2001年硕士研究生入学考试

数学课（工科类）复习指导

柳重堪　张旭红
王卫东　闫守峰　编

航空工业出版社

硕士研究生入学考试　数学课（工科类）复习指导

2001年硕士研究生入学考试

数学课(工科类)复习指导

柳重堪　张旭红
王卫东　闫守峰　编

航空工业出版社

内容提要

本书根据国家教育部制定的全国工学项士研究生入学考试数学考试大纲编写而成,本书包括两类工科类数学试卷的考试科目、试卷结构及考试大纲所要求的各部分数学内容的提要和示范性例题。考生可根据考试要求有选择地进行参考复习。同时,本书还设计了两类数学各四套模拟试题,给出了解答,并对其中的填空题和选择题给出了关于求解方法的注解。书末附有2000年硕士研究生考试数学一、数学二试题,参考答案及评分标准。

本书适用于广大报考工学硕士研究生的考生学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

2001年硕士研究生入学考试数学课复习指导.工科类/柳重堪等主编. -北京:航空工业出版社,2000.7

ISBN 7-8013-702-1

Ⅰ.2… Ⅱ.柳… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学考参资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第64827号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号 邮编100029)

河北香河印刷厂印制 全国各地新华书店经销

开本:787×1092 1/16 印张:19.75 字数:550千字

2000年7月第1版 2000年7月第1次印刷

印数:1-5000册 定价:28.00元

前　言

为了帮助报考工学硕士研究生的考生复习和应考，根据国家教育部制定的全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲，我们编写了这本书。

本书包括两类工科类数学试卷的考试科目、试卷结构以及考试大纲所要求的各部分数学内容的提要和示范性例题。考生可根据考试要求有选择地进行参考复习。同时，本书还设计了两类数学各四套模拟试题，给出了解答，并对其中的填空题和选择题给出了关于求解方法的注解，使考生了解为什么如此解答。

本书初版时承袁公英、邵士敏、姚孟臣三位专家对部分书稿进行了认真的审阅，提出了许多宝贵的意见，在此谨表衷心的谢意。本版比初版增加了较多的例题和解题思路。

作者深深地感谢北京航空航天大学教务处长沈颂华教授对本书出版的大力支持和推荐。

由于编者水平有限和时间仓促，书中难免有不妥和错误之处，恳请读者和专家指正，以便今后再版时修正。

编　者

2001 年 4 月于北京

目　录

一、工科两类数学试卷考试科目和试卷结构

数学一

（一）考试科目及内容比例

高等数学　约60%
线性代数　约20%
概率论与数理统计初步　约20%

（二）题型比例

填空题与选择题　约30%
解答题（包括证明题）　约70%

数学二

（一）考试科目及内容比例

高等数学　约85%
线性代数初步　约15%

（二）题型比例

填空题与选择题　约30%
解答题（包括证明题）　约70%

二、高等数学(微积分)内容提要及考试要求

(一) 函数、极限、连续

内容提要与例题

1. 函数概念

函数概念涉及函数的定义,表示法(公式,图形,表格),定义域,值域等。

2. 函数的几个重要特性

(1) 单调性　单调增加,单调减少。

(2) 有界性　若存在某一正数 M,使得对一切 $x \in (a,b)$,恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界。

(3) 奇偶性　从图形上看,偶函数的图形对称于 y 轴,奇函数的图形对称于原点 O。

(4) 周期性

3. 基本初等函数

常值函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数(掌握它们的图形,性质。要记住三角函数的加法公式,半角倍角公式,和差化积公式,积化和差公式等。)

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及复合步骤而得到的函数称为**初等函数**。

例 1　研究函数 $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ 的奇偶性、单调性及反函数。

解　$f(-x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \ln \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = -\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = -f(x)$

故 $f(x)$ 是奇函数。

设　$y = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$,由上式又得 $-y = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$,于是

$$\sqrt{x^2+1} - x = e^y, \qquad \sqrt{x^2+1} + x = e^{-y}$$

两式相减,得

$$x = \frac{e^{-y} - e^y}{2}$$

因此 $f(x)$ 的反函数为

$$y = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{sh} x$$

由 $y = \operatorname{sh} x$ 的单调增加,即知 $y = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ 是单调减少的。

