面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

大学数学

多元微积分及其应用

萧树铁　主编
章纪民　萧树铁　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材。书中除包括传统的多元微积分学的内容外，还将复变函数、常微分方程和微分几何的基本理论有机地融入全书，使大学数学基础课的内容体系有了较大更新。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材，也可供各类专业人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学：多元微积分及其应用/萧树铁主编．—北京：高等教育出版社，2000（2001重印）

ISBN 7-04-008582-8

Ⅰ.大…　Ⅱ.萧…　Ⅲ.①高等数学②微积分
Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第06690号

多元微积分及其应用
萧树铁　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　本	787×960　1/16	版　次	2000年5月第1版
印　张	23.25	印　次	2001年6月第2次印刷
字　数	425 000	定　价	19.70元

序　言

长期以来,我国高等学校各类非数学专业的数学基础课都限于以微积分为主要内容的“高等数学”.面临21世纪各门知识的相互渗透和自身加速更新的形势以及全面提高人才素质的需要,数学的作用将显得日益重要.而作为高等学校数学基础课的作用,除了作为各门学科的重要工具以外,它在提高人才全面素质中起着重要作用的培育理性思维和审美功能方面也应得到充分的重视.这就需要一部与之相适应的教材.

这套“大学数学”教材是在前国家教委“面向21世纪教学内容和课程体系改革”研究课题的支持下完成的.共有五本:《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》与《数学实验》.我们认为它们是21世纪高级人才应该普遍具备的数学基础.希望学生通过对它们的学习,能使他们在掌握数学工具、提高理性思维和审美素质以及获取新知识的能力诸方面打下一个良好的基础.这种要求应该对任何专业都一样,只是在深度上及侧重的方面可能会有些区别.

在现行的《高等数学》中,微积分和数学分析之间的关系一直是一个难以处理的问题.19世纪以前的微积分,以它的直观性和不断扩展的应用显示了数学的威力,但同时也暴露出其缺乏严格逻辑基础的缺点.诞生于19世纪的数学分析则以其逻辑的完美显示了数学的理性精神.这两个方面在教材中如果结合得好,可以激发初学者对数学的兴趣;但如果结合得不好,则很可能失去两者的活力而形成一堆枯燥的形式推理和繁琐的计算.在本书中我们力图按其本来的面目来编写,把一元微积分分为两部分:前一部分注重直观,着重训练应用和运算,后一部分则着重培育理性思维.

《多元微积分及其应用》的应用内容包括复变函数、微分几何及常微分方程.

《代数与几何》的代数部分基本上是线性代数,其内容也可分为两部分:一部分是以算法为主的求解一般线性方程组的内容;另一部分则主要研究线性空间及其上的线性映射.由于后者是前者的理论框架,而且它已成为近代数学普遍使用的基本语言,因此本书在集合、关系、运算、代数结构之后,较快地进入后者的讨论;并且通过数值表示把两者结合起来.

至于几何,尽管它在古希腊及19世纪有其辉煌的历史,在本世纪后半叶也进入了数学研究的主流行列,但近50年来,在我国高校的数学基础课中,却一直被压

缩到只剩下一点空间解析几何.这对培养学生的形象思维及理性思维的习惯极为不利.本书除了在多元微积分应用中加上古典微分几何基础(曲线和曲面)以外,在几何部分则增加了“仿射及射影几何”及非欧几何的两个初等模型.

本世纪后半叶以来,人们对事物认识演化的表现之一是从单纯的确定性思维模式进入确定—随机性模式.这一趋势还在发展,在高校数学教学中已受到广泛的关注.我们提出把《随机数学》正式列入基础课.本书内容的重点是通过几个典型范例的讨论,使学者学会描述与表达随机性及随机变化的过程,即集中于对随机模式认识的训练.

在这套系列教材中《数学实验》有其独特性.它的知识内容包含数值方法、统计计算和优化计算的基本概念和初等方法,其目的是为学生自己动手解决问题提供必要的数学知识和软件平台.这是一门以学生独立动手,教师起辅导作用的课程,这类课程的教材如何编写,本书只是一种尝试.

