高等数学简明教程

（第一册）

李　忠　周建莹　编著

北京大学出版社

高等数学简明教程

（第一册）

李 忠 周建莹 编著

北京大学出版社

·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学简明教程　第一册/李忠，周建莹编著．—北京：北京大学出版社，1998.8

ISBN 7-301-03765-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．①李…②周…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 08581 号

书　　名：高等数学简明教程(第一册)

著作责任者：李　忠　周建莹　编著

责 任 编 辑：刘　勇

标 准 书 号：ISBN 7-301-03765-1/O・418

出　版　者：北京大学出版社

地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

电　　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032

排　印　者：北京大学印刷厂

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

850×1168　32 开本　10.75 印张　260 千字

1998 年 8 月第一版　1998 年 8 月第一次印刷

印　　　数：0001—4,000 册

定　　　价：13.50 元

内 容 简 介

这套教程是物理类各专业大学生的高等数学教材，共分三册，供三个学期使用。第一册的内容是一元函数的微积分及空间解析几何；第二册的内容是多元函数的微积分及常微分方程；第三册的内容是级数，含参变量积分，傅里叶级数与傅里叶积分，概率论与数理统计。

本书为第一册，共分四章。内容包括：微积分的基本概念，微积分基本定理与积分的计算，微分中值定理与泰勒公式，向量代数与空间解析几何。

本书的作者们曾在北京市教委及北京大学正式立项，进行高等数学课程内容体系改革的试点工作。本书就是在试点基础上编写而成的。它打破了原来先讲微分学后讲积分学的传统讲授次序，重新架构了教学内容体系，力求使读者尽快掌握微积分的核心思想与基本计算；同时避免了由于积分概念出现过晚而造成的与其他专业基础课在配合上的脱节现象。在极限理论及其相关问题上，本书的处理也有特色，既保证了理论的严谨，又避免了过分形式化的弊端，使读者感到朴素自然。该书强调数学理论的实际背景及其在其他学科中的作用；在内容的讲授及习题、例题的配置上尽可能展示了数学的应用价值。本书叙述简洁，深入浅出，便于自学。

本书可作为综合性大学、高等师范院校物理类及其相关专业本科生的高等数学课的教材，也可供数学教师、科技工作者及数学爱好者阅读，对非物理类专业的师生，也可有选择的使用本书作为高等数学教材。

序言

1996年秋至1998年春，我们在为北京大学物理系，无线电电子学系及技术物理系讲授高等数学课期间，在课程内容体系上作了一些改革的尝试．现在出版的这套《高等数学简明教程》就是在当时试用讲义的基础上修改补充而成的．

全书共分三册，供综合性大学及师范院校物理类各专业作为三学期教材使用．第一册是关于一元函数微积分及空间解析几何；第二册是关于多元函数微积分与常微分方程；第三册是关于级数，参变量积分，傅氏级数与傅氏积分，概率论与数理统计．

现在我们就这套教材的内容处理作以下几点说明：

（一）与传统的教材相比，这套教材在讲授内容的次序上作了较大调整

目前国内多数高等数学教材是先讲微分学，后讲积分学．这样作的好处是数学理论体系清晰．其缺点则是积分概念出来过晚，使初学者对微分概念与积分概念有割裂之感．另外，由于积分概念出现过晚而使数学课在与其他课程，如力学与普通物理等课配合上出现了脱节现象．

在本教材中，我们把微积分的基本概念及微分计算放在第一章，而把微积分基本定理及积分的计算放在第二章，在此之后才讲微分中值定理与泰勒公式．这样调整的主要目的是为了让初学者尽可能早地了解与把握微积分的基本思想，掌握它的最核心、最有用、最生动的部分．在我们试验过程中，学生们在第一学期期中考试前已经学完了微商，微分，不定积分，定积分的概念及全部运算（含定积分的近似计算），对微积分初步形成了一个比较完整的认

识. 同时,也部分地缓解了与其他课在配合上的矛盾. 我们认为这种调整是必要的和行之有效的.

