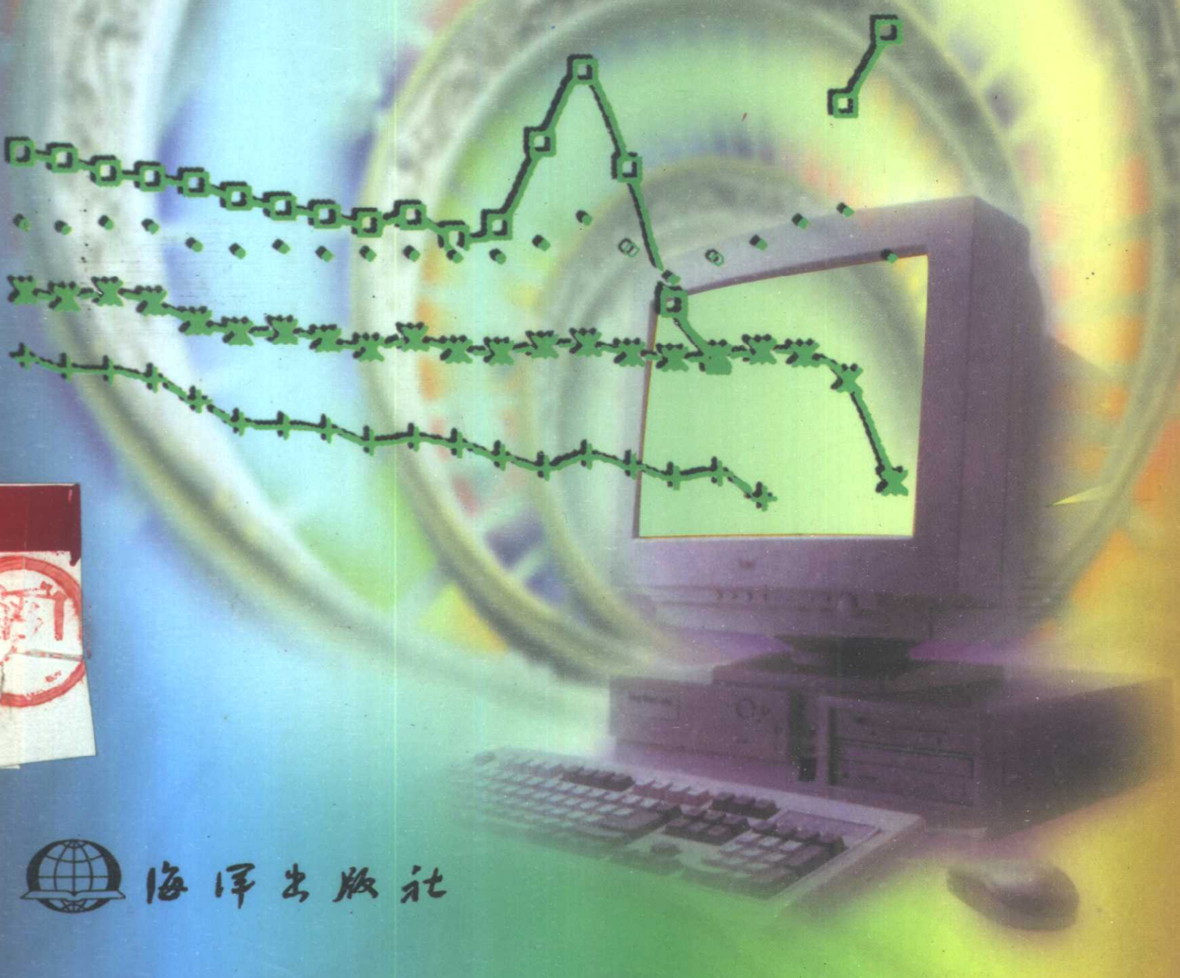
蒙特卡罗方法及其应用

1993～1997

裴鹿成 主编
王仲奇



海洋出版社

蒙特卡罗方法及其应用

1993～1997

裴鹿成
王仲奇　主编

海洋出版社
1998年·北京

内 容 简 介

本书收集了第六届全国蒙特卡罗学术交流会的部分论文。内容分为理论部分（包括蒙特卡罗方法基础、伪随机数产生、已知分布抽样等）和应用及软件部分（覆盖蒙特卡罗方法的主要应用领域），基本上反应了近几年来我国在蒙特卡罗方法研究和应用方面的学术水平，可供高级本科生、研究生和研究人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