例 2　设 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\underbrace{f(f\cdots f(x))}_{n次}$

解　$$f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2/(1+x^2)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{x/\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2/(1+2x^2)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

现设

$$\underbrace{f(f\cdots f}_{n次}(x))=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

则

$$\underbrace{f(f\cdots f}_{(n+1)次}(x))=\frac{x/\sqrt{1+nx^2}}{\sqrt{1+x^2/(1+nx^2)}}=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$$

由归纳法知

$$\underbrace{f(f\cdots f}_{n次}(x))=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

例 3 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求$\int\varphi(x)\mathrm{d}x$

解 由于 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$,故

$$f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$$

又因

$$f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$$

故

$$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x,\quad \varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

因此

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{x-1+2}{x-1}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln|x-1|+C$$

5. 数列极限,函数极限

要掌握数列极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

的定义,函数极限

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a}f(x)=A$$

的定义,函数左、右极限

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A$$

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=B$$

的定义。函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是函数在该点处的左、右极限存在且相等:$f(x_0-0)=f(x_0+0)$。

6. 极限的四则运算法则(+、-、×、÷)

7. 两个极限存在准则

(1) 夹逼准则

若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$;

若 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\lim\limits_{x\to\square}g(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to\square}h(x)=A$。

(2) 单调有界准则　单调增加且有上界(或单调减少且有下界)的数列必有极限。

8. 几个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\alpha},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

9. 无穷小　无穷小是极限为零的量。

无穷小的比较:

$\alpha\sim\beta$(等价无穷小):$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$,例如,当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,　$\mathrm{e}^x-1\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$ 等

α 与 β 是同阶无穷小:$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=k$(非零常数)

$\alpha=o(\beta)$(α 是 β 的高阶无穷小):$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$

10. 求极限的常用方法

(1) 利用极限的四则运算法则和函数的连续性;

(2) 利用洛必达法则(适用于各种未定式:$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^{\infty},\infty^0$);

(3) 利用代数或三角恒等变形;

(4) 利用已知极限;

(5) 利用极限存在的两个准则;

(6) 利用极限定义,导数定义,定积分定义;

(7) 利用等价无穷小(注意:等价无穷小只能用来代替乘除因子);

(8) 利用泰勒公式。

例 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\,\dfrac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\,\dfrac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdots\dfrac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)}\,\dfrac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^{\frac{4}{3}}-1}{\ln(1+\tan x)}$

解　由 $(1+u)^{\alpha}-1\sim\alpha u$　(当 $u\to 0$ 时)知　$(1+\sin x)^{\frac{4}{3}}-1\sim\dfrac{4}{3}\sin x$

由 $\ln(1+v)\sim v$　(当 $v\to 0$)时知　$\ln(1+\tan x)\sim\tan x$

因此

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\cos x=\frac{4}{3}$$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

解法一　(利用恒等变形)

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)+\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}+\frac{2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}\right]=2$$

解法二 （利用泰勒公式）

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1/3}-x\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right]^{[注]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\left(1-\frac{1}{2}\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[2+\frac{o(x^{-1})}{x^{-1}}\right]=2$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{(1+x)^{1/x}}{\mathrm{e}}\right]^{1/x}$

解法一 （取对数，用洛必达法则）因为

$$\lim_{x\to0}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)^{1/x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{(2+6x)(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

所以，原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

解法二 （取对数，用泰勒公式）因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x}=-\frac{1}{2}$$

所以，原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

例 5 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

解

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!\,4}\right]+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=-\frac{1}{12}$$

例 6 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

解

$$原式=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2/2!}{x\cdot\frac{1}{2!}x(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2}$$

其中用到了$\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1-\cos u}{u^2/2!}=1$，此式可用洛必达法则验证，或根据泰勒公式：$\cos u=1-\dfrac{1}{2!}u^2+o(u^2)$

