数学百科全书

第一卷

A—C

科学出版社

數學百科全書

蘇步青題

蘇步青

(京)新登字 092 号

内容简介

本书由三类条目组成．首先是介绍数学的各个主要方向的综述性条目(采用了一种很好的分科办法)，对这类条目的基本要求是尽可能通俗全面地阐明有关领域发展的现状；这些条目一般可供大学数学系学生和数学邻近领域的研究生阅读，根据专业需要，还可供在工作中用到数学方法的其他科学领域的专家、工程师和数学教师阅读．其次，是一些中等篇幅的条目，专门介绍某些具体的数学问题和方法，这类条目内容较深，是为水平较高的读者而写的．最后，还有一类简短的条目，可供查阅定义时参考．本书附有主题索引，其中不仅包括所有条目的标题，还包括在前两类条目中给出定义的许多概念，以及在条目中提到的一些最重要的结果．多数条目附有参考文献．这部大型数学工具书的功能是很齐全的，读者范围是十分广泛的．

责任编辑 张鸿林 杜小杨 夏墨英 郑春平
特邀编辑 方嘉琳 卢景波 朱学贤 沈永欢
郑洪深 罗嵩龄 葛显良 戴中器

数学百科全书
第一卷
《数学百科全书》编译委员会 编译
科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1994 年 1 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
1994 年 1 月第一次印刷 印张：59 插页：2
印数：0 001-4 600 字数：2 123 000

ISBN 7-03-003504-6/ O·631
定价：68.00 元

數學百科全書

蘇步青題

蘇步青

序

在人类的思想史上，数学有一个基本和独特的地位。几千年来，从巴比伦的代数、希腊的几何、中国、印度、阿拉伯的数学，直到近代数学的伟大发展，虽然历史有时中断，但对象和方法则是一致的。数学的对象不外“数”与“形”，虽然近代的观念，已与原始的意义，相差甚远。数学的主要方法，是逻辑的推理。因之建立了一个坚固的思想结构。这些结果会对其他学科有用，是可以预料的。但应用远超过了想象。数学固然成了基本教育的一部分。其他科学也需要数学作理想的模型，从而发现相应科学的基本规律。

在这样蓬勃的发展中，数学的任务是艰巨的：它既需充实已有的基础，还需应付外来的冲击。一部完整的数学百科全书，便有迫切的需要。但兹事体大，许多合格的数学家，都望而却步。

我们有幸有这一套苏联的《数学百科全书》。它对数学的贡献，将无法估计。我们要了解，数学是一种“活”的学问：它的内容，不断在变化，在进展。我们现在大学研究院数学活动的内容，大部分在五十年前是不存在的，其他一部分则是昔贤伟大思想的精华，将历久而弥新。我建议《百科全书》每两年出一附录，包括新项目和旧项目的重写。如有佳构，不必拘泥编辑的方针。《百科全书》每隔若干年宜有新版。

面对着这座巨大的建筑，令人惶惑。百科全书原不为有涯之身所能控制的。数学工作者的使命在对某些选定的项目，增加了解和探索。本书将便利他们思考范围的推广。

我相信数学将有一个黄金时代，其中将有多数的中国数学家参加。希望本书能起相当的作用。

陳省身

出 版 说 明

数学的重要性是尽人皆知的。一个人从进小学开始到大学毕业为止，不论哪个专业，学习数学的时间至少都有12年至14年之久。一些自然科学领域，如天文学、力学、物理学、化学等，以及各工程技术学科，历来都是以数学为基础的。随着电子计算机的迅速发展和普及，生命科学、地学、军事科学和管理科学等方面也愈来愈多地用到数学，使这些学科从定性研究向定量研究发展。

由于数学所用的方法是逻辑推导，它有严格的定义和特定的符号，它的研究对象是抽象的数量关系和空间形式，没有相当的训练和基础知识的人是难于入门的，所以数学又使人望而生畏。另一方面，数学发展很快，文献数量呈指数增加，浩如烟海。一个人很难了解数学的许多方面，这就加重了数学发展和应用的困难。

苏联大百科全书出版社从1977年到1986年，历时10年，出版了苏联科学院院士、世界著名数学家 ИМ 维诺格拉多夫（Виноградов）主编、几百位数学家共同撰写的一部《数学百科全书》（Математическая энциклопедия），约900万字。它的重要性是极为显著的。不久，荷兰的莱德尔出版公司出版了由180位西方数学家参加翻译的英文版（Encyclopaedia of mathematics）。英文版增补了大量最新成果、重要的西方文献和编者注，因而其内容更加充实和完善。

苏联《数学百科全书》出版后，我国很多著名数学家和数学教师纷纷要求将这部书译成中文出版，使我国广大科学工作者（特别是数学工作者）、工程技术人员、教师和学生有一部内容极其丰富的工具书，可以从中查阅所需要的数学知识及作进一步了解的线索。这无疑是一件十分重要的事情。

中国数学会常务理事会经过认真讨论，完全支持我国广大数学家和科技人员的要求，决定领导这部《数学百科全书》的编译工作，并将它列为

中国数学会最重要的工作之一；随后，立即成立了编译委员会，负责具体的组织工作。由于我国广大数学家的热情支持和参加，所以编译工作进展比较顺利。必须指出，科学出版社始终将这项工作作为该社的一项重点任务来抓，编辑人员为此付出了长期的艰苦劳动。

本书中文版分五卷，包括了俄文版的全部内容和英文版增补的内容。为尽快出版，条目按英文字母顺序排列。在第五卷中，附有详尽的中文和外文索引，此外还增加了600余篇数学家小传。

本书除中文简体字版本以外，还有繁体字版，繁体字版由台湾九章出版社出版发行。这也是海峡两岸数学家和出版界人士的一次良好合作。

老一辈数学家苏步青教授为本书题写书名，陈省身教授作序，苏步青、陈省身、吴文俊、程民德教授应邀担任编译委员会顾问。对于他们的支持，谨致以衷心的感谢！

最后，对于书中欠妥和错误之处，还望读者不吝指教。

《数学百科全书》编译委员会

本书的排版得到科学出版社技术室的大力协助，并由河北省雄县电脑服务部负责植字。谨此致谢！

A

A积分 [A-integral; A-интеграл]

Lebesgue积分的一种推广，旨在对Lebesgue可积函数的共轭函数进行积分，它是由E. Titchmarsh ([1])给出的. 可测函数$f(x)$称为在$[a, b]$上A可积的(A-integrable)，如果

$$m\{x: |f(x)|>n\} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

并且

$$I = \lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)]_n\,dx$$

存在，其中

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } |f(x)|\leqslant n, \\ 0, & \text{如果 } |f(x)|> n. \end{cases}$$

数I称为$f(x)$在$[a, b]$上的A积分(A-integral)，记作

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx.$$

参考文献

[1] Titchmarsh, E. G., On conjugate functions, *Proc. London Math. Soc.*, **29** (1928), 49–80.

[2] Виноградова, И. А., Скворцов, В. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ, 1970, М., 1971, 65–107.

И. А. Виноградова 撰 王斯雷 译

$\mathscr{A}$运算 [$\mathscr{A}$-operation; $\mathscr{A}$-операция]

由П. С. Александров ([1])提出的一类集合论运算(亦见[2], [3]). 设$\{E_{n_1\cdots n_k}\}$是以自然数的一切有限序列为下标的集合系统. 集合

$$P = \bigcup_{n_1,\ldots,n_k,\ldots}\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_1\cdots n_k}$$

称为$\mathscr{A}$运算应用于系统$\{E_{n_1\cdots n_k}\}$的结果，其中并运算是在自然数的所有无穷序列上进行的.

