面向21世纪课程教材

# 《工程静力学》《工程动力学》

## 辅导与习题解答

贾启芬　刘习军　李昀泽　编著

天津大学出版社

# 《工程静力学》《工程动力学》辅导与习题解答

贾启芬
刘习军　主编
李昀泽

天津大学出版社

## 内容提要

本书为《理论力学》教学用辅导教材，与《工程静力学》《工程动力学》同步使用，包括静力学、运动学和动力学共12章。每章编有“主要内容”、“基本要求”、“重点讨论”和“习题解答”四部分内容。本书对《工程静力学》《工程动力学》的全部习题进行了解答，阐述了解题的正确思路、方法和技巧，加强了自学指导。

本书可作为高等学校工科各专业师生的教学参考书，也可供函授大学教学使用或工程技术人员参考。


**图书在版编目(CIP)数据**

工程静力学、工程动力学辅导与习题解答/贾启芬等主编.—天津:天津大学出版社,2001.1

ISBN 7-5618-1376-7

Ⅰ.工... Ⅱ.贾... Ⅲ.①工程力学:静力学-高等学校-教学参考资料②工程力学:动力学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.TB12

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第79793号

出　版　天津大学出版社
出版人　杨风和
地　址　天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　话　发行部:022—27403647 邮购部:022—27402742
印　刷　天津市宝坻县第二印刷厂
发　行　新华书店天津发行所
开　本　880mm×1230mm　1/32
印　张　13.875
字　数　362千
版　次　2001年1月第1版
印　次　2001年1月第1次
印　数　1-3 000
定　价　21.00元

# 前言

理论力学课程是高等院校各工科专业重要的技术基础课，对于培养学生知识、能力和素质，加强学生的创新意识、实践能力具有重要的意义。一般来讲，在课程中对学生能力的培养，要通过分析、练习一定的习题来实现。力学课程对培养这种能力具有得天独厚的条件，特别是要求学生自己选择研究对象并列写运动微分方程的习题比比皆是，这种解题方法可使学生从习惯于运用公式求解方法产生一个飞跃，迈上一个新台阶。

建立力学模型和描述其数学物理方程的研究方法是力学课程的显著特色，也是大学本科中第一门需要学生自己选择研究对象并对其进行合理的抽象和简化，然后建立描述研究对象力学特征的数学方程的课程。理论力学的习题，绝大多数都是从工程实际抽象和简化而来的，或者习题本身就是一个简单的工程实际问题。加大这部分内容不仅可以培养学生工程概念，而且可以提高解决工程实际问题的能力。新体系力学教材采用模块式结构，并且提高了课程内容的起点，加大了课外学时。因此，配备学习指导书对指导学生课后自习和辅导答疑是十分必要的。本指导书的特色是与新体系基础力学课程配套，在教学上，一是重点加强了基本概念、基本理论和基本分析方法；二是加强了适度的基本功训练，引导学生掌握分析问题的方法和思路；三是给学生留出一

定的思维空间，启发学生思考、研究、寻找结论。

本指导书包含静力学、运动学、动力学等内容。每一章均包含有四部分内容：第一，本章的主要内容；第二，基本要求部分，提出了应该一般了解的、重点掌握的和熟练应用的各项内容，学生可在学习过程中参考，并在学完本章后检查，第三，重点讨论部分，指明本章所涉及到的重点内容和应解决的关键问题，并阐述典型题目解题的正确思路、方法和技巧，工程应用等模型的深入与扩展；第四，习题解答部分，包括《工程静力学》和《工程动力学》的全部习题，加强自学指导。

本书的编写得到天津大学理论力学教研室全体教师的支持，使用的教材是教研室三代人几十年教学经验的积累和总结。本书主编为天津大学贾启芬、刘习军，天津理工学院李昀泽。王德利参加全书的制图工作。钟顺、黄元英、刘习英、李向东、曹振佳等参加了本书的校对工作。