以上是这套教材的一个简要介绍.这套教材既是一个统一的整体,各部分之间又有相对的独立性,可以独立讲授.在内容方面,它包含了现行的高等数学、线性代数、复变函数、微分方程、微分几何、数值分析、概率统计、优化计算等课程最基本的内容,而总学时则大为减少.我们在清华大学几个班的试验表明:全部讲完上述内容所需的学时大约为340左右.除数学实验外,如果再减掉一些内容,280学时左右也是可以的,可由教师灵活掌握.

这套教材在有些大段落后面,附有一段“评注”,主要讲述这一段的重要思想和可能的发展,为有兴趣的学生进一步学习数学开一点小小的窗口.

大凡一本可用的教材,往往有两种写法:尽量多写一点,以便于教师选择;或尽量写少一点,以便于教师发挥.这套教材似乎偏于前者.原因是这是一个尝试,对习惯讲授传统“高等数学”的教师来说,对这套教材可能不太适应,也许需要多一些说明.

这套教材原有的基础是清华大学出版社1995年出版,萧树铁、居余马、葛严林等主编的三卷本《高等数学》.参与现在这套教材编写的有朱学贤、郑建华、章纪民、居余马、李海中、钱敏平、叶俊、姜启源、高立、何青等人.谭泽光、白峰杉、韩云瑞等同志为本书的编写作了大量的工作.高教出版社对本书的编写和出版始终给予热情的支持.

前面已说过,这套教材的编写是一个尝试.目的在于根据“百家争鸣”的精神,参与探索大学数学基础课在培养下一世纪高素质人才中所应起的作用,以及与之相适应的教材建设.我们衷心欢迎各方人士对这套教材评头论足,指出缺点和错误.如果这套教材能起到抛砖引玉的作用,我们就很满足了.

萧树铁

1999年6月

前　　言

本书是《大学数学》——微积分的第二部分.

数学教育是大学教育的重要内容之一.近年来,随着科学的发展,大学数学基础课内容新陈代谢的迫切要求与教学课时不断减少的矛盾日益突出.本书的目的之一是希望在不增加学时的前提下适当增加适应当代科学发展所必需的数学基础内容.

与传统的"多元微积分"相比,本书增加了复变函数、常微分方程、微分几何三个方面最基本的内容.如果说,推17、18世纪微积分发展的主要是刚体力学和曲线理论需求的话,18、19世纪推动微积分进一步发展的就是连续介质力学和电磁场以及曲面论的需求,其中的数学概念和数学方法也经历了从简单到复杂又到简单的历史过程.初期的简单,虽然缺乏数学的严格性,但其想法最为可贵;而复杂阶段往往是追求数学严格性的结果.经过这两个阶段后的现代表述往往是高度抽象的产物,它们显得简洁而漂亮,然而常令初学者看不清其本来的面目.本书所增加的三部分内容原来是三门独立的课,其内容多半处于上述的第二阶段,要用少量的篇幅把它们最基本的内容纳入本书,看来只能采取"返璞归真"的办法,回到物理和几何的考虑.当然这种做法的难度很大,希望不至于给读者造成困难.

在传统的"多元微积分"部分,我们强调了以下几点:一是在多元函数之外,也强调了多元向量值函数,这是几何所必需的;二是强调了局部线性化的思想,例如微分(而不是偏导数)的"以平代曲"和把雅可比矩阵看成是局部线性仿射变换的系数矩阵等;三是从物理的角度来讨论"场论"及其某些性质(例如奥—高公式,格林公式和斯托克斯公式).此外还删掉了一些繁琐的证明,例如隐函数存在定理,格林公式,斯托克斯公式等,尽量用物理和几何的说明来代替,以节省篇幅和课时.

本书大致分为五个部分.

第一部分是第三篇第1章多元函数及其微分学.在简单介绍欧几里得空间的拓扑——开集,闭集,连通性等以后,将复数当作复平面上的向量引进其运算以及介绍复数的模,幅角等几何量.由欧几里得空间距离的定义得到多元函数和向量值函数的极限与连续的概念,这些概念与一元函数是一致的.全微

分作为一个重点被引进.我们之所以这么做,是因为与一元函数导数对应的是多元函数的全微分而非偏导数,而全微分的重要性经常被学生所忽视.映射的微分是这一章的另一个重要内容,由此推导出雅可比矩阵.通过雅可比矩阵的非奇异性我们给出隐函数(隐映射)存在定理及其微分法.由多元函数的泰勒公式可以研究多元函数的极值和条件极值.多元函数微分学的一个几何应用:曲面的切平面与法线,曲线的切线与法平面.最后从复变函数本身及二元实函数两个方面介绍了复变函数的微分及导数,以及联系这两方面的柯西—黎曼条件.

