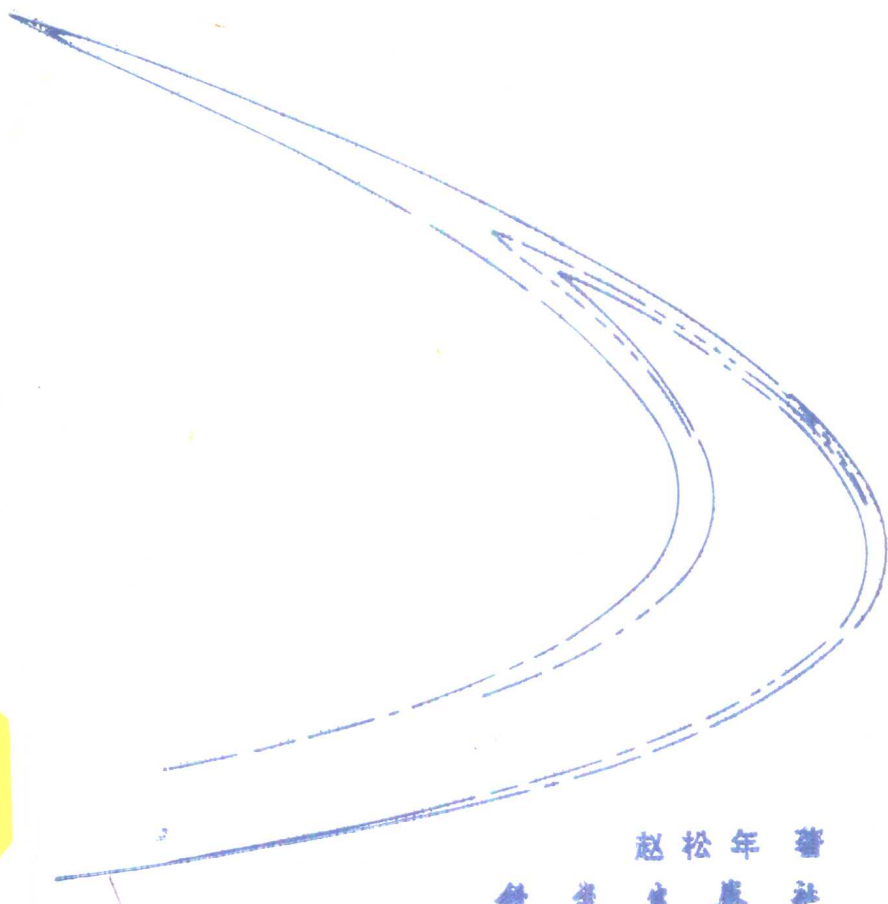


非线性科学

—它的内容、方法和意义



赵松年 著

科学出版社

51
5
3

非 线 性 科 学

——它的内容、方法和意义

赵松年 著

科 学 出 版 社

1 9 9 4

(京) 新登字 092 号

内 容 简 介

非线性科学是当代迅速发展的、对自然科学影响深远的综合科学,它研究数理科学、生命科学、空间科学、地球科学、工程科学中非线性现象的共性和复杂性,是当代重大的前沿科学。

本书以生动流畅的笔调,深入浅出地介绍了非线性科学的发展过程和研究进展,主要的研究内容和方法。

本书可供高等院校理工科大学学生、教师,广大科技人员,自然科学史研究人员,哲学工作者和科学技术管理与决策人员阅读。

非 线 性 科 学

——它的内容、方法和意义

赵松年 著

责任编辑 方开文

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

北京怀柔县黄坎印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994年2月第一版

开本:850×1168 1/32

1994年2月第一次印刷

印张:3 1/4

印数:1—1550

字数:84000

ISBN 7-03-003827-4/O·672

定价:3.90 元

致 读 者

非线性科学像一片海滩,是通向真理的大海的必由之路;非线性科学又是一片沃土,需要无私奉献者的辛勤的耕耘。

呈献给读者的这本小册子,仅仅勾画出非线性科学发展进程的轮廓,而后者所描绘的大自然则是绚丽多彩的。

爱因斯坦曾说过,“科学不是而且永远不会是一本写完了的书,每个重大的进展都带来了新问题,每一次发展总要揭露出新的更深的困难”,有志于科学事业的人,要向爱因斯坦那样始终不渝地献身于科学,研究新的问题,解决新的困难,为推动非线性科学向前发展贡献自己的力量。