蒙特卡罗方法及其应用/裴鹿成，王仲奇主编。—北京：海洋出版社，1998.7
ISBN 7-5027-4591-2

Ⅰ.蒙… Ⅱ.①裴…②王… Ⅲ.蒙特卡罗法-学术会议-中国-文集-
Ⅳ.0242.1-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 18192 号

责任编辑 王淑香

海洋出版社 出版发行

（100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号）
北京兰空印刷厂印刷 新华书店发行所经销
1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月北京第 1 次印刷
开本：787×1092 印张：9
字数：200 千字 印数：0—1000 册
定价：20.00 元

前　　言

第六届全国蒙特卡罗方法学术交流会已于1997年11月在广东湛江成功召开。编者将参与会上交流的部分论文，作为《蒙特卡罗方法及其应用》丛书的第二本，结集正式出版。本书由二十七篇论文组成，内容分为两个部分：理论部分、应用及软件部分。理论部分包括了蒙特卡罗方法基础、伪随机数的产生、已知分布抽样；应用及软件部分覆盖了蒙特卡罗方法的主要应用领域。本书基本上反映了自1993年西安会议以来我国在蒙特卡罗方法研究和应用方面的水平。愿本书能成为蒙特卡罗方法研究和应用的最重要参考书之一。

本书的出版得到了中国原子能科学研究院计算机应用研究所和北京海洋出版社的大力支持，中国原子能科学研究院计算机应用研究所电脑图文中心编辑排版了所有文稿，编者在此表示诚挚的感谢。

裴鹿成　王仲奇

1998年4月

全国蒙特卡罗方法专业委员会

中国原子能科学研究院

蒙特卡罗方法研究组

目　　录

理论研究部分

蒙特卡罗方法与随机性问题

裴鹿成

(中国原子能科学研究院)

摘要 随着科学技术的迅速发展,越来越复杂的随机性问题被提了出来。一般来讲,对于现代科学技术中所提出来的随机性问题,除极少数情况外,要想给出它的严格解是根本不可能的,用确定性方法给出其近似解也常常是非常困难的,有时甚至也是不可能的。

蒙特卡罗方法以对随机性问题进行仿真为其基本特征[1-5],这就决定了蒙特卡罗方法对于解决随机性问题具有很强的能力。本文给出了4个用蒙特卡罗方法解决随机性问题的实例,目的是想通过这些有趣的实例说明,对于许多用确定性方法所难以解决的随机性问题,用蒙特卡罗方法可以比较方便地解决。

1 Gauss问题

Gauss于1812年写信给Laplace,提出了如下一个著名问题:在(0,1)中任取一数,将它表示成简单连分数,试问其第 m 个完全商的小数部分小于 $x(0<x<1)$ 的概率为多少?

上述Gauss问题可以改述成:在(0,1)中,任取一数 a_1,按如下办法确定其后的 $a_2, a_3, \cdots, a_m$:

$$a_{i+1} = \begin{cases} \{\frac{1}{a_i}\} & \text{当 } a_i \neq 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } a_i = 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{1}$$

其中{ * }表示取数 * 的小数部分,试问 a_m 小于 x 的概率为多少?