本书承蒙毕学涛教授详细审阅，萧龙翔、邓惠和二位教授复审，提出了许多宝贵的意见，在此谨向他们致以衷心的感谢。

限于水平，如有错误和不妥之处，望读者不吝指正。

编者

2000 年 5 月

# 目　录

## 第一篇　工程静力学



## 第二篇　工程动力学

# 第一篇　工程静力学

## 第一章　静力学基础

### 一、主要内容

静力学研究作用在物体上力系的平衡。具体研究以下三个问题。

（1）物体的受力分析。

（2）力系的等效替换。

（3）力系的平衡条件及其作用。

**（一）力的基础知识**

力是物体相互之间的机械作用，这种作用使物体运动状态发生变化或使物体产生变形。前者称为力的运动效应，后者称为力的变形效应。

力的作用效应由力的大小、方向和作用点决定，称为力的三要素。力是定位矢量。

作用在刚体上的力可沿作用线移动，是滑动矢量。

刚体是在力作用下不变形的物体，它是实际物体的抽象化模型。在静力学中把物体看成刚体，从而简化了平衡问题的研究。

等效　若两力系对物体的作用效应相同，称两力系等效。

静力学基本公理是力学的最基本、最普遍的客观规律。概括了力的基本性质，是建立静力学理论的基础。力的平行四边形法则给出了力系简化的一个基本方法，是力的合成法则，也是一个力分解成两个力的分解法则。二力平衡公理是最简单的力系平衡

条件。加减平衡力系公理是研究力系等效变换的主要依据。作用反作用定律概括了物体间相互作用的关系。刚化公理给出了变形体可看作刚体的条件。

**（二）力的基本运算**

力在直角坐标轴上的投影有一次（直接）投影法和二次（间接）投影法。

应用力的投影概念，将力的合成由几何运算转换为代数运算。

汇交力系合成为通过汇交点的合力，合力的大小、方向等于各分力的矢量和

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum\boldsymbol{F}$$

或

$$\boldsymbol{R}=\sum X\boldsymbol{i}+\sum Y\boldsymbol{j}+\sum Z\boldsymbol{k}$$

汇交力系的合力在轴上的投影等于各分力在同一轴上的投影的代数和，称之为合力投影定理，即

$$\begin{cases}R_x=\sum X_i\\R_y=\sum Y_i\\R_z=\sum Z_i\end{cases}$$

力对轴之矩是力使物体绕轴转动效果的度量，是代数量。可按定义或下述解析式计算。

$$\left.\begin{aligned}m_x(\boldsymbol{F})&=yZ-zY\\m_y(\boldsymbol{F})&=zX-xZ\\m_z(\boldsymbol{F})&=xY-yX\end{aligned}\right\}$$

式中 $x$、$y$、$z$ 为力 $\boldsymbol{F}$ 作用点的坐标，$X$、$Y$、$Z$ 为力 $\boldsymbol{F}$ 在轴上的投影。当力与轴相交或平行时，力对该轴之矩等于零。

力对点之矩是力使物体绕该点转动效果的度量，是定位矢量。用矢积式表示

$$\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$
$$= (yZ - zY)\boldsymbol{i} + (zX - xZ)\boldsymbol{j} + (xY - yX)\boldsymbol{k}$$

平面问题中力 $\boldsymbol{F}$ 对 $O$ 点之矩是代数量,记为

$$m_O(\boldsymbol{F}) = m_z(\boldsymbol{F}) = \pm Fh$$

其中 $O$ 点为矩心,$h$ 为力臂。

力对点之矩在通过该点某轴上的投影等于力对该轴之矩。

有
$$\left.\begin{aligned} [\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})]_z &= m_z(\boldsymbol{F}) \\ [\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})]_y &= m_y(\boldsymbol{F}) \\ [\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})]_x &= m_x(\boldsymbol{F}) \end{aligned}\right\}$$

或
$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = m_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i} + m_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j} + m_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k}$$

合力矩定理　力系的合力对任一点之矩等于力系中各力对该点之矩的矢量和,即

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{R}) = \sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$$

合力对任一轴之矩等于力系中各力对该轴之矩的代数和。

**（三）力偶与力偶矩**

大小相等，方向相反，作用线平行的两个力 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 组成力偶，力偶是一种特殊力系。力偶无合力，也不能与一个力平衡。力偶对物体只产生转动效应。