作者谨识

1992年12月25日

致 谢

北京大学力学系朱照宣教授、物理系赵凯华教授;中国科学院复杂性研究联络中心张焘先生、李喜先高级工程师;生物物理研究所姚国正副研究员;大气物理研究所吕达仁研究员、胡非博士仔细阅读过本书预印本,提出了许多宝贵的修改意见,并给予热情的鼓励与支持,作者谨向他们表示衷心的感谢。

本书预印本曾作为 1992 年北京大学举办的《全国非线性物理学导论》讲习班的材料供学习之用,熊小芸工程师、刘华杰博士、潘涛老师校阅了打印稿,改正了不少错误,作者也一并表示感谢。

作者在写作本书时,曾从中国科学院学部委员、著名科学家郝柏林教授所写的《分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他——关于确定论系统中的内在随机性》的长篇论文中获得教益和启发,还曾参阅了国内外许多作者的著作与论文,在本文的参考文献中均一一列出,在此谨向他们表示衷心的感谢。

中国科学院学部委员、大气物理研究所所长、著名科学家曾庆存研究员对作者给予了一贯的支持、关心和帮助,在此谨向他表示诚挚的感谢。

本书是作者患病时撰写的,得到妻子与孩子的关心和照料才得以完成,作者也向他们表示感激之情。

作者衷心企盼对本书提出各种批评与指正。

作者于北京中国科学院大气物理研究所

1992 年 3 月 20 日

目 录

§1 引言	1
§2 近期非线性科学研究的主要内容	3
1. 非线性映射的宏观特性.....	3
2. 混沌与分形.....	9
3. 动力系统的时间反演问题.....	22
4. 自组织与耗散结构.....	32
5. 随机非线性微分方程.....	40
6. 湍流.....	45
7. 神经网络系统.....	52
8. 孤立子与拟序结构.....	62
9. 复杂性探索.....	65
§3 研究方法	67
1. 实验数学.....	68
2. 元胞自动机.....	69
3. 重正化群方法.....	76
4. 散射反演方法.....	82
5. 役使原理.....	84
§4 展望	88
1. 国内外进展.....	89
2. 哲学上的思考.....	91
3. 中青年科研人材的培养.....	92
4. 结束语.....	93

科学家不是因为有用才研究自然的，他研究自然是因为他从中得到快乐，他从中得到快乐是因为它美。若是自然不美，知识就不值得去追求，生命也就失去了存在的意义。……

——亨利·庞加莱 (Henri Poincaré)

§ 1 引 言

非线性问题并不是一个近期才出现的新问题，也不是一个新的科学概念。由于在确定论的系统中发现了混沌现象，极大地激发了人们探索自然界和社会中存在的各种复杂性问题，同时也逐渐改变了人们观察周围世界的思维方法。由于复杂性往往与非线性紧密联系在一起，因此，在近二十年中，从自然科学，工程技术甚至到社会科学各领域，广泛深入地开展了非线性问题的研究，已经取得的成果显示了非线性研究在诠释丰富多彩的自然界、复杂多变的周围世界方面的深刻性，并且在哲学与方法论方面引起了深刻的变革。