Gauss问题提出后,直到1928年,经过长达116年之久,苏联数学家Кузьмин才给出了一个渐近结果[6]。用 $P_m(x)$ 表示 a_m 小于 x 的概率,Кузьмин的结果是

$$P_m(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} + O(e^{-\alpha\sqrt{m}}) \tag{2}$$

公式(2)中 α 为一正常数。到1948年,他又将其中的渐近误差阶改进成 $O(\alpha^m)$,$0<\alpha<1$,并且指出,这个渐近误差阶不可能再改进了。

为了解决Gauss问题,很明显,用蒙特卡罗方法解不仅不会遇到任何困难,而且还非常简单,其主要步骤如下:

(1)为计算作准备

令 $n=0, P=0$

(2)确定初值

令 $n=n+1; i=1, a_1=\xi$(ξ 为在(0,1)上均匀分布的随机数)

(3)确定下一个值

a_{i+1} 由公式(1)确定;令 $i=i+1$

(4)是否已经确定了 a_m

当 $i < m$ 时，a_m尚未确定，转至步骤(3)；否则，a_m已经确定。

(5)记录贡献

$$P = P + \eta(a_m < x) \tag{3}$$

其中 $\eta(*)$表示条件函数，当条件 * 成立时为 1，否则为零。

(6)抽样是否结束

当 $n < N$ 时(N 为样本总数)，抽样尚未结束，转至步骤(2)；否则，抽样结束，进入下一步骤。

(7)给出计算结果与误差

计算结果为

$$P_m(x) \approx \hat{P}_{m,N}(x) = \frac{P}{N} \tag{4}$$

误差则为[1,2,4,10]

$$P(|\hat{P}_{m,N}(x) - P_m(x)|) \leqslant 1.96\sqrt{\frac{\hat{P}_{m,N}(x)(1 - \hat{P}_{m,N}(x))}{N-1}} \approx 0.95 \tag{5}$$

其中 $P(*)$表示事件 * 发生的概率。

进一步比较上述 Кузьмин 方法和蒙特卡罗方法的优缺点。由于前者所给出的实际上只是一个渐近公式，若根据式(2)用 $\ln(1+x)/\ln 2$ 作为所求 $P_m(x)$的近似，当 m 较小时，相差可能较大；当 m 较大时，相差虽然可能较小，可是，在 Кузьмин 的结果中只给出了渐近误差的阶，无法确定误差，因此，要想用 $\ln(1+x)/\ln 2$ 确定 $P_m(x)$对于任意 m 的值，除非 m 足够大，是靠不住的。蒙特卡罗方法的情况则完全不是这样，它可以给 $P_m(x)$对于任意 m 的近似值及其误差估计，因此，如果目的仅限于给出关于 $P_m(x)$的数值结果，用蒙特卡罗方法计算出来的 $\hat{P}_{m,N}(x)$，要比用渐近公式 $\ln(1+x)/\ln 2$ 计算出来的更具有实际意义。

2 随机徘徊问题

处在 S 维空间格点上的质点，每步向 $2S$ 个相邻格点中的任一个移动的机会是均等的。所谓随机徘徊问题是问，质点返回初始位置的概率 $P(S)$(简称回返概率)为多少？

早在 1921 年，Polya 曾用分析的方法确定，$P(1) = 1$，$P(2) = 1$，$P(3) \neq 1$[7]。可是，大概是由于计算量太大的原因，直到 1940 年，事隔 19 年之久，才由另外两位学者给出了 $P(3)$的近似值：$P(3) \approx 0.35$[8]。下面我们来考虑一般的 S 维空间的随机徘徊问题。

用 U_m表示质点随机徘徊于第 m 步返回初始位置的概率。根据 U_m的定义，不难看出，当 m 为奇数时，$U_m = 0$；当 m 为偶数时，

$$u_m = \left(\frac{1}{2S}\right)^m \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_s=m/2 \\ l_1\geqslant 0,\cdots,l_s\geqslant 0}} \frac{m!}{\left(\prod_{i=1}^{S} l_i!\right)^2} \tag{6}$$