对实数轴上的区间系统使用$\mathscr{A}$运算所得到的集合(为纪念Александров而称为$\mathscr{A}$集)未必是Borel集(见$\mathscr{A}$**集**($\mathscr{A}$-set); **描述集合论**(descriptive set theory)). $\mathscr{A}$运算比可数并运算和可数交运算都强，并且是幂等的. (任意拓扑空间的子集的) **Baire性质**(Baire property)和Lebesgue可测的性质在$\mathscr{A}$运算下都是不变的.

参考文献

[1] Aleksandrov, P. S., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **162** (1916), 323–325.

[2] Александров, П. С., Теория функций действительного переменного и теори топологических пространств, М., 1978.

[3] Колмогоров, А. Н., 《Успехи матем. наук》, **21** (1968), 4, 275–278.

[4] Suslin, M. Ya. (Суслин, М. Я.), *C. R. Acad. Sci. Paris*, **164** (1917), 88–91.

[5] Лузин, Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958, 284.

[6] Kuratowski, K., Topology, Acad. Press, 1966–1968 (译自法文).

А. Г. Елькин 撰

【补注】 在西方通常把$\mathscr{A}$运算归功于М. Я. Суслин ([4])，所以它也称为Суслин运算(Suslin operation)，Суслин $\mathscr{A}$运算(Suslin $\mathscr{A}$-operation). $\mathscr{A}$集通常称为解析集.

张锦文、赵希顺 译

后验分布 [a posteriori distribution; апостериорное распределение]

一随机变量的条件概率分布，以与其无条件分布或先验分布(a priori distribution)对照考虑.

设Θ为具有先验密度$p(\theta)$的随机参数，X为随机观察结果，而$p(x\mid\theta)$为当$\Theta=\theta$时X的条件密度，

则根据 **Bayes 公式**(Bayes formula),当给定 $X=x$ 时,Θ 的后验分布具有密度

$$p(\theta|x)=\frac{p(\theta)p(x|\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p(\theta)p(x|\theta)d\theta}.$$

若 $T(x)$为具有密度 $p(x|\theta)$的分布族的一个**充分统计量**(sufficient statistic),则后验分布不直接依赖 x,而是通过 $T(x)$依赖 x. 若 x_j为来自密度 $p(x|\theta_0)$的独立观察值,则后验分布 $p(\theta|x_1,\cdots,x_n)$当 $n\to\infty$ 时的渐近性状,是与 Θ 的先验分布"几乎无关的".

关于后验分布在统计决策理论中的作用,见 **Bayes 方法**(Bayesian approach).

参考文献

[1] Бернштейн, С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.-Л., 1946.

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sverdrup, E., Laws and chance variations. 1, North-Holland, 1967, 214 ff.

陈希孺 译

后验概率 [**a posteriori probability**; **апостериорная вероятность**]

一事件在某些条件下发生的条件概率,以与其无条件概率或**先验概率**(a priori probability)相对照."条件"和"后验"两词并无意义上的差别. 当条件是假定的而非在试验过程中直接观察到的时候,用前一词;当需要强调问题中的条件是实际观察所得的时候,用后一词. 后验概率与先验概率通过 **Bayes 公式**(Bayes formula)发生联系.

Ю. В. Прохоров 撰 陈希孺 译

先验分布 [**a priori distribution**; **априорное распределение**]

一随机变量的概率分布,以与该变量在某些附加条件下的**条件分布**(conditional distribution)对照考虑. 通常,"先验分布"一词是按下述方式使用的. 设(Θ,X)为一对随机变量(随机向量,或更一般的随机元). 把随机变量 Θ 看作未知的,把 X 看作为估计 Θ 而进行的观察的结果. Θ 和 X 的联合分布,由 Θ 的分布(现称为先验分布)以及当给定 $\Theta=\theta$ 时 X 的条件概率族 P_θ 所决定. 可按 **Bayes 公式**(Bayes formula)来计算当给定 X 时 Θ 的条件分布(现称为 Θ 的后验分布). 在统计问题中,先验分布多属未知的(甚至假定其存在也未必有充分根据). 关于先验分布的使用,见 **Bayes 方法**(Bayesian approach).

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sverdrup, E., Laws and chance variations. 1, North-Holland, 1967, 214 ff.

陈希孺 译

先验概率 [**a priori probability**; **априорная вероятность**]

一事件的概率,以与同一事件在某些附加条件下的条件概率对照考虑. 后者则称为**后验概率**(a posteriori probability). 这一术语通常在与 **Bayes 公式**(Bayes formula)有关的内容中使用.

Ю. В. Прохоров 撰 陈培德 译

$\mathscr{A}$ 集 [**$\mathscr{A}$-set**; **$\mathscr{A}$-множество**], 解析集(analytic set), 完全可分度量空间中的

Borel 集的连续像. 因为任意 Borel 集都是无理数集的连续像,所以 $\mathscr{A}$ 集可定义为无理数集的连续像. $\mathscr{A}$ 集的可数并和可数交仍是 $\mathscr{A}$ 集. $\mathscr{A}$ 集是 Lebesgue 可测的. $\mathscr{A}$ 集的性质关于 Borel 可测映射和 $\mathscr{A}$ **运算**($\mathscr{A}$-operation)是不变的. 而且,一个集合为 $\mathscr{A}$ 集的充分必要条件是它可表示为 $\mathscr{A}$ 运算作用于闭集族的结果. 存在不是 Borel 集的 $\mathscr{A}$ 集. 例如,在实数的单位区间 I 上的所有闭子集组成的空间 2^I 中,所有不可数闭集组成的集合是 $\mathscr{A}$ 集,但不是 Borel 集. 任意不可数 $\mathscr{A}$ 集都拓扑地包含 Cantor 完全集. 从而,$\mathscr{A}$ 集"实现了"连续统假设: 它们的基数或者是有限的,或者是 $\aleph_0$ 或 $2^{\aleph_0}$. **Лузин 可分性原则**(Luzin separability principles)对于 $\mathscr{A}$ 集成立.

参考文献

[1] Kuratowski, K., Topology, 1, Acad. Press, 1966-1968 (译自法文).

[2] Лузин, Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 现在用 Σ_1^1 来表示解析集的类,而用 Π_1^1 表示补解析集的类(见 **$C\mathscr{A}$ 集**($C\mathscr{A}$-set)).

参考文献

[A1] Jech, T. J., The axiom of choice, North-Holland, 1973.

[A2] Moschovakis, Y. N., Descriptive set theory, North-Holland, 1980.