由伽利略-牛顿所创立的经典力学是确定论描述的典范，它在天体运行规律的研究方面所取得的辉煌成就使得人们认为经典力学无所不能，似乎已功德圆满，决定论与时间可逆性规律驰骋的疆域已尽收眼底，当时著名的天文学家拉普拉斯曾自豪地宣称：“自然系统的当前状态很明显是其在前一瞬间的状态的结果；如果我们想象某一位天才在一给定时刻洞悉了宇宙所有事物间的全部关系，那么他就能够说出在过去或未来任一时刻所有这些事物的相对位置、运动及总作用……。为了确定由这些巨大天体组成的系统在若干世纪前或若干世纪后的状态，数学家们只需要在任一时刻通过观察测定其位置与速度就行了。”到了20世纪初，量子力学、相对论的创立，微观粒子波粒二象性和不确定关系的发现，使人们认识到客观世界是复杂的，自然界中除了牛顿

力学支配的确定论过程之外，还存在着大量的随机性过程，尽管如此，科学界几乎没有理由怀疑拉普拉斯在二百年前的见解至少在理论上是正确的。

爱因斯坦一生中始终坚定地认为自然界是简单的、和谐和统一的。过去、现在与未来之间的差别只是一种幻觉，他曾说过一句名言：“上帝不掷骰子”。也就是说，自然界的规律是确定论的。

然而，另一位科学伟人，法国数学力学家庞加莱(Poincaré)在本世纪之初却认识到：一个系统的状态中的任意小的不确定因素可能会逐渐增大，使未来的状态是不可预测的。他认为，“一种非常微小以致于我们觉察不到的起因可能产生一个显著的、我们决不会看不到的结果。这里我们就说这结果是偶然产生的……可能会有这种情况：初始条件中的微小差异导致最终出现根本不同的现象。前者的微小误差将使后者出现巨大误差。于是我们就不可能作出预言，这现象就被认为是偶然性的现象。”

60年代，混沌现象的发现，引发了人们对复杂性问题的研究，逐渐认识到非线性因素是这种复杂性问题的集中表现。通过简单的一维非线性映射，发现倍周期分岔现象的普适常数和时间演化中趋向混沌并且出现奇怪吸引子等非线性问题的共同特点。由此启发人们突破不同学科领域的局限性，从而形成了非线性科学这样综合性、交叉性的前沿学科。

相反，线性系统满足叠加原理，整体等于部分之和。数学的发展早已为线性系统的研究提供了包括线性代数、线性微分方程、傅里叶分析、线性算子理论和随机过程的线性理论在内的强有力的解析方法和工具，因此没有必要形成“线性科学”这一独立的学科分支。

正如非线性不满足整体是部分之和这一原理一样，非线性科学也不是非线性数学，非线性物理，非线性力学等等分支学科的总和。当前，人们已经发现，在自然科学的各个不同的领域内，各种系统有着共同的概念，非线性系统具有超越不同学科领域局

限性的共同性质，非线性研究正在从范例的研究走向一个以探索复杂性为目标的新学科——非线性科学。

虽然科学知识的增长是爆炸性的，但以混沌现象作为中心课题的非线性科学的基本概念将会持久地影响自然科学的进程，成为继量子力学、相对论之后的一次新的科学革命。

§ 2 近期非线性科学研究的主要内容

非线性问题的研究是极其困难的，过去采用在运转点附近线性化的方法，或者针对具体的非线性方程来寻求个别的解析处理方法。但是直至目前，对于非线性问题仍然没有完全系统的，类似于傅里叶变换那样的处理方法，更多的是集中于典型范例的研究和作某些定量分析。现仅根据国内外在非线性的研究方面的近期进展和侧重点将其研究内容归纳为如下九个方面：

1. 非线性映射的宏观特性

在混沌现象的研究中起着重要作用的是如下的一维非线性映射方程：

$$x_{n+1} = f(a, x_n) \quad (1)$$

其中 a 为控制参量，恰当地选取 a 之值，可以使 x_n 的每一个值映射为 x_{n+1} 的一个值，而且 x_{n+1} 与 x_n 的取值范围可以限制在线段 I 内。