力偶矩矢　力偶矩大小、力偶作用面在空间的方位及力偶的转向，称力偶三要素。

力偶三要素可由力偶矩矢表出。力偶矩矢是一个自由矢量。

力偶矩矢完全决定了力偶对刚体的作用效果。

若两力偶的力偶矩矢相等，则两力偶等效。

力偶对任意点之矩等于力偶矩，与矩心位置无关。

力偶的等效性表明，只要力偶矩不变，可任意改变力的大小

和力偶臂的长短，力偶也可在作用面内任意移转。

平面力偶、力偶矩是代数量。取逆时针转向为正，反之为负。

空间力偶系可合成为一个合力偶，合力偶矩矢记为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 + \cdots + \boldsymbol{m}_n = \sum \boldsymbol{m}$$

或

$$\boldsymbol{M} = \sum m_x \boldsymbol{i} + \sum m_y \boldsymbol{j} + \sum m_z \boldsymbol{k}$$

平面力偶系可合成为一合力偶，合力偶矩等于各分力偶矩的代数和

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

**（四）约束和约束力**

限制非自由体某些位移的周围物体称为约束。约束作用在被约束物体上的力称为约束力或约束反力，物体所受的约束力必须根据约束性质进行分析，其方向与该约束所能限制的位移方向相反。工程中常见的几种简单的约束类型及其约束力特点如下。

光滑接触表面约束　约束力作用在接触点处，方向沿接触面公法线并指向受力物体。

柔索约束（如绳索、链条或胶带等构成的约束）　约束力沿柔索而背离物体。

铰链约束　约束力在垂直销钉轴线的平面内，并通过销钉中心。约束力的方向不能预先确定，常以两个正交分量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 表示。

滚动支座约束　约束力垂直滚动平面，通过销钉中心。

球铰链约束　约束力通过球心，但方向不能预先确定，常用三个正交分量 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Z}$ 表示。

止推轴承约束　约束力有三个分量 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Z}$。

物体的受力分析和受力图是研究物体平衡和运动的前提。

## 二、基本要求

（1）正确理解力、力偶、力矩、力偶矩、简化、平衡等概念，全面掌握力及力偶的性质。

（2）根据所给条件，选择恰当的方法计算力在坐标轴上的投影，计算力对点之矩和力对轴之矩，计算力偶矩。

（3）掌握典型约束的约束性质及各种约束所提供的约束力的特性、描述方法。

（4）对简单的物体系统，能熟练地选择研究对象，取分离体并画出受力图。

## 三、重点讨论

不同类型的约束，其约束反力未知分量的数目是不同的；当刚体受空间力系作用时，其约束反力的未知分量数目最多为6个。确定各类约束的未知量数目的基本方法是：观察物体在空间的六种可能的运动中，判断哪几种运动被约束所阻碍，如移动受到阻碍，就产生约束反力；如转动受到阻碍，就产生约束反力偶。例如枢轴承约束，它比颈轴承多了一个沿轴线方向的移动阻碍，因此约束反力用三个大小未知的分量 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Z}$。又如空间插入端约束，它能阻碍物体在空间的六种可能的运动，因此有三个约束反力和三个约束反力偶。

对研究对象进行受力分析、画受力图时，首先要明确研究对象，解除约束，取分离体；再画出作用在物体上的主动力和约束力。当分析多个物体组成的系统受力时，要注意分清内力与外力，受力图中不能出现内力。正确分析受力，画好受力图的要点是：

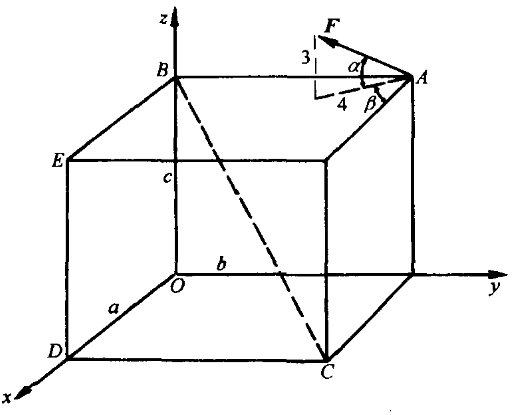
（1）熟知各种常见约束的性质及其约束力的特点。

（2）判断二力构件及三力构件，并根据二力平衡条件及三力平衡条件确定约束力的方向。

(3) 熟练、正确应用作用与反作用定律。

## 四、习题解答

**1-1** 长方体三边长 $a=16$ cm，$b=15$ cm，$c=12$ cm，如图示。已知力 $\boldsymbol{F}$ 大小为 100 N，方位角 $\alpha=\arctan\dfrac{3}{4}$，$\beta=\arctan\dfrac{4}{3}$，试写出力 $\boldsymbol{F}$ 的矢量表达式。