微积分就其原始的核心思想与形式是朴素的、自然的,容易被人理解与接受的. 随着历史的发展,逻辑基础的加固和各种研究的深化,它变成了一个庞然大物. 现在,在这个庞然大物面前,如何选取其中要紧的东西以及用怎样的方式将它们在较短的时间内展示给学生,不能不说是一个问题,值得我们思考与探索.

(二) 关于极限概念的处理

关于极限概念的处理历来是关于微积分改革中争论的焦点之一. 朴素的极限概念人们接受起来没有多大困难. 现在的问题是要不要"ε-δ"的说法. 无论在国内还是在国外,主张不要"ε-δ"的大有人在. 他们认为,"ε-δ"把微积分"引入了歧途". 现在,在国内主要倾向不是主张取消"ε-δ"的说法,而是在"ε-δ"上花的功夫太多,在极限概念的处理上有过分形式化的倾向,使得在微积分的讲述上在一开头就形成了"大块头"的极限论,容易让初学者望而生畏,摸不清头脑.

我们认为,无论如何,在微积分的发展历史上,"ε-δ"的说法毕竟是一种科学的进步,它澄清了许多混乱. 作为极限的一种严谨语言,它在处理一些复杂极限过程时是必不可少的. 物理类各专业的学生,不仅要学习微积分,而且还要学习其他更高深的数学,不掌握"ε-δ"语言似乎也是不行的.

但是,我们不赞成在一开头就花很大力气于"ε-δ",而是希望学生随着课程的深入,在反复使用中逐渐熟悉它,掌握它. 我们在现在的教材中没有出现大量的用"ε-δ"求证具体函数极限的练习,更没有十分困难的极限问题,因为做过多的这类练习意义不大,而学生们在解这样的题中所遇到的困难往往又与极限的概念无关. 我们希望极限的概念在教材中既是严谨的,又保留其朴素、直观、自然的品格. 在使用"ε-δ"说法时,我们除像通常一样用绝对值不

等式来描述变量的变化范围之外，同时还平行采用了邻域描述的方法. 后者不仅易于推广到高维空间，而且比较直观；在某些定理的证明中，用邻域去替代不等式，在形式上更为简洁.

与极限概念密切联系在一起的是关于实数域连续性的几个定理与闭区间上连续函数性质的几个定理. 我们采用了分散处理的办法. 在全书的一开头就把区间套原理作为公理加以叙述. 然后以此为依据证明单调有界序列有极限的定理. 闭区间上连续函数的性质在第一章中只叙述而不加证明，待到微积分基本定理与积分计算讲完之后，在讲授微分中值定理之前，再次讨论实数域的完备性，证明布尔查诺-外尔斯特拉斯定理，并在此基础上证明闭区间上连续函数的介值定理与取最大值及最小值定理. 在第三册讨论级数之前第三次涉及实数域的完备性，介绍柯西收敛原理，以满足级数讨论的需要. 这种分散处理的办法，不仅分散了难点，而且使初学者更容易看清这些基础性定理在所涉及问题中的意义.

在一般高等数学教材中，闭区间上连续函数性质的定理是不予证明的. 在我们的教材中给出了证明，但所占篇幅不大，学生学习也不困难. 如果时间不够，在课堂上略去这些证明自然也是可以的.

像许多教材那样，我们没有介绍闭区间上连续函数的一致连续性及实数集合的上下确界的概念.

（三）本书保留了传统教材中的基本内容与基本训练，但拓宽了内容范围

在内容的取舍上，我们采取了相当慎重的态度. 现在，有些人对高等数学课的内容现代化呼声很高. 但是，作为一门数学基础课似乎不宜简单地以现代化作为其改革的主要目标. 数学学科中概念的连贯性使得它不可能像电子器件一样去“更新换代”和“以新弃旧”. 而且现在看来掌握好微积分的基本概念、基本理论与基本训练，对于一个理工科大学生而言依然是必不可少的. 当然，计算

机的广泛使用以及数学软件功能的日益提高，正促使我们思考在高等数学课中简化或减少某些计算的内容. 然而就目前的情况，我们尚难于下定决心取消某些内容. 为了慎重从事，这次改革试验中，我们保留了传统教材中的基本内容与基本训练，只是删去了某些过分繁琐的例题与习题.