式 (1) 的一个简例是 $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$ ，它是从生态学中虫口模型

$$x_{n+1} = x_n(b - cx_n) \quad (2)$$

演变而来，适当选择坐标，设 $x = z - A$ ， $A = \sqrt{(1/a)}$ ， $b = -2\sqrt{(1/a)} \cdot a$ ， $c = a$ 则式 (2) 简化为

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 \quad (3)$$

如果 a 值在 0 与 4 之间，则 $0 \leq x_n \leq 1$ 之中的任何值仍然映射到间隔 $0 \leq x_{n+1} \leq 1$ 之内，从初始值 x_0 很容易计算出 $x_1, x_2 \cdots x_{n+1}$ 的序

列,更方便直观的是用几何作图法来揭示上述迭代过程的各种行为,在图1至图5中,作 x_n 轴与 x_{n+1} 轴夹角的角平分线,给定了初值 x_1 ,由 x_1 点作横轴的垂线与抛物线相,然后通过该交点向纵轴投影可得 x_2 ,重复这一过程得到 $x_n(n=2,3,4,\cdots)$ 序列。

这一迭代或映射的关键是控制参数 a 的选择, x_n 的各种非线性迭代行为随 a 值的变化而变化。 $a < 3$ 时, x_n 收敛于一个不动点(图3)。当 $3 < a < a_2$ 时 x_n 收敛于周期 $T=2$ 的周期跳动(图4),

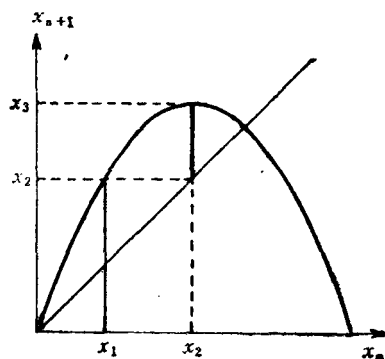


图 1

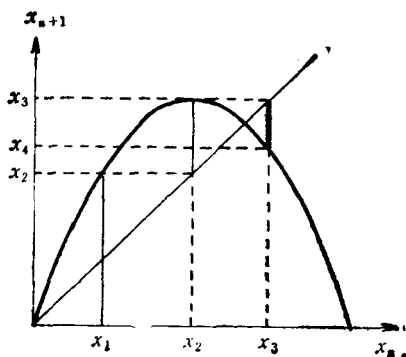


图 2

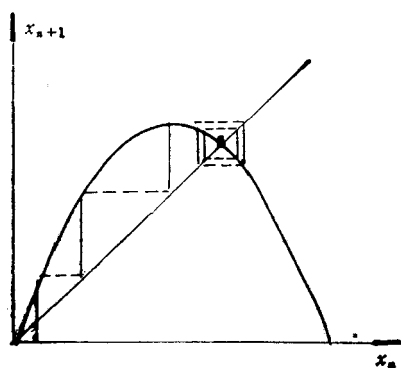


图 3

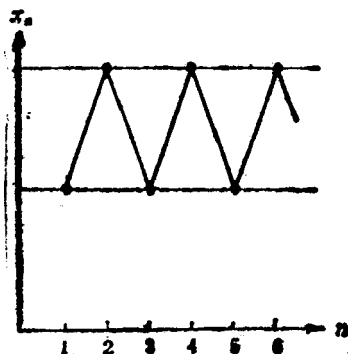


图 4

当 $a_2 < a < a_3$ 且 x_n 足够大时, x_n 经过周期 $T=4, 8, \dots$ 之后又返回到 $T=n+4, n+8, \dots$ 之值(如图5); 对于各种不同的 a 值, 当 $n \rightarrow \infty$ 时作出 x_n 的映象, 如图6所示。

这是一个以 2^n 方式分岔的倍周期序列, 相应的控制参量为

$$a = a_\infty = 3.569945672 \dots$$

出现倍周期分岔的点所对应的 a_n 序列遵从下列简单的关系式:

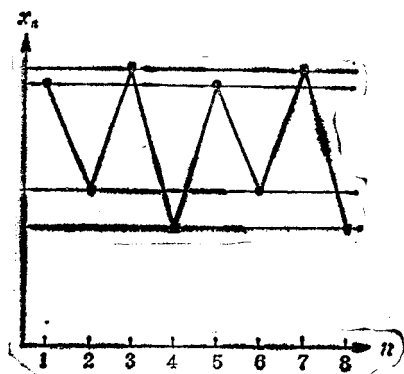


图 5

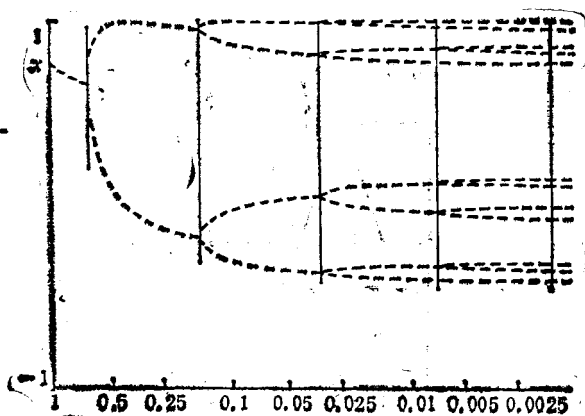


图 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \right) = \delta \quad (4)$$

$\delta = 4.6692016809\cdots$, 称做 Feigenbaum 普适常量, 这是因为如式 (1) 所表示的整个一类非线性映象的倍周期序列都无例外的遵从式 (4), 也就是符合 δ , 它与系统本身的具体结构的细节无关, 迭代过程所呈现的特征是相间的, 这已为从对流体到非线

性振荡电路的实验所严格地证明了 δ 的普适性。一个具体的实验电路如图7所示。

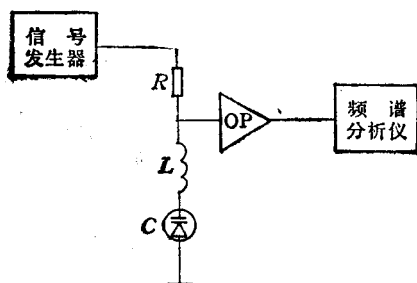


图 7

非线性元件是变容二极管 C ，电容二端的电压与电容的关系是非线性的，即

$$C(V_c) = \frac{C_0}{(1 + aV_c)^r} \quad (5)$$

讯号发生器对 RLC 振荡回路的激励电平较低时，回路的响应是线性的，有一个谐振频率 f_0 ，逐渐增大激励电平 V_c 并越过某个阈值电平 V_0 时，振荡回路便会出现对基频 f_0 的 2^{n+1} 级的分频序列，当然也可以根据如下电回路方程通过计算机模拟实验来检验 δ 值。

$$L \frac{dI}{dt} + V_c + RI = V \sin(2\pi f_0 t) \quad (6)$$

$$I = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} [V_c C(V_c)]$$

与式(2)表示的虫口模型不同，但也是十分简单的圆映射动态系统是

$$x_{n+1} = \omega + x_n + \frac{h}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \quad (7)$$

显然改变控制参量 h 将会获得与式(2)完全一致的倍周期分岔序列，类似地还可以列出许多这样的例子，如 $x_{n+1} = \mu \sin(\pi x_n)$ 和

$x_{n+1} = x_n[\mu(1-x_n)]$ 等，在越过 a_∞ 之后， x_n 的值呈现出不规则的图象，即混沌现象。在 $a \sim x_n$ 的迭代图中，可以将 a （特别是 a_∞ ）分割成许多小段，再改变 a 的比例尺度，以便尽可能地将每一小段 a_i 的比例尺度扩大，使动力系统进入混沌区之后的细部层次构造显现出来。一个典型分岔 $\rightarrow$ 混沌过程如图 8 所示。