张锦文、赵希顺 译

A 系统 [**A-system**; **A-система**]

集合的"可数-分歧"系统,也就是集合 X 的一个子集族 $\{A_{n_1\cdots n_k}\}$,其指标是自然数的一切有限序列. 一个 A 系统 $\{A_{n_1\cdots n_k}\}$称为正则的(regular),如果 $A_{n_1\cdots n_kn_{k+1}}\subset A_{n_1\cdots n_k}$. A 系统的一个元素序列 $A_{n_1},\cdots,A_{n_1\cdots n_k},\cdots$,其指标为同一个自然数无穷序列的所有段,称为这个 A 系统的一个链(chain). 一个链的所有元素的交称为它的核(kernel),一个 A 系统的所有链的一切核之并称为这个

A系统的核，或称为 $\mathscr{A}$ 运算应用于这个 A 系统的结果，或称为由这个 A 系统生成的 $\mathscr{A}$ 集（$\mathscr{A}$-set）. 每个 A 系统都可以正则化而不改变核（只须令 $A'_{n_1\cdots n_k}=A_1\cap\cdots\cap A_{n_1\cdots n_k}$）. 如果 $\mathscr{M}$ 是一个集合系统，则由 $\mathscr{M}$ 的元素组成的 A 系统的核称为由 $\mathscr{M}$ 生成的 $\mathscr{A}$ 集（$\mathscr{A}$-set）. 由拓扑空间的闭集生成的 $\mathscr{A}$ 集称为这个空间的 $\mathscr{A}$ 集.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Kuratowski, K., Topology, 1. Acad. Press, 1966 (译自法文).

А. Г. Елькин 撰

【补注】 $\mathscr{A}$ 运算在描述集合论中是一个重要工具，它是由 М. Я. Суслин 引进的，因而也称为 Суслин 运算 (Suslin (Souslin) operation). 就此而论，一个 A 系统也称为 Суслин 概形 (Suslin (Souslin) scheme). 亦见 $\mathscr{A}$ 运算 ($\mathscr{A}$-operation)，$\mathscr{A}$ 集 ($\mathscr{A}$-set).

[2] 是关于经典结果的标准参考文献，而近代的处理方法可在 [A1] 中找到.

参考文献

[A1] Christensen, J. P. R., Topology and Borel structure, North-Holland, 1974.

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

算盘 [abacus; абак]

古希腊、古罗马以及 18 世纪以前的西欧使用的一种计算工具：分成一档一档的一块框板，计算时在档内拨动算珠（骨制品、小石子等）. 相当于在东亚国家广泛使用的中国算盘. 在俄国则有俄式算盘 (счеты).

БСЭ-3

【译注】 中国的算盘是由算筹演变而来的. 其形长方，周为木框，内贯直柱，称为档，一般为九档、十一档和十三档，档中横以梁，梁上每档两珠，每珠作数五，梁下每档五珠，每珠作数一. 元朝末年，算盘已在江浙一带开始使用，明朝已盛行，后来传入日本和其他东亚国家. 算盘目前仍在广泛使用，同电子计算器相比，在某些方面还具有其优越性.

张鸿林 译

Abel 准则 [Abel criterion; Абеля признак]

1) 数项级数的 Abel 准则. 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

收敛，数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是单调有界的，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

收敛.

2) 函数项级数的 Abel 准则. 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

在集合 X 上一致收敛，函数序列 $\{a_n(x)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 对每个 $x\in X$ 是单调的，且在 X 上一致有界，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

在集合 X 上一致收敛. 对于依赖于参数 $x\in X$ 的积分

$$\int_{a}^{\infty} a(n,x)b(n,x)\,dn$$

的一致收敛性，也存在类似的 Abel 准则.

Abel 准则可以加强，例如见 **Dedekind 准则** (Dedekind criterion). 亦见 **Dirichlet 准则** (Dirichlet criterion); **Abel 变换** (Abel transformation).

参考文献

[1] Fichtenholz, G. M., Differential und Integralrechnung, 1, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1964.

[2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973.

[3] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1952.

Л. П. Купцов 撰 张鸿林 译

Abel 微分方程 [Abel differential equation; Абеля дифференциальное уравление]

常微分方程

$$y' = f_0(x)+f_1(x)y+f_2(x)y^2+f_3(x)y^3$$

（第一类 Abel 微分方程）或

$$[g_0(x)+g_0(x)y]y' = f_0(x)+f_1(x)y+f_2(x)y^2+f_3(x)y^3$$

（第二类 Abel 微分方程）. 这些方程是 N. H. Abel 研究椭圆函数论时出现的（见 [1]）. 第一类 Abel 微分方程是 **Riccati 方程** (Riccati equation) 的自然推广.

如果 $f_1(x)\in C(a,b)$，$f_2(x)$ 和 $f_3(x)\in C^1(a,b)$，且当 $x\in[a,b]$ 时 $f_3(x)\neq 0$，则第一类 Abel 微分方程通过变量变换可以化为标准形式 $d\ /dt=z^3+\Phi(t)$ ([2]). 在一般情况下，第一类 Abel 微分方程不能以封闭形式进行积分，虽然在一些特殊情况下是可能的 ([2]). 如果 $g_0(x)$ 和 $g_1(x)\in C^1(a,b)$，而 $g_1(x)\neq 0$，$g_0(x)+g_1(x)y\neq 0$，则第二类 Abel 微分方程通过变换 $g_0(x)+g_1(x)y=1/z$，可以化为第一类 Abel 微分方程.

可以在复数域中详细研究第一类和第二类 Abel 微

分方程及其推广

$$y' = \sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^i, \quad y' \sum_{j=0}^{m} g_j(x) y^j = \sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^i$$

(例如，见[3]).

参考文献

[1] Abel, N. H., Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, *J. Reine Angew Math.*, **4** (1829), 309–348.

[2] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, I, Chelsea, 1971 (中译本: E. 卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1977).

[3] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1950.

H. X. Розов 撰 张鸿林 译

Abel-Гончаров 问题 [**Abel-Goncharov problem**；**Абеля-Гончарова проблема**]，Гончаров 问题 (Goncharov problem)

单复变量函数论中的下述问题：从某个函数类中求满足关系 $f^{(n)}(\lambda_n)=A_n$ $(n=0, 1, \cdots)$ 的所有函数 $f(z)$ 的集合，其中$\{A_n\}$和$\{\lambda_n\}$是为给定函数类所容许的复数列．这个问题是由B. Л. Гончаров 提出的([2]).

使函数 $f(z)$ 与级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\lambda_n) P_n(z) \qquad (*)$$

相对应；这个级数称为Abel-Гончаров 插值级数 (Abel-Goncharov interpolation series)，其中 $P_n(z)$ 是由等式

$$P_n^{(k)}(\lambda_k) = 0, \; k=0,\ldots,n-1; \; P_n^{(n)}(z) \equiv 1$$

定义的 Гончаров 多项式 (Goncharov polynomial)．N. H. Abel 给出了对情况 $\lambda_n=a+nh, n=0,1,\cdots$ (其中 a,h 是实数且 $h\neq 0$)的形式处理(见[1])．此时，

$$P_n(z) = \frac{1}{n!}(z-a)(z-a-nh)^{n-1}.$$

级数(*)可用于研究正则函数逐次导数的零点．能由级数(*)表示的函数 $f(z)$ 的集合称为 Abel-Гончаров 问题的收敛类 (convergence class).

在 $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$ 的情形，Abel-Гончаров 收敛类可用整函数 $f(z)$ 依赖于量 $\sum_{k=0}^{n-1}|\lambda_{k+1}-\lambda_k|$ 的增长的阶和型的界来表达([2]).