**题 1-1 图**

**解** 利用二次投影法先将力投影到 $z$ 轴和 $xy$ 面上得

$$F_z = F\sin\alpha = 100\times\frac{3}{5} = 60\ \text{N}$$

$$F_{xy} = F\cos\alpha = 100\times\frac{4}{5} = 80\ \text{N}$$

再将 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 投影到 $x$ 轴和 $y$ 轴得

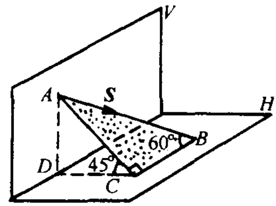
$$F_x = F_{xy}\cos\beta = 80\times\frac{3}{5} = 48\ \text{N}$$

$$F_y = -F_{xy}\sin\beta = -80\times\frac{4}{5} = -64\ \text{N}$$

力 $\boldsymbol{F}$ 的矢量表达式为

$$F = F_x i + F_y j + F_z k = 48i - 64j + 60k$$

**1－2** $V$、$H$ 两平面互相垂直，平面 $ABC$ 与平面 $H$ 成 45°，$ABC$ 为直角三角形。求力 $S$ 在平面 $V$、$H$ 上的投影。




**题 1－2 图**

**解** 力 $S$ 在 $BC$ 轴与 $AC$ 轴上的投影分别为

$$S_{BC} = S\cos60^\circ \qquad S_{AC} = S\sin60^\circ$$

$\boldsymbol{S}_{AC}$在 $AD$、$DC$ 轴上的投影分别为

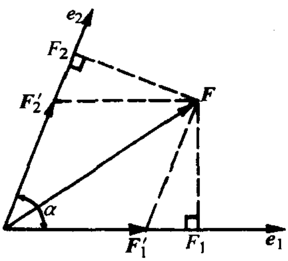
$$S_{AD} = S\sin60^\circ\sin45^\circ$$

$$S_{DC} = S\sin60^\circ\cos45^\circ$$

力 $S$ 在平面 $V$、$H$ 上的投影为

$$S_{V面} = \sqrt{S_{AD}^2 + S_{BC}^2} = \sqrt{(S\sin60^\circ\sin45^\circ)^2 + (S\cos60^\circ)^2} = 0.791\ 5$$

$$S_{H面} = \sqrt{S_{DC}^2 + S_{BC}^2} = \sqrt{(S\sin60^\circ\cos45^\circ)^2 + (S\cos60^\circ)^2} = 0.791\ 5$$




**题 1－3 图**

**1－3** 两相交轴夹角为 $\alpha$（$\alpha \neq 0$），位于两轴平面内的力 $F$ 在这两轴上的投影分别为 $F_1$ 和 $F_2$。试写出力 $F$ 的矢量式。

**解** 设力 $F$ 在两轴上的分量分别为 $\boldsymbol{F}_1'$，$\boldsymbol{F}_2'$，则

$$F_1' = F_1 - F_2'\cos\alpha \qquad (1)$$

$$F_2' = F_2 - F_1'\cos\alpha \qquad (2)$$

式(1)×cos$\alpha$－式(2)，得

$$F_2'\sin^2\alpha = F_2 - F_1\cos\alpha$$

即

$$F_2' = \frac{F_2 - F_1\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

式(1)－式(2)×cos$\alpha$，得

$$F_1' = \frac{F_1 - F_2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$\boldsymbol{F}$ 的矢量式为

$$\boldsymbol{F} = \frac{F_1 - F_2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\boldsymbol{e}_1 + \frac{F_2 - F_1\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\boldsymbol{e}_2$$