例 7 求$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$

注 （1）本题用$(1+u)^a$的泰勒公式求极限时，要求 $u\to0$。题中取 $u=\dfrac{3}{x}$ 及 $u=\dfrac{2}{x}$。

（2）用泰勒公式求极限时，n 取多少应视题目而定。可用 $n=1$，$n=2$，$n=3$ 等试算。

解　原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right]^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{2\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right]^n$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n} = e^4$$

其中用到了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}n = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\,\frac{4}{1-\tan\frac{2}{n}} = 4$$

例 8　设 $f(x)$ 具有三阶连续导数,且满足

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^3$$

求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$

解　首先有 $f(0)=0$,因为否则根据连续性便有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right] = \infty$$

$\frac{f(x)}{x} \Rightarrow x$　$f(x) \Rightarrow x^2$

于是

$$f(x) = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3, \xi\text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

$\therefore f(0)=0$
$f'(0)=0$
$f''(0)=4$

又由

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+f'(0)+\frac{f''(0)}{2}x+\frac{f'''(\xi)}{6}x^2\right] = 3$$

推知　$f'(0)=0$. 这样,

$$3 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f''(0)}{2}x+\frac{f'''(\xi)}{6}x^2\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[x+\frac{f''(0)}{2}x+\frac{f'''(\xi)}{6}x^2\right] = 1+\frac{f''(0)}{2}$$

于是 $f''(0)=4$. 最后

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+2x+\frac{f'''(\xi)}{6}x^2\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[2x+\frac{f'''(\xi)}{6}x^2\right] = 2$$

因此　$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2$

思考　比较例 3,4,5,6 及例 8,总结一下使用泰勒公式求极限的场合和方法。

例 9　设 $\alpha>0, x_1>\sqrt{\alpha}, x_n$ 由公式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\alpha}{x_n}\right),\quad n=1,2,\cdots$$

所确定。求证:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且等于 $\sqrt{\alpha}$;(2) 令 $\varepsilon_n = x_n-\sqrt{\alpha}$, 则 $\varepsilon_{n+1}\leqslant\beta(\varepsilon_1/\beta)^{2^n}$,其中 $\beta = 2\sqrt{\alpha}$. (注:这里给出了求 $\sqrt{\alpha}$ 的一种近似方法及相应的误差估计)。

解

(1) 由 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{\alpha}{x_n}} = \sqrt{\alpha}$ 知数列 $\{x_n\}$ 有下界，由 $x_{n+1}/x_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{x_n^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{(\sqrt{\alpha})^2}\right) = 1$ 知数列 $\{x_n\}$ 单调下降。于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设为 A，则 A 满足

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{\alpha}{A}\right)$$

由此可得 $A = \sqrt{\alpha}$

(2) $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) - \sqrt{\alpha} = \frac{(x_n - \sqrt{\alpha})^2}{2x_n} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} \leqslant \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\varepsilon_n^2}{\beta}$

由此即可得到

$$\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1^2/\beta, \quad \varepsilon_3 \leqslant \beta(\varepsilon_1^2/\beta)^{2^2}, \cdots,$$

$$\varepsilon_{n+1} \leqslant \beta(\varepsilon_1^2/\beta)^{2^n}$$

11. 函数的连续性

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

判断函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否连续，常用下列方法：(1) $f(x)$ 在 x_0 及其附近是否有定义？(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在？(3) 该极限是否等于 $f(x_0)$？

函数 $y = f(x)$ 在 x_0 连续的充分必要条件是

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$

其中 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

12. 间断点的分类

(1) 若 $f(x)$ 在 x_0 点左、右极限存在，且 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$；或者 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$；或者 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ 但 $f(x)$ 在 x_0 点无定义，都称 x_0 点为 $f(x)$ 的**第一类间断点**。后两种情形又称 x_0 点为可去间断点。

(2) $f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限至少有一个不存在，则称 x_0 点为 $f(x)$ 的**第二类间断点**。