如果 $\lambda_n=n^{1/\rho}l(n)$，其中 $l(n)$ 是缓慢递增函数，$0<\rho<\infty$，则 Abel-Гончаров 收敛类在某种意义下已被准确地确定([6])．对于有限或无穷阶整函数的其他 Abel-Гончаров 收敛类也已被确定，它们由加在对应函数类的指标上的各种不同的限制所表达．对于多变量整函数，也已研究它们的 Abel-Гончаров 问题．对于某些插值结点类，已经得到 Гончаров 多项式的精确估计．

设 A_r^α 是形如

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-\alpha} a_n z^n, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} \leqslant r$$

(其中 $\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\leqslant r, 0<r<\infty, 0\leqslant\alpha<\infty$)的函数 $f(z)$ 构成的类，Λ_α 是使得 $|\lambda_n|\leqslant(n+1)^{\alpha-1}$ $(n=0, 1, \cdots)$的一切可能的序列$\{\lambda_n\}$构成的类，则类 Λ_α的收敛界(bound of convergence) S_α 定义为使得每个函数 $f(z)\in A_r^\alpha$ 能由一个级数(*)表示的 r 值的上确界．满足下述条件的 r 值的下确界称为类 Λ_α 的唯一性界(bound of uniqueness) W_α：存在函数 $f(z)\in A_r^\alpha$ 和序列 $\{\lambda_n\}\in\Lambda_\alpha$，使得 $f^{(n)}(\lambda_n)=0$ $(n=0, 1, \cdots)$，$f(z)\not\equiv 0$．量 W_1, W_0 分别称为 Whittaker 常数(Whittaker constant)和 Гончаров 常数(Goncharov constant)．已证明 $S_1=W_1$ (见[6])；也已证明([5]，[10])更一般的论断

$$S_\alpha = W_1, \quad W_\alpha = W_1, \quad 0\leqslant\alpha<\infty.$$

于是，如果$\{\lambda_n\}\in\Lambda_\alpha$，则 Abel-Гончаров 问题归结为求出常数 W_1．迄今还不知道W_1 的精确值，但已得到上界和下界：$0.7259<W_1<0.7378$ ([9]).

以 A_1^* 表示在区域 $|z|\geqslant 1$ 上正则且 $f(\infty)=0$ 的函数 $f(z)$ 构成的类，下述与类 A_1^* 的 Abel-Гончаров 问题有关的论断已得到证实：对任何满足条件

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{|\lambda_k|} = 0$$

(其中$\{n_k\}$是自然数的一个递增序列)的数集$\{\lambda_k\}$，方程 $f^{(n_k)}(\lambda_k)=0$ $(k=0, 1, \cdots)$ 蕴涵 $f(z)\not\equiv 0$．而且，对任何数 $b>0$，存在满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|} = b$$

的序列$\{\lambda_n\}$，以及函数 $f(z)\in A_1^*$ $(f(z)\not\equiv 0)$，使得 $f^{(n)}(\lambda_n)=0$ $(n=1, 2, \cdots)$ ([7]).

Abel-Гончаров 问题包含由 J. M. Whittaker 提出的([12])两点问题 (two-point problem)．设 $\{\nu_k\}$ 和 $\{\mu_n\}$ 是两个序列，满足$\{\nu_k\}\cup\{\mu_n\}=\{n\}$，$\{\nu_k\}\cap\{\mu_n\}=\phi$．两点问题就是要确定在何种条件下，存在在区间[0,1]上正则的函数 $f(z)\not\equiv 0$，满足 $f^{(\nu_k)}(1)=0$，$f^{(\mu_n)}(0)=0$．对于在圆盘 $|z|<R$ $(R>1)$内正则的函数类的各种子类，这个问题已被解决．所得到的条件在某种意义下是精确的，它由加在依赖于$\{\nu_k\}$的展开式

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu_k} z^{\nu_k}$$

的系数 a_{ν_k} 上的种种界限所表达([3])．这个问题已被推广，并已用无穷线性方程组理论予以解决([4])．在$\{\nu_k\}$形成算术序列并限于处理指数型整函数的特殊情形，在

某种意义上两点问题已经彻底解决([8]).

参考文献

[1] Abel, N. H., Sur les fonctions génératrices et leurs déterminants, in Oeuvres complètes, Vol. 2, Christiania, 1839, 77-88. Edition de Holmboe.

[2] Gontcharoff, W. L. (Гончаров, В. Л.), Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques. Géneralisation de la serie d'Abel, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.*, (3), **47** (1930), 1-78.

[3] Гельфонд, А. О., Ибрагимов, И. И., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **11** (1947), 6, 547-560.

[4] Джрбашян, М. М., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **16** (1952), 3, 225-252.

[5] Драгилев, М. М., Чухлова, О. П., 《Сиб. матем. ж.》, **4** (1963), 2, 287-294.

[6] Евграфов, М. А., Интерполяционная задача Абеля-Гончарова, М., 1954.

[7] Казьмин, Ю. А., 《Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.》, 1963, 1, 26-34.

[8] Казьмин, Ю. А., 《Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.》, 1965, 6, 37-44.

[9] Macintyre, S. S., On the zeros of successive derivatives of integral functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 241-251.

[10] Суетин, Ю. К., 《Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.》, 1966, 5, 16-25.

[11] Осколков, В. А., 《Матем. сб.》, **92** (1973), 1, 55-59.

[12] Whittaker, J. T., Interpolatory function theory, Cambridge Univ. Press, 1935.

В. А. Осколков 撰

【补注】 关于有关的一般领域的导论,见[A1].

参考文献

[A1] Boas, R. P., Entire functions, Acad. Press, 1954.

沈永欢 译

Abel 不等式 [Abel inequality; Абеля неравенство]

对于一些数对乘积之和的估计. 如果给定这样的数 a_k 的集合和数 b_k 的集合, 使得一切和 $B_k=b_1+b_2+\cdots+b_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 的绝对值都不超过一个数 B, 即 $|B_k|\leqslant B$, 并且或者 $a_i\geqslant a_{i+1}$ 或者 $a_i\leqslant a_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant B(|a_1|+2|a_n|).$$

如果 a_k 是非增的、非负的, 则有更简单的估计:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant Ba_1.$$

Abel 不等式可以通过 **Abel 变换** (Abel transformation) 来证明.

Л. Д. Кудрявцев 撰 张鸿林 译

Abel 积分方程 [Abel integral equation; Абеля интегральное уравнение]

积分方程

$$\int_0^x\frac{\varphi(s)}{\sqrt{x-s}}ds=f(x),\tag{1}$$

这个方程是在求解 **Abel 问题** (Abel problem) 时推出的. 方程

$$\int_a^x\frac{\varphi(s)}{(x-s)^\alpha}ds=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b\tag{2}$$

称为广义 Abel 积分方程 (generalized Abel integral equation), 其中 $a>0$, $0<\alpha<1$ 是已知常数, $f(x)$ 是已知函数, 而 $\varphi(x)$ 是未知函数. 表达式 $(x-s)^{-\alpha}$ 称为 Abel 积分方程的核 (kernel) 或 Abel 核 (Abel kernel). Abel 积分方程属于第一类 **Volterra 方程** (Volterra equation). 方程

$$\int_a^b\frac{\varphi(s)}{|x-s|^\alpha}ds=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b\tag{3}$$

称为具有固定积分限的 Abel 积分方程 (Abel integral equation with fixed limits).

如果 $f(x)$ 是连续可微函数, 则 Abel 积分方程 (2) 具有唯一的连续解, 这个解由公式

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\tag{4}$$

或者

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\alpha}}+\int_a^x\frac{f'(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right]\tag{5}$$

给出. 公式(5)在更一般的假设下给出了 Abel 方程 (2) 的解 (见[3], [4]). 从而证明了([3]): 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上绝对连续, 则 Abel 积分方程 (2) 具有由公式(5)给出的属于 Lebesgue 可积函数类的唯一解. 关于 Abel 积分方程(3)的解, 见[2]; 亦见[6].