另一方面，若简单地用 P 表示回返概率 $P(S)$，则根据回返概率和 U_m的定义，一定有如下等式成立：

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = \sum_{m=1}^{\infty} mp^m(1-P) = \frac{P}{1-P} \tag{7}$$

由此方程立即得到关于回返概率 P 的解析表达式如下：

$$P = \sum_{m=1}^{\infty} u_m/(1 + \sum_{m=1}^{\infty} u_m) \tag{8}$$

计算回返概率的确定性方法就是，用下式：

$$P_m = \sum_{m=1}^{M} u_m/(1 + \sum_{m=1}^{M} u_m) \tag{9}$$

作为 P 的近似估计，其中 M 是一个足够大的数。

按照随机徘徊问题的基本假设，与上述计算回返概率的确定性方法(9)相对应的，蒙特卡罗方法计算回返概率的详细步骤如下：

(1)为计算作准备

令 $n=1, R=0$.

(2)开始第 n 个质点的随机徘徊

令 $m=1, l_i=0, i=1,2,\cdots,5$

(3)确定质点的新位置

令 $i=[S\xi]$，其中[*]表示取大于数 * 的最小整数

$$l_i = \begin{cases} l_i - 1 & \text{当}\{S\xi\} \leqslant 1/2, \\ l_i + 1 & \text{当}\{S\xi\} > 1/2. \end{cases}$$

(4)第 n 个质点的随机徘徊是否结束

当 $n<M$ 时，或

$$\sum_{i=1}^{S} |l_i| \neq 0 \tag{11}$$

时，第 n 个质点的随机徘徊尚未结束，令 $m=m+1$，转至步骤(3)；否则，第 n 个质点的随机徘徊结束，记录贡献：

$$R = R + \eta(\sum_{i=1}^{S} |l_i| = 0) \tag{12}$$

进入下一步骤。

(5) N 个质点的随机徘徊是否已完成

当 $n<N$ 时，N 个质点的随机徘徊尚未完成，令 $n=n+1$，转至步骤(2)；否则，N 个质点的随机徘徊已完成，进入下一步骤。

(6)给出计算结果

$$P_M \approx \hat{P}_M = \frac{S}{N} \tag{13}$$

比较解决随机徘徊问题的上述两种不同方法，以 $S=3$ 和 $M=2000$ 为例，在平均每秒可完成 250 万次四则运算的 CYBER170/825 机上计算，确定性方法的情况是，需要计算机 CPU 时间 260.81 分钟(其中所有阶乘计算都采用了节省机时的办法：事先算好 $N!$ 存放在数组元素 $F(N)$ 中，需要 $N!$ 时，直接调用 $F(N)$)，$P \approx 0.3341$；蒙特卡罗方法的情况是，抽样总数 $N=100000$，需要计算机 CPU 时间 74.43 分钟，$P \approx 0.3345$，误差为 0.002924(置信率为 0.95)。

进一步比较两种方法的计算量与 M 的关系。由于式(6)中的取和数与 M^2同阶,因此,确定性方法(9)式的计算量与 M^3成正比。至于蒙特卡罗方法的计算量与 M 的关系,则很明显,是与 M 成正比。于是,为了使上述回返概率的计算结果更精确些,比如进一步取 $M=20000$,即比原来的 M 大一个数量级,由确定性方法需要计算机 CPU 时间约 260810 分钟≈半年,而蒙特卡罗方法仅需要 744.3 分钟≈12.4 小时。显然,后者要比前者更实际一些。尤其是三维以上的随机徘徊问题,情况将更是如此。