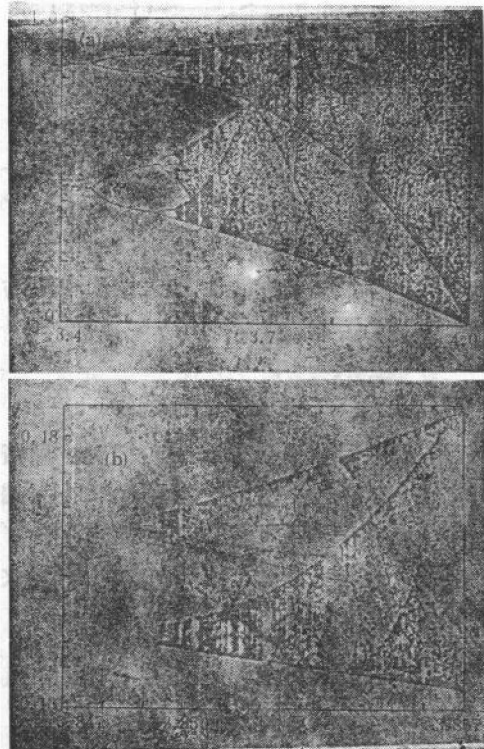


图 8

其实在这些混沌区内，仍然表现出某种规律，在控制参数 a 的 $[0-a_\infty]$ 区间内，有 2^n 个倍周期分岔区；在 $[a_\infty-2]$ 区间内，也有 2^n 个混沌带，它们从左右两方面收敛于 a_∞ ， x 的迭代值以 2^n 的顺序落入这些窄带区内，在每个带内 x 的分布则是随机的，这就是所谓的无穷嵌套的自相似结构。在分形与分维一节内再进一步说明。

顺便指出, 式 (2) 也可以用来模拟环形粒子加速器内穿过磁场的电子束的轨迹, 电子绕加速器环旋转一周后在某一点上的横向位移可以用介于 0 与 1 之间的分数 x 表示, 该电子下一周的横向位移便是 $ax(1-x)$, 同一横截面上电子的位移就由 $ax(1-x)$ 来计算。

上述迭代过程表达了式 (1) 的离散时间演化过程 (n 为 t_n , $\Delta t=1$), 由于存在非线性 (虽然是很简单的), 使这类一维映象都不能单值地确定它的逆映象 $f^{-1}(a, x_{n+1})$, 非线性将导致系统的耗散结构。所以, 可以把式 (1) 的迭代过程看作是单变量耗散系统的不可逆演化过程。

2. 混沌与分形

我们已经看到, 在确定性系统中出现了不规则的、非周期的、错综复杂的、具有自相似结构的非线性现象。与式 (1) 的迭代过程相比, 人们更关心的是由非线性微分方程描述的动态过程的演化特性。

首先介绍描述基本大气环流运动的 Lorenz 方程, 它以无限平板间流体热对流运动的简化模型为基础, 由于它的变量不显含时间 t , 一般称作自治方程, 即

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中 $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ 表示变量对时间的微分, 其中变量 x 代表对流强度, y 代表上升流与下降流之间的温差, z 代表铅直方向温度分布的非线性强度; r 是瑞利 (Rayleigh) 数 Ra 与其临界值 R_c ($27\pi^4/4$) 之比, 表示引起对流和湍流的驱动因素 (此处就是上下平板之间的温差 ΔT) 与抑制因素 (此处即粘性) 之比值, 也是 Lorenz 方程 (8) 的主要控制参数, σ 是普朗特 (Prandtl) 数, b 代表与对流纵横比有关的外形比。

在作具体数值计算之前,先对方程(8)作一简单的解析研究,由于在 x, y, z 组成的三维空间中,原点 ($x=0, y=0, z=0$) 是平衡点,也就是没有对流的静态,这时 $Ra=R_c, r=1$, 在平衡点施加一个微扰 ($\delta x, \delta y, \delta z$) 然后进行线性化稳定性分析,可以得出系统 (8) 在微扰作用下的演化方程