第二部分是第三篇第2章含参变量积分.这部分篇幅较少,主要是含参变量积分和广义含参变量积分的一些极限交换的性质.

第三部分是多元函数的积分,包括第三篇第3章和第4章.这里介绍了二重和三重积分的概念、性质,以及它们的计算,极坐标、柱坐标、球坐标系下的变量代换法.第一、二类曲线、曲面积分是这部分的另一重要内容,在讨论第二类曲线积分时我们介绍了复积分.通过曲线,曲面积分的联系引出了场论.解析函数的幂级数展开是第三部分一个相对独立的内容,这里我们介绍了复级数,泰勒级数和罗朗级数,留数定理及辐角原理,实函数泰勒级数的收敛域问题在这里得到了解释.

第四部分是第四篇第1章常微分方程.内容有线性常微分方程及方程组解的结构,线性常系数微分方程及方程组的求解方法(包括拉普拉斯变换).这一部分的最后是微分方程定性理论初步,这里讨论了平面系统的平衡点分类及解的渐近性质.

最后第五部分是微分几何,包括第四篇第2章和第3章,在第2章中我们主要研究确定空间曲线的特征量——曲率、挠率;弗雷耐标架和弗雷耐公式是这一章的另一重要内容.空间曲面的基本知识放在第3章中,这里首先研究了两类特殊的空间曲面——直纹面和可展曲面,然后讨论了曲面的第一基本形式和第二基本形式.

使用本教材大约需要80学时.如果课时较少,可以适当减少第四部分和第五部分的内容.

本书是在萧树铁和居余马同志所编的高等数学第三卷——“多元微积分与微分几何初步”的基础上改编的.改编工作一直受到清华大学数学科学系的支持,白峰杉,韩云瑞和谭泽光同志多次参加了教材的讨论会;在改编过程中,居余马,林翠琴和华苏等同志对教材提出了非常有益的意见和建议,高等教育出版社的胡乃冋同志对本书的最后出版作了认真的编辑工作,对此我们深表

感谢.

教材改革并非是一朝一日就能完成的工作,本教材虽然经过清华大学不同的班级近三年的教学实践,但还会存在错误和缺陷,恳请大家不吝赐教.

编者于清华园

2000 年 3 月

目 录

第三篇 多元微积分及复变函数初步

第四篇 常微分方程与微分几何

第三篇　多元微积分及复变函数初步

第 1 章　多元函数及其微分学

1.1　n 维欧氏空间

一元函数是实数到实数的映射.它是描写两个变量相互依赖的简单模型.把它加以扩充,就可以研究 n 个排好次序的实数(n 维向量)到实数的映射(称之为多元函数),以及 n 维向量到 m 维向量的映射(称之为向量函数).其实在代数中,我们已经从不同的角度讨论过简单的向量函数 —— 向量空间上的线性变换(映射).

在本章,我们先讨论多元函数及其极限、连续和微分.所谓 n 元函数 f,是指 $\mathbf{R}^n$ 的子集 Ω 到实数集 $\mathbf{R}$ 的一个映射,即:

$$f:\Omega(\Omega \subset \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$
$$(x_1,\cdots,x_n) \mapsto f(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbf{R}, \forall (x_1,\cdots,x_n) \in \Omega$$

其中 $\mathbf{R}^n = \{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1,\cdots,n\}$ 称为 n 维(实)欧氏空间.$n = 1$ 时为实数轴,$n = 2$ 时为平面,$n = 3$ 时为三维空间.$\mathbf{R}^n$ 中的点又称为向量.

1.1.1　n 维欧几里得空间

在讨论 n 元函数时,由于要对自变量进行代数和极限运算,因此需要弄清定义域 $\mathbf{R}^n$(及其子集)的代数结构及距离(拓扑结构)的概念.

