的一切实数.

例 1　符号函数是指下面的分段函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<1.\end{cases}$$

它是奇函数，也是有界函数，其图形由两段直线及一个点 (0, 0) 组成．

问：$y=\operatorname{sgn} x$ 是不是单调函数？

例 2　求 $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\ln(4-x^2)}$ 的定义域．

解　由题意知

$$\begin{cases} x\geqslant 1, \\ 4-x^2>0, \quad 但\ 4-x^2\neq 1. \end{cases}$$

解得定义域为

$$1\leqslant x<\sqrt{3} \quad 及 \quad \sqrt{3}<x<2.$$

例 3　求 $y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\ (-\infty<x<+\infty)$ 的反函数．

解　由 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 得 $e^x-e^{-x}=2y$，两边同乘 $e^x$ 并移项，得 $e^{2x}-2ye^x-1=0$．解得

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}\ .$$

因为 $e^x>0$，所以上式应取正号，得

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}\ ),$$

因此反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}\ ) \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

例 4　设

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ x, & x>0, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ -x^2, & x>0, \end{cases}$$

求 $g[f(x)]$．

解　当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=0$，因此

$$g[f(x)]=g(0)=0.$$

当 $x>0$ 时，$f(x)=x$，因此