参考文献

[1] Bôcher, M., On the regions of convergence of power-series which represent two-dimensional harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **10** (1909), 271-278.

[2] Carleman, T., Ueber die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen, *Math. Z.*, **15** (1922), 111-120.

[3] Tonelli, L., Su un problema di Abel, *Math. Ann.*, **99** (1928), 183-199.

[4] Tamarkin, J. D., On integrable solutions of Abel's integral equation, *Ann. of Math.* (2), **31** (1930), 219-229.

[5] Михлин, С. Г., Лекции по линейным интегральным

уравнениям, М., 1959 (英译本: Mikhlin, S. G., Linear integral equations, Hindushtan Publ. Comp., Delhi, 1960).

[6] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, 2 изд., М. 1963 (英译本: Gakhov, F. D., Boundary value problems, Pergamon, 1966).

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 (2)的左边也称为 Riemann - Liouville 分式积分,其中 Re $\alpha<1$, 见[A1]. 如果把(1)和(2)的两边从 x 到 ∞ 进行积分,并且用 $s-x$ 代替 $x-s$, 则所得等式的左边分别称为 Abel 变换(Abel transform)和 Weyl 分式积分(Weyl fractional integral), 见[A1]. 这个 Abel 变换就是一个实半单 Lie 群上的 Abel 变换的特例 SL(2, **R**), [A2].

[A3]是积分方程的一般教程.

参考文献

[A1] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhetinger, F. and Tricomi, F. G., Tables of integral transform, II, McGraw-Hill, 1954, Chapt. 13.

[A2] Godement, R., Introduction aux travaux de A. Selberg, in *Sém. Bourbiki*, Vol. 144, 1957.

[A3] Fenyö, S. and Stolle, H. W., Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen, 3, Birkhäuser, 1984, Sect. 13. 2. 4.

张鸿林 译 蒋正新 校

Abel - Poisson 求和法 [Abel - Poisson summation method; Абеля - Пуассона метод суммирования]

Fourier 级数求和法之一. 函数 $f\in L[0, 2\pi]$ 的 Fourier 级数在点 φ 上按 Abel-Poisson 法是可和的(summable by Abel-Poisson method), 其和为数 S, 如果

$$\lim_{\rho\to 1-0} f(\rho,\varphi) = S,$$

其中

$$f(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\rho^k,$$

$$f(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi+t)\frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)}\,dt. \quad (*)$$

如果 $f\in C(0,2\pi)$, 则对于 $|z|\equiv|\rho e^{i\varphi}|<1$, 右边的积分是调和函数, 正如 S. Poisson 所证明的, 它是关于圆盘的 Dirichlet 问题的解. 所以, **Abel 求和法** (Abel summation method) 当应用于 Fourier 级数时称为 Abel-Poisson 求和法, 而积分(*)称为 **Poisson 积分**(Poisson integral).

如果 (ρ,φ) 是单位圆内一点的极坐标, 则可以考虑当点 $M(\rho,\varphi)$ 不是沿半径或切线, 而是沿任意路径趋向于边界圆上的一点时函数 $f(\rho,\varphi)$ 的极限. 在这种情况下, Schwarz 定理(Schwarz theorem)成立: 如果 f 属于 $L[0,2\pi]$ 且在点 φ_0 上是连续的, 则

$$\lim_{(\rho,\varphi)\to(1,\varphi_0)} f(\rho,\varphi)=f(\varphi_0)$$

而与点 $M(\rho,\varphi)$ 沿怎样的路径趋向于点 $P(\lambda,\varphi_0)$ 无关, 只要这一路径保持在单位圆内.

参考文献

[1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961. (英译本: Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

А. А. Захаров 撰

【补注】 与上述 Schwarz 定理有关的一个定理是 Fatou 定理(Fatou theorem): 如果 $f\in L[0,2\pi]$, 则对于几乎所有 φ_0, 当 $M(\rho,\varphi)$ 沿单位圆内而不与单位圆相切的路径趋向于 $P(1,\varphi_0)$ 时, 有

$$\lim_{(\rho,\varphi)\to(1,\varphi_0)} f(\rho,\varphi)=f(\varphi_0).$$

见[A2], pp. 129－130.

参考文献

[A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1－2, Cambridge Univ. Press, 1979.

[A2] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Maruzen, 1959.

张鸿林 译

Abel 问题 [Abel problem; Абеля задача]

在竖直平面 (s,τ) 内求满足下述条件的曲线: 如果一个质点由曲线上纵坐标为 x 的点出发, 从静止状态开始在重力作用下沿曲线滑动, 那么经过时间 $T=f(x)$ 以后它将达到坐标轴 $O\tau$, 这里函数 $f(x)$ 是事先给定的. 这个问题是 N. H. Abel 在 1823 年提出的, 它的解决归结为一个第一类积分方程即 **Abel 积分方程** (Abel integral equation)——已被解出. 事实上, 如果 ω 是所求曲线的切线同坐标轴 $O\tau$ 之间的夹角, 则有

$$\frac{ds}{d\tau} = -\sqrt{2g(x-s)}\,\sin\omega.$$

把这个方程从 0 到 x 积分, 并且设

$$\frac{1}{\sin\omega} = \varphi(s),\quad -\sqrt{2g}\,\Phi(x) = f(x),$$

则得到关于未知函数 $\varphi(s)$ 的积分方程

$$\int_0^x\frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{x-s}} = f(x).$$

解出 $\varphi(x)$, 便得到所求曲线的方程. 上面得到的这个方程的解是

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\sqrt{x}}+\int_0^x\frac{f'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{x-\tau}}\right].$$

参考文献

[1] Abel, N. H., Solutions de quelques problèmes à l'aide d'intégrales défines, in *Oeuvres Complètes, nouvelle éd.*, Vol. 1, Grondahl and Son, Christiania, 1881, 11－27.

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 在 $f(x)=$ 常数的情况下, 这就是 Chr. Huyghens 首先解决的著名的等时问题(tautochrone problem),他证明这条曲线是一摆线(cycloid).

参考文献

[A1] Jerri, A. J., Introduction to integral equations with applications, M. Dekker, 1985, Sect. 2. 3.

[A2] Hochstadt, H., Integral equations, Wiley (Interscience), 1973.

[A3] Moiseiwitsch, B. L., Integral equations, Longman, 1977.

张鸿林 译

Abel 求和法 [Abel summation method; Абеля метод суммирования]

数项级数求和法之一. 如果对于任何实数 $x\,(0<x<1)$, 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

都收敛,且

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = S,$$

则称级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

按 Abel 法(A 法)是可和的(summable by the Abel method (A-method)), 其极限为数 S. 这种求和法在 L. Euler 的著作甚至 G. Leibniz 的著作中已经出现. 它之所以称为"Abel 求和法",是因为关于幂级数之和的连续性的 **Abel 定理**(Abel theorem)的缘故. Abel 求和法属于完全**正则求和法**(regular summation methods), 它比一切 **Cesàro 求和法**(Cesàro summation methods)更强. 应用 Abel 求和法以及 Tauber 定理可以证明级数的收敛性.

同 Abel 求和法密切相关的是 A^* 求和法. 设 z 是一个复数, $|z|<1$; 如果当 z 沿任何不与单位圆相切的路径趋向于 1 时, 都有

$$\lim \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = S,$$

则称级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

按 A^* 法是可和的,其和为数 S.