我们已经知道,对于代数运算加法和数乘,$\mathbf{R}^n$ 是一个实数域上的线性空间.

设 $X = (x_1,\cdots,x_n)$,$Y = (y_1,\cdots,y_n)$ 为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的任意两个向量,它们的内积可以如下定义:

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

由此可以定义两点 X, Y 的“距离”$\|X - Y\|_n$:

$$\|X-Y\|_n=(X-Y,X-Y)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

容易证明 $\mathbf{R}^n$ 中的上述距离具有以下性质:

(i) 正定性:$\|X-Y\|_n\geqslant 0$,只有当 $X=Y$ 时,$\|X-Y\|_n=0$;

(ii) 对称性: $\|X-Y\|_n=\|Y-X\|_n$;

(iii) 三角不等式:$\|X-Y\|_n\leqslant\|X-Z\|_n+\|Z-Y\|_n$.

在不引起混淆的情况下,我们省略 X 与 Y 的距离$\|X-Y\|_n$ 中的下标“n”.

注 任何内积空间都可定义距离,但并非所有的距离都是由内积定义的.

1.1.2 n 维欧几里得空间的基本拓扑概念

$\mathbf{R}^n$ 中的子集

$$B(X_0,r)=\{X\in\mathbf{R}^n\mid\|X-X_0\|<r\}$$
$$\bar{B}(X_0,r)=\{X\in\mathbf{R}^n\mid\|X-X_0\|\leqslant r\}$$

分别称为以 X_0 为中心,r 为半径的开球和闭球.开球 $B(X_0,r)$ 也叫作点 X_0 的“有心”r- 邻域.

以下我们把 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 简记作E.

定义 1.1 集合 $S\subset E$ 叫作开集,如果 $\forall X\in S,\exists r>0$,使得 $B(X,r)\subset S$.

开集有以下的简单性质:

(i) 任意多个开集之并集仍为开集,因为 $S_i(i\in I,I$ 是指标集)是开集,而

$$S=\bigcup_{i\in I}S_i$$

则 $\forall X\in S,\exists i\in I$,使得 $X\in S_i$,所以 $\exists r>0$,使得 $B(X,r)\subset S_i\subset S$.

(ii) 有限个开集之交集也是开集.

但要注意,无穷多个开集之交集不一定是开集.例如:设 $X_0\in E,0<r_i<1$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty}r_i=0$, $S_i=B(X_0,r_i),i=1,2,\cdots$,则 S_i 显然都是开集,但 $S_i(i=1,2,\cdots)$ 的交集仅含一点 X_0,所以不是开集.

定义 1.2 设 $S\subset E,X\in E$,

(i) 若 $\exists r>0$,使得 $B(X,r)\subset S$,则称 X 为S 的内点,S 的全体内点构成的子集叫做 S 的内部,记作 $\mathring{S}$.

(ii) 若 $\exists r>0$,使得 $B(X,r)\subset E-S$,则称 X 为S 的外点,S 的外点的全体构成的子集叫做 S 的外部.

(iii) 若 $\forall r>0$ 都有 $B(X,r)\cap S\neq\varnothing,B(X,r)\cap(E-S)\neq\varnothing$,则

称 X 为 S 的边界点,S 的全部边界点组成的子集叫做 S 的边界,记作 ∂S.

例1 $\mathbf{R}^1$ 中闭区间 $[a,b]$ 的内部为 (a,b),边界点为 a 和 b;$\mathbf{R}^1$ 的子集 $S=\left\{\frac{1}{n},n=1,2,\cdots,10\right\}$ 是10个弧立点,其内部 $\mathring{S}=\varnothing$,且 $\partial S=S$.

例2 实数轴上所有有理数组成的集合的边界点是全体实数.

显然,S 的边界既非 S 的内部,也非 S 的外部;S 的边界点可能属于 S,也可能不属于 S.容易证明:对任一点集 S,其内部 $\mathring{S}$ 是含于 S 的最大开集;S 是开集,当且仅当 $S=\mathring{S}$;S 的内部是其余集 $E-S$ 的外部.