我们认为传统教材的主要问题之一是内容有些狭窄. 作为理科数学基础课不能只讲微积分. 在现在我们编写的这份教材中，我们增加了微分几何中的曲线论与曲面论的基本内容，以及数值计算中的某些内容. 这些都分散于有关章节. 作为大块内容增加的是第三册中的概率论与数理统计这两章.

我们认为所增加的内容必须在数学上是相当基本的、重要的，或在应用上是相当广泛的. 之所以增加讲授概率论与数理统计，是因为这些内容对于物理类各专业学生说来，无论对他们现在的学习，还是对他们今后的工作而言，都是十分重要的. 过去许多的学生对于在三个学期的高等数学课中，没有涉及随机变量及其基本知识，认为是一件憾事. 实际上在十分一般的意义上讲，一个大学生的数学素养，除了微积分之外，我们认为当首推概率与统计.

经过一年半的教学实践证实，加上这些内容并没有使我们感到学时紧张，或者学生负担过重. 学生对于学习概率与统计有较高的热情，并且一般说来掌握良好. 事实上，他们在物理课中早就用到了许多有关概率论的知识. 数学课上的讲解只是使他们的理解系统化、严格化罢了.

应当指出，不同的年级、不同专业的情况各有不同. 因此，在一些内容的取舍上应该由主讲教师决定. 教材大约只相当于一台戏的“脚本”. 作为“导演与主演”的主讲教员完全可以在此基础上做出自己的选择和增删.

在本书编写中，我们尽可能注意了文字的简洁、例子的典型性以及对基本概念背景及意义的解释，以便于读者自学. 除每节的练

习题之外，每一章之后又附加了总练习题，以使读者有机会做一些综合练习.

国际著名数学家柯朗曾经尖锐地批评过数学教育.他指出："二千年来，掌握一定的数学知识已被视为每个受教育者必须具备的智力.数学在教育中的这种特殊地位，今天正在出现严重危机.不幸的是，数学教育工作者对此应负其责.数学的教学逐渐流于无意义的单纯演算习题的训练.固然这可以发展形式演算能力，但却无助于对数学的真正理解，无助于提高独立思考能力.……忽视应用，忽视数学与其他领域之间的联系，这种状况丝毫不能说明形式化方针是正确的；相反，在重视智力训练的人们中必然激起强烈的反感".[1]

柯朗的话是对的.在数学教育中这种过分形式化，追求单纯习题演算训练，忽视应用似乎是一种一般倾向.内容繁琐而又狭窄可能也是一种一般倾向.

记得美国加州大学贝克利分校项武义教授80年代在我国倡导微积分改革时讲过"返朴归真，以简驭繁".我们十分赞赏他的这些提法.照我们的理解，他的话同样是针对上述倾向而发的.

数学教育需要改革，而且任重道远.

最后，我们应该提到，这次改革试点工作先后在北京大学及北京市教委正式立项并得到了财政上的支持，借此机会我们向北京市教委及北京大学教务处与教材科的有关同志表示衷心感谢.北京大学数学科学学院院长姜伯驹教授一直十分关心这项工作，并给予多方面的鼓励与帮助.此外，彭立中教授，黄少云教授与刘西垣教授也很关心这项工作，并对试用讲义提出了许多宝贵意见.北京大学出版社邱淑清编审及刘勇同志大力支持教材的出版.刘勇

---

[1] 见《什么是数学》第一版序，柯朗与罗宾斯著，汪浩、朱煜民译，湖南教育出版社，1985.