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中参数矩阵

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

就是通常所说的李雅普诺夫 (A.M. Lyapunov) 矩阵, 由此可得特征值方程:

$$[\lambda + b][\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0 \quad (10)$$

特征值 λ 的正负决定了系统 (9) 在小扰动作用下动态过程的稳定性。当 $\lambda < 0$ 时, 扰动的响应是衰减的; $\lambda > 0$ 时, 扰动的响应将随时间不断增长, 平衡点失去稳定性, 显然, 特征方程 (10) 的解有三个根:

当 $0 < r < 1$ 时, 3 个根均为负实根;

$r > 1$ 时, 有一个正根;

$r = 1$ 时, 有一个零根, 系统处于临界状态。

实际上, 使 Lorenz 模型出现复杂行为的是 $r > 1$ 的情况。这时, 系统失稳, 演化中出现二个新的定态, $x = y = \pm \sqrt{b(r-1)}$, $z = r - 1$, 对此再作线性化处理, 可得如下的特征方程:

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(r + \sigma)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0 \quad (11)$$

类似地, 当 $r > 1$ 时, 特征方程 (11) 有一个负实根和二共轭复根, 前者使微扰的响应在相应的一个方向上衰减; 后者则使系统的响应在另外二个方向上振荡, 继续改变 r 值, 当 $r = r_0 = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$ 时, 对流失稳, 流体的对流运动进入湍流状态。

上述的线性化稳定性分析, 只能很粗糙地描绘系统的动态过

程，不能给出**细节**图象。

1961年 Lorenz 根据大气运动的实际情况，设定了具体参数 $b=8/3$, $\sigma=10$, 求出 $r=r_0=24.736$, 然后改变 r 值，通过计算机对模型 (11) 进行数值积分，受当时计算机速度与运行稳定性（连续工作时间）的极大限制，Lorenz 事先选定记录纸带上的某一位置 a 作为计算开始时的记录起始位置，并使 a 正比于模型中的某一变量（例如 x ，即 $a=kx(t)$ ），这样，变量随时间演化的数字计算结果便由 $a(t)$ 的连续变化直观地反映出来，初始条件只有千分之一误差的二组计算结果却造成了其后完全不同的演化过程，如图 9 所示。

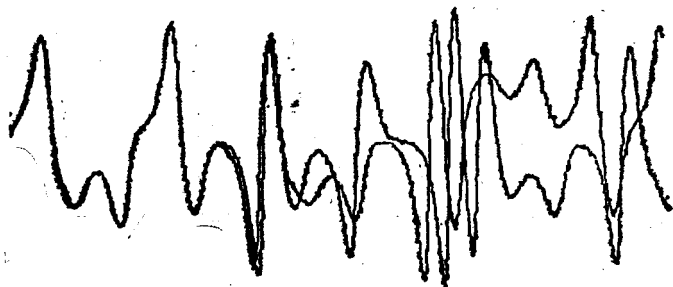


图 9

初始条件代表在起始时刻对系统所作的测量，测量越精确，观测者所获得的关于该系统的知识就越多，如果初始条件的微小变化引起的运动轨迹的改变也是微小的，那么初始条件所包含的信息将保留下来。因而可以对系统的动态过程作出预测，这时我们可以说系统对初始条件是不敏感的，相反，Lorenz 模型中初始条件的微小变化造成了轨线的巨大变化，初始条件包含的信息由于指数型发散而丧失，这时便不能预测系统长时间演化的行为，我们可以说系统是敏感初条件的。失之毫厘，差之千里。

Lorenz 由此得出结论：“任何具有非周期行为的物理系统，将是不可预报的。”突破确定论长期禁锢的新的科学概念就这样诞生了。