定义1.3 集合 $S\subset E$ 叫做闭集,如果 S 的余集 $E-S$ 是开集.

由闭集的定义及开集的性质,再利用集合运算的 De Morgan 律,即可推出:任意多个闭集的交集是闭集;有限个闭集的并集是闭集.但无穷多个闭集的并集可能是开集,例如:$\mathbf{R}^1$ 中的闭集 $\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$ $(n=1,2,\cdots)$ 的并集是开集 $(0,1)$.

例3 $\mathbf{R}^1$ 中的 n 个弧立点 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 组成的子集是闭集,因为其余集是开集.

下面介绍集合聚点的概念,并以此给出集合是闭集的充要条件.

定义1.4 设 $S\subset E,X\in E$,如果 $\forall r>0,B(X,r)\cap S\neq\varnothing$,则称 X 是 S 的一个聚点(或称极限点).

显然,点集 S 中的任一点都是 S 的聚点;集合 S 的边界点既是 S 的聚点,也是 $E-S$ 的聚点.因此 S 的聚点可能属于 S,也可能不属于 S.

定理1.1 集合 S 是闭集的充要条件是 S 包含它所有的聚点.

证 充分性.要证明如果 S 包含其所有聚点,则余集 $E-S$ 是开集.$\forall X\in E-S$,由假设 X 不是 S 的聚点,则 $\exists r>0$,使得 $B(X,r)\cap S=\varnothing$,即 $B(X,r)\subset E-S$,故 $E-S$ 是开集,S 是闭集.

必要性.如果不然,假设 S 有一个聚点 $X\in E-S$,则 $\forall r>0$ 均有 $B(X,r)\cap S\neq\varnothing$,即 $B(X,r)\not\subset E-S$,因而 $E-S$ 不是开集,与题设矛盾.

定义1.5 集合 S 的全体聚点组成的集合叫做 S 的闭包,记作 $\bar{S}$.

由定理1.1立即可得:如果 S 是闭集,则 $S=\bar{S}$.

S 的每一点及其边界点都是 S 的聚点,除此以外的点都不是 S 的聚点(因为 $\exists r>0$,使得 $B(X,r)\cap S=\varnothing$).因此 S 的聚点的集合就是 $S\cup\partial S$,即

$$\bar{S}=S\cup\partial S$$

1.1.3 点列 $\mathbf{R}^n$ 的完备性

$\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{X_k\}:X_1,X_2,\cdots,X_k,\cdots$ 是映射 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{R}^n$ 的象按正整数

的序排成的一列点(向量)，其中 $X_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})\in\mathbf{R}^n,k=1,2,\cdots$. 同样可以定义点列 $\{X_k\}$ 的子序列.

定义 1.6　$\mathbf{R}^n$ 的点列 $\{X_k\}$ 收敛于点 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}X_k=A$，指的是：

$$“\forall\varepsilon>0,\exists N_0\in\mathbf{N}^*,\text{使 }\forall k>N_0,\text{恒有}\|X_k-A\|<\varepsilon.”$$

$\mathbf{R}^1$ 中的距离 $\|x-y\|_1=|x-y|$，因此从“距离”上而言，$\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^1$ 中点列的收敛定义是完全一致的.

容易证明：$\lim\limits_{k\to\infty}X_k=A\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=a_i,i=1,2,\cdots,n$，即点列 $\{X_k\}$ 收敛到向量 A 等价于 $\{X_k\}$ 的 n 个分量构成的 n 个实数列 $\{x_i^{(k)}\}(i=1,2,\cdots,n)$ 分别收敛到 A 的 n 个分量.

定义 1.7　$\mathbf{R}^n$ 的子集合 G 是有界的，如果存在常数 C，$\forall X\in G$，$\|X\|\leqslant C$.

我们可以同样定义 $\mathbf{R}^n$ 中的柯西序列：

定义 1.8　$\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{X_k\}$ 叫做柯西序列，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_0\in\mathbf{N}^*$，使 $\forall m,k>N_0$，恒有 $\|X_m-X_k\|<\varepsilon$.