3 随机误差干扰问题

因素 x 之值可由试验者控制,对 x 的响应之指标值为 y,由于有随机误差的干扰,y 对 x 的依赖关系实际上是

$$y = h(x,\varepsilon) \tag{14}$$

其中 ε 为随机误差。对于确定的 $y=y^*$ 和任意的 ε,用 $x(\varepsilon)$表示如下方程

$$y^* = h(x,\varepsilon) \tag{15}$$

中关于 x 的解。所谓随机误差干扰问题是,找到这样的 $x=x^*$,使得随机变量 $x(\varepsilon)$取 x^* 的可能性最大。

解决上述随机误差干扰问题存在两大困难。第一个困难是,$h(x,\varepsilon)$的形式是未知的;第二个困难是,问题中存在随机误差 ε 的干扰。

1951 年,Robbins 和 Monro 第一次研究了满足如下条件的随机误差干扰问题[9]:随机误差 ε 只影响 y,即 $h(x,\varepsilon)$具有如下形式:

$$h(x,\varepsilon) = h(x) + \varepsilon \tag{16}$$

$h(x)$为 x 的递增函数,增加速度不快于线性;ε 服从均值为零的对称分布。所给出的算法是,对于 x^* 的初始近似 x_1,用下式确定出 x_M:

$$x_{m+1} = x_m + b_m(y_m - y^*),\ m = 1,2,\cdots,M-1 \tag{17}$$

其中 y_m为当 $x=x_m$时,y 的响应值;$b_m>0$,并满足条件

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \infty, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} b_m^2 < \infty \tag{18}$$

当 M 足够大时,用 x_M作为 x^* 的近似。

用蒙特卡罗方法能否解随机误差干扰问题呢?为了使这件事是可行的,假设存在与随机误差 ε 无关的两个常数 A 和 B,对于任意的 ε,方程(15)式在(A,B)上有唯一的根;所要计算的 x^* 为随机变量 $x(\varepsilon)$关于 ε 的数学期望:

$$x^* = E(x(\varepsilon) \mid \varepsilon) \tag{19}$$

由于只要 $x(\varepsilon)$服从正态分布,条件(19)式就一定满足,因此,总的来说,上述条件不仅比 Robbins-Monro 模型的限制条件弱,而且,基本上包括了实际中所可能遇到的大多数问题。

用 x 表示在(A,B)上服从均匀分布的随机变量,根据对 $h(x,\varepsilon)$的假设,不难确定,对于任意的 ε 有

$$x(\varepsilon) = A + (B-A)E(\eta(g(x,\varepsilon) \geqslant 0 \mid x) \tag{20}$$

其中:
$$g(x,\varepsilon) = (y^* - h(A,\varepsilon))(y^* - h(x,\varepsilon)) \tag{21}$$

将式(20)代入到式(19)中,可以进一步得到:

$$x^* = A + (B - A)E(\eta(g(x,\varepsilon) \geqslant 0 \mid x,\varepsilon) \tag{22}$$

根据此式,便有解随机误差干扰题的蒙特卡罗方法如下:于(A,B)上随机确定 N 个试验点 $x_1,x_2,\cdots,x_N$,满足均匀分布条件,用

$$\hat{X}^* = A + (B - A) \times \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\eta((y^* - y_A)(y^* - y_n) \geqslant 0 \tag{22}$$

作为 x^* 的近似估计,其中 y_A为当 $x = A$ 时,y 的响应值 .

比较解随机误差干扰问题的上述 Pobbins-Monro 方法和蒙特卡罗方法,前者曾被荣为随机逼近方面的开创性工作,后者却是一种普通的蒙特卡罗技巧,而且,前者要求满足的条件较苛刻,后者要求满足的条件较一般。这一对比情况同样表明,对于许多其他方法所难以解决的随机性问题,蒙特卡罗方法可以比较方便地解决。

4 不公平博弈问题

总共有 M 个人参加博弈,他们的编号分别为 $1,2,\cdots,M$. 博弈所用的工具是,点数为 $0,1,2,\cdots,M$ 的牌各 M 张。博弈的方法是,首先将零牌分给每人各一张,剩下的牌机会均等地分发给每人各 M 张,然后按照如下规则进行抽牌(抽出后放回):由编号为 1 的人率先在自己的牌中抽出一张,若为零牌,即为获胜者;若为其他牌,此牌的点数即为下一个在自己牌中的抽牌者的编号,依此类推,直至抽出零牌为止,谁首先抽出零牌谁就是获胜者 . 依照上述博弈办法,很明显,编号为 1 的人比其他人有更多的机会获胜,其他人获胜的机会则是均等的。所谓不公平博弈问题是问,编号为 1 的人获胜的机会比其他人多多少?