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

*[2] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergomon, 1964).

А. А. Захаров 撰 张鸿林 译

Abel 定理 [Abel theorem; Абеля теорема]

1) 关于代数方程的 Abel 定理: 对于任意 n 次代数方程,当 $n\geq 5$ 时,用它的系数的根式来表示它的解的公式是不存在的. 这个定理是 N. H. Abel 在1824 年证明的([1]). Abel 定理也可作为 **Galois 理论**(Galois theory) 的一个推论而得到,由这一理论还可推出更一般的定理: 对于任何 $n\geq 5$, 都存在整系数的代数方程,其根不能通过有理数的根式来表示. 关于任意域上的代数方程的 Abel 定理的现代表述, 见**代数方程**(algebraic equation).

2) 关于幂级数的 Abel 定理: 考虑幂级数

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k, \tag{*}$$

其中 a_k, b, z 都是复数. 如果这个级数在点 $z=z_0$ 上收敛, 则它在任何以 b 为心、以 $\rho<|z_0-b|$ 为半径的圆盘 $|z-b|\leqslant\rho$ 内绝对一致收敛. 这个定理是由 N. H. Abel 证明的([2]). 由这个定理可以推出: 存在数 $R\in[0,\infty]$, 使得当 $|z-b|<R$ 时级数(*)收敛,而当 $|z-b|>R$ 时级数(*)发散. 这个数 R 称为级数(*)的收敛半径(radius of convergence),而圆盘 $|z-b|<R$ 称为级数(*)的收敛圆盘(disc of convergence).

3) Abel 连续性定理(Abel continuity theorem): 如果幂级数(*)在收敛圆盘的边界点 z_0 上收敛,则它在以 z_0, z_1, z_2 为顶点的任何闭三角形 T 内是连续函数, 其中 z_1, z_2 处于收敛圆盘内. 特别是,

$$\lim_{\substack{z\to z_0,\\ z\in T}} S(z) = S(z_0).$$

这个极限沿半径总是存在的: 级数(*)沿收敛圆盘的任何连接点 b 和 z_0 的半径一致收敛. 特别是, 这个定理可以用来计算在收敛圆盘的边界点上收敛的幂级数之和.

4) 关于 Dirichlet 级数的 Abel 定理: 如果 **Dirichlet 级数**(Dirichlet series)

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s=\sigma+it, \ \lambda_n>0$$

在点 $s_0=\sigma_0+it_0$ 上收敛,则它在半平面 $\sigma>\sigma_0$ 内收敛,在任何角 $|\arg(s-s_0)|\leqslant\theta<\pi/2$ 内一致收敛. 这是关于幂级数的 Abel 定理的推广(取 $\lambda_n=n$, 并且设 $e^{-s}=z$). 由这个定理可知, Dirichlet 级数的收敛区域是某个半平面 $\sigma>c$, 其中 c 是级数的收敛点的横坐标.

对于通常的 Dirichlet 级数(当 $\lambda_n=\ln n$ 时), 如果它的系数的和函数 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 具有某种渐近性, 则下述定理成立: 如果

$$A_n = B n^{s_1}(\ln n)^{\alpha} + O(n^{\beta}),$$

其中 B, s_1, α 是复数, β 是实数, $\sigma_1-1<\beta<\sigma_1, \sigma_1=\operatorname{Re} s_1$, 则当 $\sigma_1<\sigma$ 时 Dirichlet 级数收敛, 函数 $\varphi(s)$ 能够正则地延拓到半平面 $\beta<\alpha$, 点 $s=s_1$ 除外, 而且, 如果 $\alpha\neq-1$,

$-2, \cdots$, 则

$$\varphi(s) = B\,\Gamma(\alpha+1)s(s-s_1)^{-\alpha-1}+g(s);$$

如果 $\alpha=-1,-2,\cdots$, 则

$$\varphi(s) = B\frac{(-1)^{-\alpha}}{(-\alpha-1)!}s(s-s_1)^{-\alpha-1}\ln(s-s_1)+g(s).$$

这里的 $g(s)$ 当 $\sigma>\beta$ 时是正则函数.

例如, Riemann ζ 函数 ($A_n=n$, $B=1$, $s_1=1$, $\alpha=0$, $\beta>0$) 至少在半平面 $\sigma>0$ 内是正则的, 点 $s=1$ 除外, 在这一点上它具有残数等于 1 的一阶极点. 这个定理可以按多种方式推广. 例如, 如果

$$A_n = \sum_{j=1}^{k} B_j n^{s_j}(\ln n)^{\alpha_j} + O(n^{\beta}),$$

其中 $B_j, s_j, \alpha_j (1\leqslant j\leqslant k)$ 是任意复数, 且 $\sigma_k-1<\beta<\sigma_k<\cdots<\sigma_1$, 则当 $\sigma>\sigma_1$ 时 Dirichlet 级数收敛, $\varphi(s)$ 在区域 $\alpha>\beta$ 内是正则的, 点 $s_1, s_2, \cdots, s_k$ 除外, 在这些点上它具有代数或对数奇异性. 根据 A_n 的渐近性, 这类定理为研究 Dirichlet 级数在给定半平面内的性质提供了某些信息.

参考文献

[1] Abel, N. H., Oeuvers complètes, Vol. 1, Christiania, 1881.

[2] Abel, N. H., Untersuchungen über die Reiche $1+mx/2+m(m-1)x^2/(2\cdot 1)+\cdots$, *J. Reine Angew. Math.*, **1** (1826), 311–339.

[3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967 (英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, 1977).

Л. П. Купцов 撰

【补注】 关于 Abel 定理 2)–4) 的更多内容, 见 [A1].

参考文献

[A1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

张鸿林 译 蒋正新 校

Abel 变换 [**Abel transformation**; **Абеля преобразование**], 分部求和法 (summation by parts)

变换

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = a_N B_N - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{N-1} B_k(a_{k+1}-a_k),$$

其中数 a_k, b_k 是给定的, B_0 是任意选取的, 而

$$B_k = B_{k-1}+b_k = B_0+b_1+\cdots+b_k,$$

$$k=1,\ldots,N.$$

Abel 变换是**分部积分法** (integration by parts) 公式在离散情况下的对应公式.

如果 $a_N\to 0$ 且序列 $\{B_k\}$ 是有界的, 则 Abel 变换可应用于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_{k+1})B_k - a_1 B_0.$$

应用 Abel 变换可以证明数项级数和函数项级数的几个收敛性准则 (见 **Abel 准则** (Abel criterion)). 一个级数经过 Abel 变换往往可以得到另一个其和相同、收敛性更好的级数. 此外, 应用 Abel 变换通常可以得到某些估计 (见 **Abel 不等式** (Abel inequality)), 特别是用来研究级数的收敛速度. 这种变换是 N. H. Abel 引入的 ([1]).

参考文献

[1] Abel, N. H., Untersuchungen über die Reihe $1+mx/2+m(m-1)x^2/(2\cdot 1)+\cdots$, *J. Reine Angew. Math.*, 1 (1826), 311–339.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд, М., 1967 (英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, reprint, 1917).

[3] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern nalysis, 1–2, Cambridge Univ. Press, 1952.