同样，点列 $\{X_k\}$ 是柯西序列当且仅当其 n 个分量构成的 n 个实数序列 $\{x_i^{(k)}\}(i=1,2,\cdots,n)$ 都是柯西序列，因此由实数集 $\mathbf{R}^1$ 的完备性(即每个柯西实数列都收敛于实数)即可得 $\mathbf{R}^n$ 的完备性，也就是 $\mathbf{R}^n$ 中的每个柯西序列都收敛于 $\mathbf{R}^n$ 中的点.

1.1.4　点集的连通性　区域

这里，我们只讨论 $\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3$ 中点集的连通性问题.

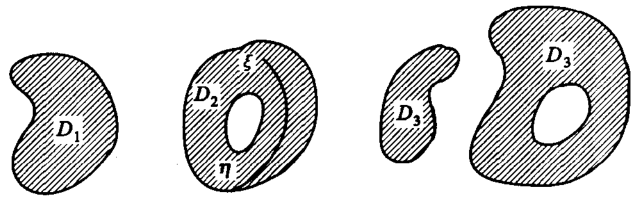

图 1 - 1

定义 1.9　点集 $D\subset\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^3$) 叫做连通的，如果 $\forall\xi,\eta\in D$，有一条完全属于 D 的折线段将点 ξ 和 η 连接起来，否则 D 叫做非连通集.

如图 1 - 1 所示 $\mathbf{R}^2$ 中的点集 D_1,D_2 是连通集，D_3 则是非连通集.

定义 1.10 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中非空的连通开集也叫做开区域,开区域的闭包称为闭区域,开区域和闭区域通称区域,简称域(注意不要和代数域相混).

例如:

$$D = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\} \text{ 是 } \mathbf{R}^2 \text{ 中的一个开域}$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\} \text{ 是 } \mathbf{R}^3 \text{ 中的一个闭域}$$

定义1.11 连通域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 叫做单连通域,如果 D 中任一条闭曲线 L 所包围的点都属于 D,否则 D 叫做复连通域.

例如:$\mathbf{R}^2$ 中去掉原点的域 $D = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ 是复连通的,因为 D 中存在包围原点的闭线.

再如:$D_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 是单连通的闭域;$D_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ 是复连通的开域.

定义1.12 连通域 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 叫做单连通域或线单连通域,如果对于 Ω 中任一条闭曲线 C,都在 Ω 中存在一个以 C 为边界的曲面 S,否则 Ω 叫做复连通域.

例如:$\mathbf{R}^3$ 中的开球 $\Omega_1 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ 是一个单连通域;去心开球

$$\Omega_2 = \{(x,y,z) \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

仍是一个单连通域(图 1 - 2);但是在开球 Ω_1 中去掉 z 轴上所有点而成的点集

$$\Omega_3 = \{(x,y,z) \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1, x^2 + y^2 \neq 0\}$$

虽然是连通开域,却不是单连通的,而是复连通的,事实上,对于 Ω_3 中任一条绕过 z 轴的闭曲线 C,以 C 为边界的曲面 S 必与 z 轴相交(图 1 - 3),所以 Ω_3 不是单连通的.

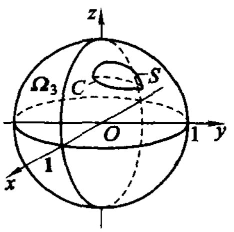

图 1 - 2

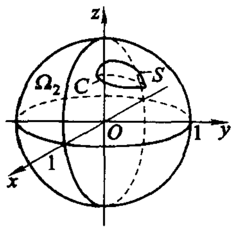

图 1 - 3

1.1.5 复数 复数的运算

形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 的数称为复数，其中 x 和 y 是任意的实数，i 满足 $\mathrm{i}^2 = -1$. 实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记作

$$x = \mathrm{Re}\, z, \qquad y = \mathrm{Im}\, z$$

全体复数构成的集合称为复数集，记作 **C**. 两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相等，指的是它们的实部和虚部分别相等：

$$x_1 + \mathrm{i}y_1 = x_2 + \mathrm{i}y_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 可以定义加，减，乘，除四则运算

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, (z_2 \neq 0)$$

可以证明，复数集 **C** 关于上述加法和乘法运算构成一个域，我们称之为复数域.