用 $n_{i,j}$表示在某向中编号为 i 的人得点数为 j 的牌的张数,则不难确定,如下线代数方程组的解 x_1:

$$(M+1)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11}, n_{12}, \cdots, n_{1M} \\ n_{21}, n_{22}, \cdots, n_{2M} \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ n_{M1}, n_{M2}, \cdots, n_{MM} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

恰为编号为 1 的人在这局博弈获胜的概率 . 用 $P(n_{ij})$和 $q(n_{ij})$依次表示分牌结果为 $n_{ij}, i,j = 1,2,\cdots,M$ 的概率和编号为 1 的人获胜的概率。于是,很明显,编号为 1 的人获胜的平均概率为

$$Q = \sum_{n_{ij}} q(n_{ij})p(n_{ij}) \tag{24}$$

由于除编号为 1 的人以外的其他 $M - 1$ 个人,获胜的机会是相同的,即获胜的平均概率均为 $(1 - Q)/(M - 1)$,因此,编号为 1 的人获胜的机会比其他人多:

$$C = Q - \frac{1 - Q}{M - 1} = \frac{M\hat{Q} - 1}{M - 1} \tag{25}$$

由以上所述,很明显,解不公平博弈问题的主要内容是,解具有随机系数的线代数方程组(23)式和确定其解 $x_1 = q(n_{ij})$的数学期望式(24). 由此可见,用确定性方法解不公平博弈问题是非常困难的 .

用蒙特卡罗方法解不公平博弈问题,情况将如何呢? 按照不公平博弈问题中的博弈规则,若在 $K_k, k = 1,2,\cdots,M^2$中以任意的顺序存放自然数 $1,2,\cdots,M$ 各 M 个,则有解不公平

博弈问题的蒙特卡罗方法如下：

(1)为计算作准备

令 $n=1; x_1=0$。

(2)开始第 n 盘的博弈

令 $i=0$。

(3)进行分牌

令 $i=i+1$。在牌 $K_i, K_{i+1}, \cdots, K_{M^2}$是机会均等地抽出一张 K_j 分给编号为 l 的人：

$$j=[(M^2-i+1)\xi], l=[\frac{i-1}{M}] \tag{26}$$

将牌 K_i 与牌 K_j 进行对调，以保证没有发出的牌为 $K_{i+1}, K_{i+2}, \cdots, K_{M^2}$.

(4)分牌是否结束

当 $i<M^2$时，分牌尚未结束，转至步骤式(3)；否则，分牌结束。

(5)由编号为 1 的人率先抽牌

令 $i=1$

(6)确定下一抽牌者或结束此盘博弈

令

$$j=[(M+1)\xi']-1 \tag{27}$$

当 $j\neq 0$ 时，下一抽牌者为 $i=K_{M(i-1)+j}$，重复步骤(6)；当 $j=0$ 时，此盘博弈结束。

(7)记录贡献

$$x_1=x_1+\eta(i=1) \tag{28}$$

(8)N 次博弈是否已全部完成

当 $n<N$ 时，N 次博弈尚未全部完成，令 $n=n+1$，转至步骤(2)；否则，N 次博弈已全部完成。

(9)给出计算结果

$$Q\approx\hat{Q}=\frac{x_1}{N}, \quad C\approx\frac{M\hat{Q}-1}{M-1} \tag{29}$$

取 $M=2,4,8,16$；$N=50000$，按上述解不公平博弈问题的蒙特卡罗方法，在 Cyber170/825 机上进行了计算，计算结果、误差和所需要的计算机 CPU 时间，列入在表 1 中．从所需计算机时间看，计算上述全部 4 种情况，