13. 函数连续性的运算

(1) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 x_0 点连续，则

$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$$

也在 x_0 点连续$\left(\text{对于}\frac{f(x)}{g(x)}\text{的情形，设 } f(x_0) \neq 0\right)$。

(2) 若 $\varphi(x)$ 在 x_0 点连续，且 $f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 点连续，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点也连续。

14. 初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内都是连续的。

15. 闭区间上连续函数的性质

(1) **介值定理**：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 (b) 之间的任何数 β，必存在 $c(a < c < b)$，使得 $f(c) = \beta$。

特殊情况(**零点定理**)：若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，必存在 $c(a < c < b)$，使得 $f(c) = 0$。

(2) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界。

(3) **最大值最小值定理**：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上必存在 x_1,x_2 使得

$$f(x_1)=\max_{x\in[a,b]}f(x)=M,\ f(x_2)=\min_{x\in[a,b]}f(x)=m$$

例 1 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性。若间断，指出它是什么类型的间断点。

解
$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\dfrac{1}{e^{1/x}}}{1+\dfrac{1}{e^{1/x}}}=1$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处不连续，且是第一类间断点。

例 2 研究函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{1}{t-x}}$ 的连续性，若有间断点请指出其类型。

解 当 $\sin x\neq 0$ 即 $x\neq n\pi$ $(n\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时

$$\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{1}{t-x}}=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{\ln\sin t-\ln\sin x}{t-x}}=e^{\cot x}$$

因此当 $x\neq n\pi$ 时 $f(x)$ 有定义且连续，又由

$$\lim_{t\to n\pi+0^+}f(x)=\infty$$

知 $x=n\pi$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点。

例 3 研究

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & x>0\\ \dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{x}{x^2-1}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

的连续性。

解 在 $x=0$ 处

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{\pi}\cos\frac{x}{x^2-1}=\frac{2}{\pi}=f(0)=f(0+0)$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

当 $x>0$ 时，显然 $\lim\limits_{x\to 2n}\dfrac{x(x+1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}=\infty$，故 $x=2,4,6,\cdots$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点。

当 $x<0$ 时,显然 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2}{\pi}\cos\frac{x}{x^2-1}$ 不存在,故 -1 是 $f(x)$ 的第二类间断点。

总之,在 $x=-1,2,4,6,\cdots$ 处 $f(x)$ 无定义,且这些点都是 $f(x)$ 的第二类间断点,除此以外,$f(x)$ 连续。

例 4 证明方程 $x=2\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内只有一个实根。

解 令 $f(x)=x-2\sin x$,它是初等函数,在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 内有定义,故连续。$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-2<0,f(\pi)=\pi>0$,由介值定义知必有 $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,使 $f(\xi)=0$。

又因 $f'(x)=1-2\cos x>0,x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内单调增加,因此 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内只有一个零点,即方程 $x=2\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内只有一个根。

例 5 (积分中值定理)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积且不变号,则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

分析 不妨设在 $[a,b]$ 上 $g(x)>0$, 则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$,若记

$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

则根据连续函数的介值定理,只需证明 $\mathrm{m}\leqslant\mu\leqslant\mathrm{M}$,其中 m,M 分别为 f(x)在[a,b]上的最小值,最大值。

而 $\mathrm{m}\leqslant\mu\leqslant\mathrm{M}$ 可由下式得知:

$$\mathrm{mg(x)}\leqslant\mathrm{f(x)g(x)}\leqslant\mathrm{Mg(x)}$$

$$\mathrm{m}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

函数极限连续考试要求[注]

数学一

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法。
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。
3. 理解复合函数的概念,了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形。

注 考试要求分为两个层次:关于概念、理论方面要求较高的用“理解”一词表达,要求较低的用“了解”一词表达;关于方法、运算方面要求较高的用“掌握”一词表达,要求较低的用“会”或“了解”来表达。