同志作为本书的责任编辑为本书的出版做了大量工作，付出了辛勤的劳动. 我们在这里一道对这些同志表示感谢！

毫无疑问，这份教材会有许多不成熟之处，甚至有不少错误. 我们诚恳地希望数学界同仁加以批评指正，以便改正.

李　忠　周建莹

1998 年 2 月 15 日于

北京大学中关园

目　　录

绪论 ………………………………………………………………（1）

第一章　微积分的基本概念 ……………………………………（13）

§1　实数 ……………………………………………………………（13）

习题 1.1 …………………………………………………………（18）

§2　变量与函数 ……………………………………………………（18）

习题 1.2 …………………………………………………………（25）

§3　函数的连续性 …………………………………………………（27）

习题 1.3 …………………………………………………………（37）

§4　序列极限 ………………………………………………………（38）

习题 1.4 …………………………………………………………（50）

§5　函数极限 ………………………………………………………（52）

习题 1.5 …………………………………………………………（63）

§6　微商的概念 ……………………………………………………（65）

习题 1.6 …………………………………………………………（74）

§7　复合函数的微商与反函数的微商 ……………………………（76）

习题 1.7 …………………………………………………………（84）

§8　微分的概念 ……………………………………………………（86）

习题 1.8 …………………………………………………………（94）

§9　高阶导数与高阶微分 …………………………………………（96）

习题 1.9 …………………………………………………………（98）

§10　定积分 ………………………………………………………（98）

习题 1.10 ………………………………………………………（105）

第一章总练习题 …………………………………………………（106）

第二章　微积分基本定理与积分的计算 ………………………（110）

§1　微积分基本定理 ………………………………………………（110）

习题 2.1 …………………………………………………………（115）

§2　不定积分 …………………………………………………… (116)
习题 2.2 ………………………………………………………… (119)
§3　不定积分的换元法 ………………………………………… (119)
习题 2.3 ………………………………………………………… (125)
§4　分部积分法 ………………………………………………… (126)
习题 2.4 ………………………………………………………… (130)
§5　有理式的不定积分与有理化方法 ………………………… (131)
习题 2.5 ………………………………………………………… (140)
§6　定积分的分部积分与换元法则 …………………………… (141)
习题 2.6 ………………………………………………………… (149)
§7　定积分的若干应用 ………………………………………… (150)
习题 2.7 ………………………………………………………… (162)
§8　定积分的近似计算 ………………………………………… (165)
习题 2.8 ………………………………………………………… (172)
第二章总练习题 ………………………………………………… (172)
第三章　微分中值定理与泰勒公式 ……………………… (179)
*§1　再论实数与连续函数 …………………………………… (179)
习题 3.1 ………………………………………………………… (186)
*§2　微分中值定理 …………………………………………… (186)
习题 3.2 ………………………………………………………… (192)
§3　柯西中值定理与洛必达法则 ……………………………… (193)
习题 3.3 ………………………………………………………… (200)
§4　泰勒公式 …………………………………………………… (201)
§5　关于泰勒公式的余项 ……………………………………… (211)
习题 3.4 ………………………………………………………… (216)
§6　极值问题 …………………………………………………… (217)
习题 3.5 ………………………………………………………… (224)
§7　函数的凸凹性与函数作图 ………………………………… (226)
习题 3.6 ………………………………………………………… (232)
§8　微分学与几何——曲率 …………………………………… (232)
习题 3.7 ………………………………………………………… (236)
§9　牛顿近似求根法 …………………………………………… (237)

习题 3.8 …… (243)
§10　函数值的近似计算——插值 …… (243)
*习题 3.9 …… (250)
第三章总练习题 …… (251)
第四章　向量代数与空间解析几何 …… (256)
§1　向量代数 …… (256)
习题 4.1 …… (262)
§2　空间坐标 …… (263)
习题 4.2 …… (270)
§3　空间中平面与直线的方程 …… (271)
习题 4.3 …… (280)
§4　二次曲面 …… (282)
习题 4.4 …… (292)
§5　空间曲线的一般概念 …… (292)
§6　空间曲线的曲率与挠率 …… (297)
习题 4.5 …… (305)
第四章总练习题 …… (306)
习题答案 …… (309)

绪　论

在课程内容之前，我们先来谈谈什么是数学以及数学跟科学技术的关系. 希望读者从中增进对数学的了解，看到学习数学的意义. 同时，我们还就怎样学好高等数学向初学者提供若干建议.