表 1　　解不公平博弈问题的计算结果

结果类别 / M	Q	Q 的误差	C	所需时间(分)
2	0.7140	0.003961	0.4280	0.1615
4	0.4126	0.004315	0.2168	0.5638
8	0.2241	0.003655	0.1133	2.0833
16	0.1166	0.002813	0.0577	7.9833

仅需 11 分钟不到。从计算结果及其误差看,比如有精确结果的 $M=2$ 情况,精确结果为 $Q=0.7111$,蒙特卡罗方法的结果为 $\hat{Q}=0.7140$,符合得相当好。至于其他 3 种情况,蒙特卡罗方法计算结果的误差也都达到了千分之几的水平,应该认为是相当满意的了。结论是,对于不公平博弈问题,蒙特卡罗方法不仅很好地克服了其他确定性方法所遇到的困难,而且,还是一种非常好的方法。

5 结束语

随着科学技术的迅速发展,所提出来的随机性问题变得越来越复杂,从而使得蒙特卡罗方法作为一种特殊的数值方法,必将发挥其更大的作用,解决越来越多的确定性方法所难以解决的问题。

参考文献

〔1〕 裴鹿成,张孝泽.蒙特卡罗方法及其在粒子输运问题中的应用.北京:科学出版社,1980

〔2〕 徐钟济.蒙特卡罗方法.上海:上海科学技术出版社,1985

〔3〕 裴鹿成.蒙特卡罗法.中国大百科全书,数学卷,471,1988

〔4〕 裴鹿成等.计算机随机模拟.长沙:湖南科学技术出版社,1989

〔5〕 裴鹿成.蒙特卡罗方法发展的回顾与展望.蒙特卡罗方法及其应用(一).郑州:河南科学技术出版社,1993

〔6〕 G.B.格涅坚科.丁寿田译.概率论教程.,北京:人民教育出版社,1956

〔7〕 G.Polya,Math.Ann.,84,149,1921.

〔8〕 W.H.McCrea and F.J.W.Whippli
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,60,281,1940

〔9〕 H.Robbins and S.Monro
Ann.Math.Statist.,22,1,1951

彼得堡悖论与小概率大贡献问题

裴鹿成
（中国原子能科学研究院）

摘要　彼得堡悖论的产生始于如何使彼得堡赌博公平问题，其所以能成为悖论，是由于它利用了彼得堡赌博中的这样一个要害问题：赌客获胜概率越小的事件其所赢得的卢布越多，即本文所讲的“小概率大贡献”问题。本文的目的是想通过对彼得堡赌博问题的分析与计算看蒙特卡罗方法在解小概率大贡献问题时的困惑，介绍一种新的集团抽样方法，通过计算证实这种方法对解决小概率大贡献问题是非常有前途的。

1　彼得堡赌博问题

赌客与赌主二人进行赌博。赌博的规则是，投掷一个金属币直至出现国徽时为止，如果在第一次掷出国徽，则赌主给赌客一个卢布；如果在第二次掷出国徽，则赌主给赌客两个卢布；如果在第三次掷出国徽，则赌主给赌客4个卢布，等等。所谓彼得堡赌博问题走向，在每局赌博开始以前，赌客应交付给赌主多少赌金，赌博才算是公平的?

彼得堡赌博问题是于18世纪提出来的，在科学发展史中不仅非常著名，而且，对概率论的产生与发展有过重要影响。

所谓赌博是公平的，很明显，对于彼得堡赌博而言，比较合适的定义应该是，每局赌博开始前赌客交付给赌主的赌金应等于，在多局赌博中赌客所赢卢布的平均值。按照这种定义方法，有蒙特卡罗方法解彼得堡赌博问题的一般步骤如下：