5. 会建立简单应用问题中的函数关系式。

6. 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系。

7. 掌握极限的性质及四则运算法则。

8. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。

9. 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限。

10. 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型。

11. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理），并会应用这些性质。

数学二

1. 理解函数的概念，会作函数符号运算并会建立简单应用问题中的函数关系式。

2. 了解函数的奇偶性，单调性，周期性和有界性。

3. 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。

4. 掌握基本初等函数的性质及图形。

5. 理解极限的概念，理解函数的左、右极限概念及函数极限存在与左、右极限之间的关系。

6. 掌握极限的性质及四则运算法则。

7. 理解极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握用两个重要极限求极限的方法。

8. 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限。

9. 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型。

10. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理），并会应用这些性质。

（二）一元函数微分学

内容提要与例题

1. 导数概念

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $f(x)$ 在 x_0 连续，反之不一定。

导数定义常可用来判断函数在一点是否可导。

例 1 $f(x)=x|x|$ 在 $x=0$ 处是否可导？

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0$，因此，$f(x)=x|\Delta x|$ 在 $x=0$ 处可导。

例 2 函数 $f(x)=(x+1)(x-2)|(x+1)(x-1)|$ 的不可导点为（　　）。

(A)1;　　(B) $-1,2$;　　(C) -1;　　(D) $1,-1$

解 由例 1 知应选(A)。

例 3 函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处(　　)。

(A)极限不存在；　　(B)极限存在但不连续；　　(C)连续但不可导；　　(D)可导

解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}=0=f(0)$

故 $f(x)$在 $x=0$ 处连续。再由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|}\sin\dfrac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x}\quad \text{不存在}$$

知 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导,故应选(C)。

例 4 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{2x}+b, & x\leqslant 0\\ \sin ax, & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处可导,求 a,b 之值。

解 由 $f(x)$在 $x=0$ 处可导知 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,于是 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$,即

$$e^{2\cdot 0}+b=\sin 0x,\quad 1+b=0,\quad b=-1$$

再由

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{e^{2\Delta x}-1-0}{\Delta x}=2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sin a\Delta x-0}{\Delta x}=a$$

故 $a=2$.

例 5 已知函数 $f(x)$满足 $f(x)=f(x+4)$,$f(0)=0$,且在$(-2,2]$上有 $f'(x)=|x|$,求 $f(9)$.

解 由已知,$f(x)$以 4 为周期,从而 $f(9)=f(1)$.

再由 $f'(x)=|x|\quad(-2<x\leqslant 2)$知

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+C_1, & -2<x\leqslant 0\\ \dfrac{x^2}{2}+C_2, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

下面求常数 C_1 和 C_2。由 $f(x)$在 $x=0$ 处连续及 $f(0)=0$ 可确定 $C_1=C_2=0$,即

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}, & -2<x\leqslant 0\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

于是 $f(9)=f(1)=\dfrac{1}{2}$.

例 6 设 $f''(x_0)$存在,求证

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

解 利用洛必达法则及导数定义,有

$$\begin{aligned}
\text{左端}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-2h}\right]\\
&=\frac{f''(x_0)}{2}+\frac{f''(x_0)}{2}=f''(x_0)=\text{右端}
\end{aligned}$$

注:如果在上述过程的第二步继续用洛必达法则:

$$\text{左端}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\overset{*}{=\!=}\lim_{\Delta h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}$$

$$\overset{**}{=\!=}f''(x_0)$$

这两步都有错。“ * ”的错误在于用到了 f''在 x_0 的附近存在,而题目只假定 f''在 x_0 存在
“ * * ”的错误在于用到了 f''在 x_0 处的连续性,这更不是题目所给的条件。

例 7 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

其中 $g(x)$有二阶连续导数,且 $g(0)=1,g'(0)=-1$

(1) 求 $f'(x)$; (2)讨论 $f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的连续性。

解 (1) 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{x[g'(x)+e^{-x}]-g(x)+e^{-x}}{x^2}=\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}$$

当 $x=0$ 时,根据导数定义,有

$$\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)-e^{-\Delta x}}{\Delta x^2}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g'(\Delta x)+e^{-\Delta x}}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g''(\Delta x)-e^{-\Delta x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}
\end{aligned}$$

因此

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0\end{cases}$$

(2) 显然当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)$连续,在 $x=0$ 处,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}f'(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}}{2x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0)
\end{aligned}$$