**1－4** 求题 1－1 中力 $\boldsymbol{F}$ 对 $x$、$y$、$z$ 三轴、$CD$ 轴、$BC$ 轴及 $D$ 点之矩。

**解** 由题 1－1 得到力 $\boldsymbol{F}$ 在 $x$、$y$、$z$ 三轴上的投影分别为

$$F_x = 48\ \text{N} \quad F_y = -64\ \text{N} \quad F_z = 60\ \text{N}$$

力对三轴之矩分别为

$$m_x(\boldsymbol{F}) = F_z b - F_y c = 16.68\ \text{N·m}$$

$$m_y(\boldsymbol{F}) = F_x c = 5.76\ \text{N·m}$$

$$m_z(\boldsymbol{F}) = -F_x b = -7.20\ \text{N·m}$$

力对 $CD$ 轴、$DE$ 轴之矩为

$$m_{CD}(\boldsymbol{F}) = -(F_x c + F_z a) = -15.36\ \text{N·m}$$

$$m_{DE}(\boldsymbol{F}) = F\cos\alpha(a\sin\beta - b\cos\beta) = 3.04\ \text{N·m}$$

力对 $D$ 点之矩为

$$m_{DC}(\boldsymbol{F}) = F_x c + F_z a = 15.36\ \text{N·m}$$

$$\boldsymbol{m}_D(\boldsymbol{F}) = m_x\boldsymbol{i} + m_{DC}\boldsymbol{j} + m_{DE}\boldsymbol{k} = 16.68\boldsymbol{i} + 15.36\boldsymbol{j} + 3.04\boldsymbol{k}$$

由于 $BC$ 轴的长度为

$$|BC| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{16^2 + 15^2 + 12^2} = 25\ \text{cm}$$

所以 $\cos\angle EBC = \dfrac{x}{|BC|} = \dfrac{a}{|BC|} = \dfrac{16}{25}$（$BC$ 向 $x$ 轴投影）

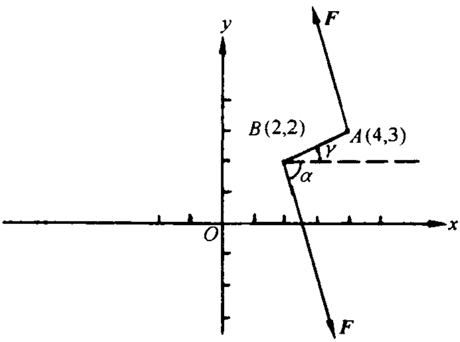
$\cos\angle OBC = \dfrac{z}{|BC|} = \dfrac{c}{|BC|} = \dfrac{12}{25}$（$BC$ 向 $z$ 轴投影）

因此，力对 $BC$ 轴之矩为

$$\begin{aligned} m_{BC}(\boldsymbol{F}) &= F\sin\alpha\, b\cos\angle EBC + F\cos\alpha\cos\beta\, b\cos\angle OBC \\ &= F_z b\cos\angle EBC + F_x b\cos\angle OBC \end{aligned}$$

$$=(60\times15\times\frac{16}{25}+48\times15\times\frac{12}{25})\times10^{-2}=9.216\ \mathrm{N\cdot m}$$

**1－5** 位于 $Oxy$ 平面内之力偶中的一力作用于点(2,2)，投影为 $X=1, Y=-5$，另一力作用于点(4,3)。试求此力偶之力偶矩。




**题 1－5 图**

**解** 力偶中之力的大小为

$$F=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{26}\ \mathrm{N}$$

力偶臂 $d=|AB|\sin(\alpha+\gamma)$

$$\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{26}}\quad\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt5}\quad\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt5}$$

$$|AB|=\sqrt{(4-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt5\ \mathrm{m}$$

$$d=\sqrt5\times\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\times\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt{26}}\times\frac{1}{\sqrt5}\right)=\frac{11}{\sqrt{26}}\ \mathrm{m}$$