Л. П. Купцов 撰 张鸿林 译

Abel 范畴 [**Abelian category**; **Абелева категория**]

显示所有 Abe 群的范畴的某些特性的一种范畴. Abel 范畴是作为同调代数的抽象构造的基础而被引进的 ([4]). 范畴 $\mathfrak{A}$ 称为 Abel 范畴 ([2]), 如果它满足下列的公理:

A0. 存在一个零对象 (见**范畴的零对象** (null object of a category)).

A1. 每个态射都有一个**核** (kernel) (见**范畴中的态射的核** (kernel of a morphism in a category)) 与一个**上核** (cokernel).

A2. 每个单态射都是一个**正规单态射** (normal monomorphism), 从而它作为某一态射的核出现; 每个满态射都是一个**正规满态射** (normal epimorphism).

A3. 对每一对对象都存在一个**积** (product) 与一个**上积** (coproduct) (见**范畴中一族对象的积** (product of a family of objects in a category)).

在定义一个 Abel 范畴时, 常假定 $\mathfrak{A}$ 是一个局部的**小范畴** (small category). 一个 Abel 范畴中两个对象 A 与 B 之上积也称为这些对象的直和 (direct sum), 并记成 $A\oplus B$, $A\coprod B$ 或 $A\dotplus B$.

Abel 范畴的例子.

1) Abel 范畴的对偶范畴也是一个 Abel 范畴.

2) 在一个具有单位元的任意结合环 R 上的所有左单式模与所有的 R 模同态组成一个范畴 ${}_R\mathfrak{M}$, 它是一个 Abel 范畴 (例如所有 Abel 群的范畴).

3) 一个 Abel 范畴的任何**完全子范畴** (full subcategory) 仍是一个 Abel 范畴. 所谓一个完全子范畴是指这样一个子范畴, 对于它的每个态射, 它也必包含该态射的核与上核, 而且对于它所包含的每一对对象 A 与 B, 它也必包含它们的积与上积.

左单式模的范畴 $_R\mathfrak{M}$ 的上述类型的子范畴取尽了所有的小 Abel 范畴，因此，下述的 Mitchell 定理(Mitchell theorem)是有效的：每个小 Abel 范畴都可以完全精确地嵌入到某一范畴 $_R\mathfrak{M}$ 中去.

4) 图 $\mathfrak{F}(\mathfrak{D},\mathfrak{A})$的任何范畴都是 Abel 范畴，这里 $\mathfrak{D}$ 是 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 上的图概形. 在概形 $\mathfrak{D}$ 中，可以区别出交换关系的集合 C，它是 $\mathfrak{D}$ 中具有公共起点与终点的道路 $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$和 $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_m)$之对$(\varphi,\psi)$的集合. 那么，范畴 $\mathfrak{F}(\mathfrak{D},\mathfrak{A})$ 中由满足条件

$$D(\varphi)=D(\varphi_1)\cdots D(\varphi_n)=D(\psi_1)\cdots D(\psi_m)=D(\psi)$$

的所有图 $D:\mathfrak{D}\to\mathfrak{A}$ 所生成的完全子范畴是一个 Abel 范畴. 特别地，如果 $\mathfrak{D}$ 是一个小范畴，并且集合 C 是由所有具有形式$(\alpha\beta,\gamma)$的对所组成的，其中 $\gamma=\alpha\beta$，那么，相应的子范畴就是从 $\mathfrak{D}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的一位共变**函子**(functor)的 Abel 范畴.

假定在一个小范畴 $\mathfrak{D}$ 中，零对象是存在的. 于是一个函子 $F:\mathfrak{D}\to\mathfrak{A}$ 称为正规化的(normalized)，如果它将一个零对象变成一个零对象. 在函子的范畴中，由正规化的函子所生成的完全子范畴就将是一个 Abel 范畴. 特别地，如果 $\mathfrak{D}$ 是一个以所有整数为对象的范畴，其零对象是 N，而其非零非恒等态射形成一个序列

$$\cdots\to(-1)\xrightarrow{d_{-1}}0\xrightarrow{d_0}1\xrightarrow{d_1}2\to\cdots$$

其中 $d_nd_{n+1}=0$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，那么，由正规化的函子所生成的相应的子范畴称为 $\mathfrak{A}$ 上的复形范畴(category of complexes). 在复形范畴上，定义了一些加法函子 Z^n, B^n, H^n，它们分别对应于 n 维闭链，n 维边缘与 n 维同调，都取值于 $\mathfrak{A}$ 内. 它们成为同调代数的发展基础.

5) 一个 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 的一个完全子范畴 $\mathfrak{A}_1$ 称为**稠密的**(dense)，如果它包含它的对象的所有**子对象**(subobject)与**商对象**(quotient object)，且若对**正合序列**(exact sequence)

$$0\to A\to B\to C\to0$$

$B\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}_1$ 当且仅当 $A,C\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}_1$. 于是商范畴 $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1$ 就可构造如下. 设$(R,\mu]$ 是直和 $A\oplus B$的一个子对象，π_1 与 π_2 为直和的射影，并设正方形

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\mu\pi_1} & A \\ {\scriptstyle\mu\pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & X \end{array}$$

为上泛的(即一个上纤维积). 子对象(R,μ)称为一个 $\mathfrak{A}_1$ 子对象，如果 Coker $\mu\pi_1$, Ker $\beta\in\mathfrak{A}_1$. 两个 $\mathfrak{A}_1$ 子对象称为等价的，如果它们包含某个 $\mathfrak{A}_1$ 子对象.

由定义，集合 $H_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1}(A,B)$是由 $\mathfrak{A}_1$ 子对象的等价类组成的. 二元关系的通常乘法同这样引进的等价关系是相容的，这就使得构造商范畴 $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1$ 成为可能，它是一个 Abel 范畴. **忠实函子**(faithful functor) $T:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1$ 是这样定义的，对每个态射 $\alpha:A\to B$ 指定它在 $A\oplus B$中的对应图形. 一个子范畴 $\mathfrak{A}_1$ 称为一个局部化子范畴(localizing subcategory)，如果 T 有一个完全单叶的右伴随函子 $Q:\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}$.

6) 对于任何拓朴空间 X, X 上的所有左 G 模的范畴是一个 Abel 范畴，这里的 G 是 X上有单位元环的层.

对任何 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 都可引进态射的部分和，使得 $\mathfrak{A}$ 变成一个**加性范畴**(additive category). 为此原因，在一个 Abel 范畴中，任一对对象的积与上积都是恒等的. 再者，在定义一个 Abel 范畴时，只要假定或者积或者上积存在就够了. 任何 Abel 范畴都是一个具有唯一双范畴结构的**双范畴**(bicategory). 这些性质刻画了一个 Abel 范畴：一个具有有限积的范畴是 Abel 范畴，当且仅当它是一个加性范畴，每个态射 α 都有一个核与一个上核，并且可以分解成积

$$\alpha=\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\,\alpha)\theta\,\mathrm{ker}(\mathrm{Coker}\,\alpha),$$

其中的 θ 是一个同构.

上面所引的 Mitchell 定理构成了 Abel 范畴中的所谓"图表追踪"法的基本原理：对于有关交换图的任何命题，如果它对左模的所有范畴 $_R\mathfrak{M}$ 都是正确的，而且它是某个态射序列的正合性的结果，那么，它在所有的 Abel 范畴中也必然是正确的.