当复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的虚部 $y = 0$ 时，$z = x + \mathrm{i}0 = x$ 为实数，因此实数集 **R** 是复数集 **C** 的子集：$\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. 方程 $z^2 + 1 = 0$ 在实数集内无解，而在复数集内有解 $z = \pm \mathrm{i}$.

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与有序数对 (x, y) 一一对应，因此复数也可以用平面上的点 (x, y) 来表示，这样的平面称之为复平面；在此平面上，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴.

任一复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 在复平面上可以表示为一点(或向量) (x, y)，因此可以定义复数的模和辐角. z 的模为

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$z(z \neq 0)$ 的辐角就是向量 (x, y) 和 x 轴的夹角，记为

$$\theta = \mathrm{Arg}\, z$$

任一非零复数 z 都有无穷多个辐角，其中只有一个辐角在 $(-\pi, \pi]$ 范围内，这个辐角称之为 z 的主辐角，或 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主值，记作 $\arg z$，

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1-1}$$

当 $z = 0$ 时，$|z| = 0$，z 的辐角无定义，当 $z \neq 0$ 时，$\arg z$ 与正切 $\arctan \dfrac{y}{x}$ 有如下关系：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第一象限时} \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{当 } z \text{ 在第二象限时} \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{当 } z \text{ 在第三象限时} \\ \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第四象限时} \end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arctan \dfrac{y}{x} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

任一复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的共轭复数定义为

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$$

共轭复数有如下性质：

(i) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(ii) $\bar{\bar{z}} = z$;

(iii) $z\bar{z} = [\mathrm{Re}z]^2 + [\mathrm{Im}z]^2 = |z|^2$;

(iv) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}z$, $z - \bar{z} = 2\mathrm{iIm}z$.

复数除了复平面上的坐标及实部、虚部两种表达方式外，还有三角表示法及指数表示法. $\forall z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C}, z \neq 0$, z 的辐角为 θ, 模为 r, 利用关系（图 1 - 4）:

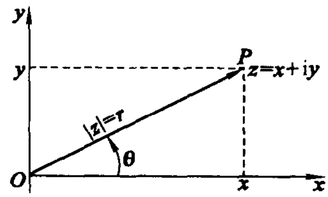

图 1 - 4

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

可以把 z 表示成下面的形式

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

这就是复数的三角表示法. 通过 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, 我们又可以得到

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

这就是复数的指数表示法.

例　求 $-3 + \mathrm{i}4$ 的模与辐角.

解　　$|-3+\mathrm{i}4|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$$\operatorname{Arg}(-1+\mathrm{i}4)=\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi+2k\pi=(2k+1)\pi-\arctan\frac{4}{3}$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

复数有以下简单性质：

(i) 设 z_1,z_2 为两个任意复数，则有

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$$

这由下式看出：

$$\begin{aligned}|z_1z_2|&=\sqrt{(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}}=\sqrt{(z_1\bar z_1)(z_2\bar z_2)}\\&=|z_1||z_2|\end{aligned}$$

(ii) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$（三角不等式）.

由于

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\bar z_1+\bar z_2)\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\bar z_2+z_2\bar z_1)\end{aligned}$$

利用 $z_1\bar z_2+z_2\bar z_1=2\mathrm{Re}(z_1\bar z_2)$，所以

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar z_2)\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\bar z_2|\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||\bar z_2|\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

(iii) z_1,z_2 是两个非零复数，则有

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2$$

（上面关于辐角的两个等式，两边各是无穷多个数（辐角）的集合，等式在集合的意义下成立.）

设 z_1,z_2 辐角的主值与模分别为 $\theta_1,\theta_2,r_1,r_2$，

$$z_j=r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j},\qquad j=1,2$$

则　$\operatorname{Arg}z_1=\theta_1+2k\pi,\quad \operatorname{Arg}z_2=\theta_2+2m\pi,\quad k,m=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}(r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)})=\theta_1+\theta_2+2n\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\begin{aligned}&\{\theta_1+\theta_2+2k\pi+2m\pi\mid k,m=0,\pm1,\pm2,\cdots\}\\&=\{\theta_1+\theta_2+2n\pi\mid n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}\end{aligned}$$

因此从集合相等的意义上，第一个等式成立，同理可证另一等式.

例　　$1+\mathrm{i}=\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$