1. 数学的基本特征

一百多年之前，恩格斯就说过，**数学是研究现实世界中数量关系及空间形式的科学**. 尽管在这一百多年中数学的发展使它的研究内容早已超出了"数"与"形"的范畴，但是就其基本精神而言，恩格斯对数学的概括依然是正确的.

数学的基本特征是它的研究对象的高度抽象性.

数本身就是抽象的. 数字"1"是人们从 1 个苹果、1 只羊、1 个人……等现象中舍去了苹果、羊、人……的具体特征，单从数量上抽象出来的. 除了人们容易理解的自然数外，数学中还有负数，无理数，复数等等. 它们的抽象程度则较自然数要高. 要想对一个没有中学数学知识的人解释清何为负数未必容易，更不用说$\sqrt{-1}$了.

初等几何中的点、直线、三角形及圆……等等也是抽象的. 它们是根据人们生活经验抽象而来，因此是容易被理解的. 然而，数学中还要研究一般 n 维空间乃至无穷维空间，甚至更为抽象的流形或拓扑空间. 这些特别抽象的概念不再是从人的生活经验与生产活动中直接得来，而是从人类的科学研究(包括数学研究)、科学试验以及复杂的技术过程中抽象而来，它们既超出了普通人的直接经验，也超出了自然现象的范畴. 数学研究对象的这种高度抽象

性使得数学科学区别于自然科学——后者的研究对象是自然现象.

数学研究对象的抽象性决定了数学的另一特征：它在论证方法上的演绎性.

人们说："数学是一门演绎科学". 这是从它的论证方法而言的. 具有中等数学训练的人都知道数学的推理过程：

$$\textbf{假设} \xrightarrow[\text{logic}]{} \textbf{结论}.$$

这里的 logic 是指形式逻辑. 这就是说，在数学中要论证一个结论的成立，是根据假设(包括公理)按照形式逻辑推演出来的. 除此之外，不允许任何其他东西作为导出结论的依据.

在实验科学中实验结果是结论的重要依据. 但在数学中则不能以任何实验结果作为结论的依据. 在生理学中解剖几只麻雀之后即可断言"麻雀有胃". 然而，在数学中则不能由测量若干个三角形内角而断言"三角形内角之和为 180 度"——数学中的这一结论是由平行公理推演得来的.

我们应重申，说数学是一门演绎科学是指其论证方法而言，而不是指其整个研究方法. 在数学研究中，尤其在探索阶段，实验、归纳、类比，猜测或假想同样是一些重要方法. 然而，最终论证一个结论的成立则需要演绎. 在数学中没有经过证明的命题最多只能是一种猜想.

数学在论证方法上的演绎性使数学理论构成了一个形式体系，其中有公理，定义，定理，一环扣一环，演绎出许多公式与结论. 这里的公理是指那些不须证明的基本假定，而定义则用来规范和界定各种术语的内涵. 定理是关于一个数学命题的叙述，通常由两部分组成：条件与结论. 在数学书籍或文章中，通常还有所谓"引理"或"命题"之类. 它们与定理在性质上相同，只是作者认为讨论过程中它们的重要性不及定理而已.

人类历史上第一个完整的演绎体系是欧几里得的《几何原

本》，它对人类文明影响了几千年，直至今天. 欧几里得在书中不是简单地罗列了前人的几何知识，而是由五条公理（他称之为公设）出发，用形式逻辑将其全部结论逐一推出. 爱因斯坦高度评价了这个“逻辑体系的奇迹”. 他说：“推理的这种令人惊叹的胜利，使人类的理智为今后的成就获得了所需要的信心”.