在一个局部小 Abel 范畴中，一个任意的对象的 $\mathfrak{A}$ 子对象形成一个 **Dedekind 格**(Dedekind lattice). 如果任何对象族的积(或上积)都在 $\mathfrak{A}$ 中存在，那么这个格将是完全的. 已经知道，这些条件都将具备，如果在 $\mathfrak{A}$ 中有一个生成对象 U，并且如果上积

$$\coprod_{i\in I}U_i,\quad U_i=U,$$

对任何集合 I 都存在. 例如，这些条件是被 **Grothendieck 范畴**(Grothendieck category)所满足的，此范畴等价于模范畴对其局部化子范畴所得到的商范畴(Gabriel-Popescu 定理(Gabriel - Popescu theorem)).

参考文献

[1] Bucur, I. and Deleanu, A., Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968.

[2] Freyd, P., Abelian categories: An introduction to the theory of functors, Harper and Row, 1964.

[3] Gabriel, P., Des categories Abéliennes, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 323 – 448.

[4] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, **9** (1957), 119 – 221.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 在此文中，态射的合成的写法是从左到右的，即 $\varphi\psi$ 表示 $\varphi: A\to B$, $\psi: B\to C$ 的合成．一个稠密的子范畴更常称为一个 Serre 子范畴(Serre subcategory)．

参考文献

[A1] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965.
[A2] Popescu, N., Abelian categories with applications to rings and modules, Acad. Press, 1973.
周伯埙 译

Abel 微分 [Abelian differential; Абелев дифференциал]

在紧或闭的 Riemann 曲面 S 上的全纯或亚纯微分(见 **Riemann 曲面上的微分** (differential on a Riemann surface))．

设 g 是曲面 S 的亏格(见**曲面的亏格** (genus of a surface))；$a_1 b_1 \cdots a_g b_g$ 是 S 的典范同调基的闭链．根据这些奇点的性状，可把 Abel 微分区分成 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 类，并且有真包含关系 Ⅰ ⊂ Ⅱ ⊂ Ⅲ．第一类 Abel 微分(Abelian differential of the first kind)就是在 S 上处处全纯的一阶微分，且在每个点 $P_0 \in S$ 的一个邻域 U 内它具有形式 $\omega = p\,dz = p(z)dz$，这里 $z=x+iy$ 是 U 内的局部单值化变量，$dz=dx+idy$，$p(z)$ 是 U 内 z 的全纯或正则的解析函数．Abel 微分相加或它与一个全纯函数相乘可以用自然的方式定义：如果

$$\omega = p\,dz,\quad \pi = q\,dz,\quad a = a(z),$$

则

$$\omega+\pi = (p+q)\,dz,\quad a\omega = (ap)\,dz.$$

第一类 Abel 微分构成一个 g 维向量空间 $\mathfrak{A}$．再引入标量积

$$(\omega,\pi) = \iint_S \omega * \bar{\pi},$$

其中 $\omega * \bar{\pi}$ 是 ω 与星共轭微分 $\bar{\pi}$ 的外积 (exterior product)，空间 $\mathfrak{A}$ 成为 Hilbert 空间．

设 $A_1, B_1, \cdots, A_g, B_g$ 是第一类 Abel 微分 ω 的 A 周期和 B 周期，即积分

$$A_j = \int_{a_j}\omega,\quad B_j = \int_{b_j}\omega,\quad j=1,\ldots,g,$$

那么有以下关系式：

$$\|\omega\|^2 = i\sum_{j=1}^{g}(A_j\bar{B}_j - B_j\bar{A}_j) \geq 0. \qquad (1)$$

如果 $A'_1, B'_1, \cdots, A'_g, B'_g$ 是另一个第一类 Abel 微分 π 的周期，那么有

$$i(\omega,\bar{\pi}) = \sum_{j=1}^{g}(A_jB'_j - B_jA'_j) = 0. \qquad (2)$$

关系式(1)和(2)称为第一类 Abel 微分的 Riemann 双线性关系 (bilinear Riemann relations)．可以选取第一类 Abel 微分的一个典范基，即空间 $\mathfrak{A}$ 的一个典范基 $\varphi_1, \cdots, \varphi_g$，使得

$$A_{ij} = \int_{a_j}\varphi_i = \delta_{ij},$$

这里 $\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0$，若 $i\neq j$．于是 B 周期

$$B_{ij} = \int_{b_j}\varphi_i$$

的矩阵 (B_{ij}) $(i, j=1,\cdots,g)$ 是对称的，而且虚部的矩阵 $(\mathrm{Im}\, B_{ij})$ 是正定的．A 周期全为零或 B 周期全为零的第一类 Abel 微分恒等于零．如果第一类 Abel 微分 ω 的所有周期全为实数，那么 $\omega=0$．

第二类和第三类 Abel 微分(Abelian differentials of the second and third kinds)通常是亚纯微分，即在 S 上至多只有有限多个奇点(为极点)的解析微分，它们有局部表达式：

$$\left(\frac{a_{-n}}{z^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + f(z)\right)dz, \qquad (3)$$

其中 $f(z)$ 是正则函数，n 是极点的阶(若 $a_{-n}\neq 0$)，且 a_{-1} 是极点的残数．如果 $n=1$，这个极点称为单的．第二类 Abel 微分就是所有残数都为零的亚纯微分，即具有局部表达式

$$\left(\frac{a_{-n}}{z^n} + \cdots + \frac{a_{-2}}{z^2} + f(z)\right)dz$$

的亚纯微分．第三类 Abel 微分是一个任意的 Abel 微分．

设 ω 是具有 A 周期 $A_1, \cdots, A_g$ 的一个任意 Abel 微分；那么 Abel 微分 $\omega' = \omega - A_1\varphi_1 - \cdots - A_g\varphi_g$ 的 A 周期都是零，称为正规化 Abel 微分 (normalized Abelian differential)．特别地，当 P_1 和 P_2 是 S 上任意两点时，可以构造一个在 P_1 有奇点 $(1/z)\,dz$，在 P_2 有奇点 $(-1/z)dz$ 的正规化 Abel 微分 $\omega_{1,2}$ 称为第三类正规 Abel 微分．设 ω 是任意 Abel 微分，它在点 $P_1, \cdots, P_n$ 处分别有残数 $c_1, \cdots, c_n$；那么总有 $c_1+\cdots+c_n=0$．如果 P_0 是 S 上一个任意点，$P_0 \neq P_j$ $(j=1,\cdots,n)$，那么 ω 可表示成一个第二类正规化 Abel 微分 ω_2、有限个第三类正规 Abel 微分 $\omega_{j,0}$ 以及第一类 Abel 基微分 φ_k 的线性组合：

$$\omega = \omega_2 + \sum_{j=1}^{n} c_j\omega_{j,0} + \sum_{k=1}^{g} A_k\varphi_k.$$

设 ω_3 是只在 P_j $(j=1,\cdots,n)$ 有残数 c_j 的单极点的第三类 Abel 微分，ω_1 是任意的一个第一类 Abel 微分：

$$A_k = \int_{a_k}\omega_1,\quad B_k = \int_{b_k}\omega_1,$$

$$A'_k = \int_{a_k}\omega_3,\quad B'_k = \int_{b_k}\omega_3,\quad k=1,\ldots,g,$$

这里的闭链 a_k, b_k 不通过 ω_3 的极点．设点 $P_0 \in S$ 不在闭链 a_k, b_k 上，L_j 是从 P_0 到 P_j 的一条道路．那么可得第一类和第三类 Abel 微分的双线性关系 (bilinear relations)：