(1)开始进行赌博

令 $r=1$

(2)投掷金属币

产生随机数 ξ，当 $\xi<1/2$ 时，未出现国徽，转至步骤(3)；否则，出现国徽，此局赌博终止，赌主支付给赌客 r 个卢布。

(3)下次出现国徽时应支付的卢布

令 $r=2r$

(4)进入下一次投掷

转至步骤(2)

用 N 表示按上述过程进行模拟的总次数；r_n 表示其中对第 n 局赌博进行模拟时赌主支付给赌客的卢布，当 N 足够大时，用

$$\hat{R}_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} r_n \tag{1}$$

作为使每局赌博公平赌客应交付给赌主的赌金的近似估计。

2　彼得堡悖论

按照彼得堡赌博的规则，很明显，在一局赌博中，赌主支付给赌客卢布的理论平均值应为

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty \tag{2}$$

因此,为了使赌博是公平的,在每局赌博前赌客必须交付给赌主无限多的卢布作为赌金。显然,这一结果是极其荒诞的,任何大脑正常的人都不会作为赌客去参加这种赌博。彼得堡悖论就是,现实中应该存在的公平赌博,但从理论方面分析却无法实现。

为了解决上述彼得堡悖论中所提出来的问题,许多著名学者,如 D. Bernoulli、D'Alambert、Buffon 和 Conderset 等人,都曾先后研究过。直至 19 世纪,乃至 20 世纪,仍然有一些数学家回过头来研究这一问题。

比较值得注意的是 Poisson(1781 ~ 1840)所发表的见解。他提出来的解法的大意是,赌主支付给赌客的卢布到不超过赌主的赌本为度,超过时将支付其全部赌本。可是,由于 Poisson 的这种办法改变了彼得堡赌博中的原规则,因此,实际上并没有真正解决彼得堡悖论中所提出来的问题。

引入公平赌博的新定义如下:用 R_n 表示在 n 局赌博中赌主支付给赌客的卢布;e_n 表示在 n 局赌博中赌客交付给赌主的赌金;$P(*)$表示其中事件 * 发生的概率,如果对于任意的 $\varepsilon > 0$,满足:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{R_n}{e_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0 \tag{3}$$

则说这种赌博是公平的。根据这一新的定义,Feller 曾给出了关于 e_n 的结果如下:

$$e_n = \frac{n\ln n}{2\ln 2} \tag{4}$$

e_n 的实际意义是什么呢? 我们对彼得堡赌博作如下限定:每局赌博赌主支付给赌客的卢布不得超过 n。于是,当 $n = 2^{i^*}$ 时,每局赌博客交付给赌主卢布的理论平均值为

$$\sum_{i=1}^{i^*} 2^{i-1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{i^*} \frac{1}{2} = \frac{i^*}{2} = \frac{n\ln n}{2\ln 2} \tag{5}$$

n 局赌博中赌客交付给赌主的卢布总共为

$$n \cdot \frac{\ln n}{2\ln 2} = e_n \tag{6}$$

同 Feller 的结果(4)式完全一样。这一结果表明,如果在 n 局赌博前赌客按 e_n 交付给赌主赌金,至少对于 $n = 2^{i^*}$ 的情况,对赌主总是极其不利的,除非赌主拒绝支付每局赌博中超过 n 卢布的那部分。

3 解彼得堡赌博问题的蒙特卡罗方法

根据 Feller 的结果(4)式,某赌客去参加一次 100 局的赌博,需要交付给赌主的赌金应该为 $e_{100} = 50 \cdot \ln 100/\ln 2 \approx 332.2$ 卢布。在此情况下,赌博是否是公平的? 为了能够比较肯定地回答这一问题,很显然,最好的办法是让赌客去实践(蒙特卡罗方法计算)。每次 100 局共实践了 30 万次,结果是从赌主手中共赢得了 76509 万卢布,同交付给赌主的赌金 9966 万(30 万 × 332.2)卢布相比,超过了所交赌金的 6.677 倍,因此,按照 Feller 原则参加赌博,难说是公平的。