数学的第三个特征就是应用的极端广泛性. 这同样是由它的研究对象的抽象性所决定的；简单地说，正是因为数学抽象，所以其结论的应用范围才广. 比如，数字是由苹果、羊、人……等许多事物抽象而来. 因此，2＋3＝5 则不仅适用于苹果，而且还适用于羊、人，……等等，也适用于一切可能谈论数量的事物.

在数学中，同一方程式完全可能代表着互不相干的事物的某种相同规律. 同一个拉普拉斯方程可能代表许多不同的物理现象. 某种生物种类群体的数量变化可能与市场某种商品的价格涨落满足同一数学模型. 所有这些就是数学抽象力量的所在.

数学应用的广泛性的一个重要标志是数学在其他科学中的特殊地位与作用. 伽利略说：“自然界这部伟大的书是用数学语言写成的. ”事实上，数学是各门科学的语言. 物理定律及原理都是用数学语言描述的. 数学在力学与物理学中的地位与作用是人所共知的，无须多言. 数学在化学中的应用已不是过去说的只有线性方程组，而数学在生物学中的应用也早已不是零. 分子生物学中 DNA 的复杂的立体结构跟数学中拓扑学里的深奥的纽结理论有关. 过去人们认为数学在社会科学中作用不大. 这种看法也已过时了. 管理科学、质量控制、产品设计、金融投资分析、保险业、市场预测等等正在广泛地应用着数学. 数学在经济学理论的发展中扮演着重要角色. 在近些年来经济学诺贝尔奖获得者中，有半数以上的人有从事数学研究的历史背景. 数学在众多学科中的这种特殊地位与作用是任何其他学科所不能比的. 难怪有人说“数学是人类知识的入口处（gateway）之一”.

有些人片面夸大了数学体系的形式性，认为数学是“丝毫不反映现实世界的纯形式体系”，从而也就从根本上否认了数学的应用价值. 某些数学家也持此种看法. 一位国外著名的数学家曾宣称：“我的任何一项发明都没有，或者说都不可能为这个世界的安逸带来哪怕是微小的变化……，他们（指数学家）所做的工作和我同样无用”. 具有讽刺意味的是：这位数学家的言论很快被自己的成果推翻. 他的一篇纯数学研究论文中的定理被应用于生物遗传学上，并以他的名字命名这项遗传学上的定律.

还有一些人认为数学的形式系统是数学家们“自由创作”的结果，“就像小说家设计人物、对话和情节一样”，没有任何必然性.

这些看法之所以错误，是因为它不符合于数学被广泛应用的现实，不符合于科学发展历史，更不能解释数学内部的高度和谐与统一，不能解释数学与物理及其他科学的一致性. 数学内部的统一性以及它跟其他科学的一致性是宇宙统一性的反映.

这里我们想简单提一下数学与物理的关系. 谁都知道，数学为物理提供了描述现象与规律的语言与工具，反过来物理现象也为数学概念的建立提供了原型. 实际上数学中有不少概念首先是由物理学家提出，然后由数学家逐步严谨化. 这种现象屡见不鲜. 还常常有这种情况，数学家与物理学家在各自的领域内进行研究，彼此并不知道他们的研究有任何关联，用着不同的术语与方法，过了若干年之后，他们惊异地发现，他们的研究竟是相通的或者干脆说是同一个东西的不同侧面. 杨振宁与米尔斯所研究的规范场论和陈省身教授所研究的纤维丛理论之间的紧密关系就是一个有趣的例子.

还应当指出，科学的探索是人类对未知世界的一种顽强追求，这种追求有时超越了直接的功利目的. 在某些研究上它似乎和艺术一样是对永恒与完美的追求，对于人类这种追求的意义也不应有任何忽视.