故此力偶之力偶矩为

$$m=Fd=\sqrt{26}\times\frac{11}{\sqrt{26}}=11\ \mathrm{N\cdot m}$$

方向为逆时针。

**1－6** 图示与圆盘垂直的轴 $OA$ 位于 $Oyz$ 平面内，圆盘边缘一点 $B$ 作用有切向的力 $\boldsymbol{F}$，尺寸如图示。试求力 $\boldsymbol{F}$ 在各直角坐标轴上的投影，并分别求出对 $x$、$y$、$z$ 三轴、$OA$ 轴及 $O$ 点之矩。

**解** 由于力 $\boldsymbol{F}$ 在 $x$、$y$、$z$ 三轴上的投影为

$$F_x = F\cos\varphi \quad F_y = -F\sin\varphi\cos\theta \quad F_z = F\sin\varphi\sin\theta$$

$\boldsymbol{F}$ 对 $OA$ 轴之矩为

$$m_{OA}(\boldsymbol{F}) = -Fr$$

点 $B$ 的坐标为

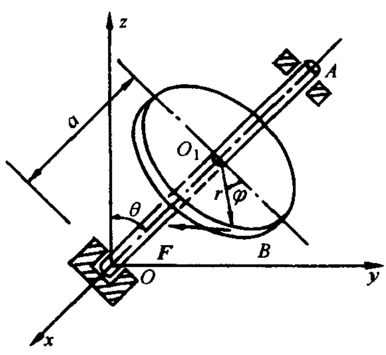
$$B(r\sin\varphi, a\sin\theta + r\cos\varphi\cos\theta, a\cos\theta - r\cos\varphi\sin\theta)$$

所以力对 $x$、$y$、$z$ 轴之矩为

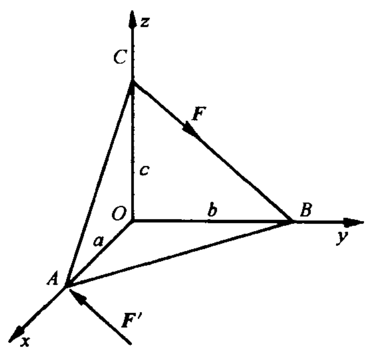
$$m_x = yF_z - zF_y = Fa\sin\varphi$$
$$m_y = zF_x - xF_z = F(a\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta)$$
$$m_z = xF_y - yF_x = -F(a\cos\varphi\sin\theta + r\cos\theta)$$

力对 $O$ 点之矩为

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = m_x\boldsymbol{i} + m_y\boldsymbol{j} + m_z\boldsymbol{k}$$
$$= Fa\sin\varphi\boldsymbol{i} + F(a\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta)\boldsymbol{j} + [-F(a\cos\varphi\sin\theta + r\cos\theta)]\boldsymbol{k}$$




**题 1－6 图**




**题 1－7 图**

**1－7** 如图示在△$ABC$ 平面内作用力偶$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}')$，其中力 $\boldsymbol{F}$

位于$BC$边上，$\boldsymbol{F}'$作用于$A$点。已知$OA=a$，$OB=b$，$OC=c$，试求此力偶之力偶矩矢及其在三个坐标轴上的投影。

**解** 由力偶矩矢定义得

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}_{AC}\times\boldsymbol{F}$$

而

$$\boldsymbol{r}_{AC}=\boldsymbol{r}_{OC}-\boldsymbol{r}_{OA}=-a\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}=\frac{bF}{\sqrt{b^2+c^2}}\boldsymbol{j}-\frac{cF}{\sqrt{b^2+c^2}}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}=\left[(-a\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{k})\times\left(\frac{bF}{\sqrt{b^2+c^2}}\boldsymbol{j}-\frac{cF}{\sqrt{b^2+c^2}}\boldsymbol{k}\right)\right]$$

$$=-\frac{F}{\sqrt{b^2+c^2}}(bc\boldsymbol{i}+ac\boldsymbol{j}+ab\boldsymbol{k})$$

将力偶矩矢$\boldsymbol{M}$在三个坐标轴上投影，分别得

$$m_x=\frac{-Fbc}{\sqrt{b^2+c^2}}\qquad m_y=\frac{-Fac}{\sqrt{b^2+c^2}}\qquad m_z=\frac{-Fab}{\sqrt{b^2+c^2}}$$