

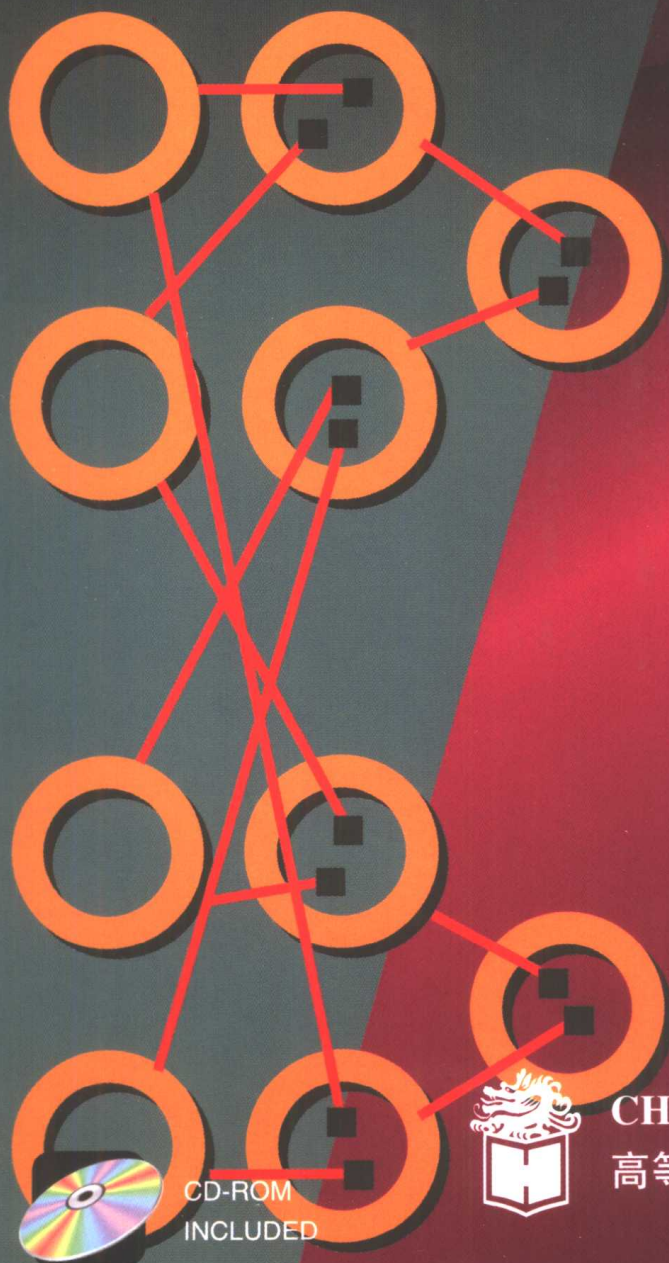
Elias Deeba
Ananda Gunawardena

用 **MAPLE V**

学习线性代数

Interactive Linear Algebra
with MAPLE V

丘维声 译



CHEP
高等教育出版社



Springer
施普林格出版社

Elias Deeba
Ananda Gunawardena

Interactive Linear Algebra with MAPLE V[®]

用 MAPLE V 学习线性代数

丘维声 译

北京大学数学科学学院



CHEP
高等教育出版社



Springer
施普林格出版社

图书在版编目(CIP)数据

用 MAPLE V 学习线性代数/(美)Elias Deeba 等著;丘维声译.
—北京:高等教育出版社;海德堡:施普林格出版社,2001.8
书名原名:Interactive Linear Algebra With MAPLE V[®]
ISBN 7-04-008587-9

I. 用… II. ①迪… ②丘… III. 线性代数—应用软件,
Maple V—教材 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 16596 号

Translation from the English language edition

Interactive Linear Algebra with MAPLE V[®] by Elias Deeba and Ananda Gunawardena

Copyright © 1998 Springer-Verlag New York, Inc.

All Rights Reserved

责任编辑:徐可 封面设计:王凌波 责任排版:杨明
版式设计:杨明 责任印制:宋克学

用 MAPLE V 学习线性代数

Elias Deeba Ananda Gunawardena 著
丘维声 译

出版发行 高等教育出版社 施普林格出版社

社址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电话 010-64054588

传真 010-64014048

网址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经销 新华书店北京发行所

印刷 北京人卫印刷厂

开本 787×1092 1/16

版次 2001 年 8 月第 1 版

印张 16.25

印次 2001 年 8 月第 1 次印刷

字数 400 000

定价 32.00 元(含光盘)

© China Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001

版权所有 侵权必究

译者的话

21 世纪世界已处于信息时代. 时代的发展对线性代数的教学提出了哪些新的要求? 需要进行哪些改革?

我们翻译的这本教材:《用 Maple V 学习线性代数》, 可以提供一些借鉴. 这本教材强调让学生积极参与学习过程, 注重线性代数的应用, 充分利用计算机和数学软件以减少繁杂的计算, 让学生有更多的时间进行思考和探索. 这些都是可取之处. 当然这本教材也有它的不足. 例如, 有的课文仅从几个具体例子就得出结论. 这种思维方式不够严谨, 从几个例子只能作出猜测, 还需要经过深入分析和逻辑推理, 才能得出结论.

这本教材由丘维声负责翻译. 前言, 目录, 第一、二单元以及第三单元的课文 3.1 由丘维声翻译. 第三单元课文 3.2 以后的内容由邓映蒲、熊国华、蔡凯、刘喆译出初稿, 经丘维声修改和定稿.

译者对于本书的责任编辑徐可同志表示感谢.

丘维声
于北京大学数学科学院

2001 年 7 月

前 言

在我们尝试提出有关数学教学中结合技术的问题和课程改革的问题时,我们致力于发展一门线性代数的导引性课程.在进展的所有阶段,我们都根据下述基本信念来改进这门学科的基本原理:学习数学的学生必须享受、理解、吸收,并且运用他们所学的技巧和概念.学习数学应当是值得花时间的经历,而不是使人灰心的事情.使用这本教科书的学生将在以实验、探索 and 发现为特征的交互环境里学习线性代数的概念和应用.学生扮演基本的和主动的角色,而不是走过学习进程的过客.

下面是在整个教材发展中影响我们的指导因素:

- 线性代数是一门融合理论、应用和计算的完美课程.
- 线性代数的应用是多种多样的和可以理解的.
- 线性代数的概念和应用能够在包括实验、探索 and 发现的生动环境中学习.
- 来自各种各样的学科,例如计算机科学、图论、自然科学、商业经济和人口流动等的应用问题使这门学科更加有趣.
- 线性代数的计算方面是与一些学科,例如计算科学的形成有关的.
- 一个统一的主题(线性方程组的可解性)把这门课程的各个单元联系在一起.
- 计算机代数系统(CAS_S),例如 Maple V 能够被有效地用于发展一个交互式自我测试的电子教师系统.
- 有效地利用技术通过图形表示和动画片可以增强对线性代数的理解.
- 实验和应用给学生提供了多样化的学习方案,它鼓励合作学习、试验 and 发现.
- 一个适应测试系统使学生准确地衡量他们的进步.
- 较少强调抽象的非形式的描述风格可能改进记忆的比率.

教材的内容

交互式教材由 6 个单元组成:

- 第一单元 线性方程组
- 第二单元 矩阵代数
- 第三单元 线性空间
- 第四单元 内积空间
- 第五单元 线性变换
- 第六单元 特征空间

我们包括了一些导引性的线性代数课程通常排斥的材料.例如,LU-分解包含在第二

单元;最小二乘法、广义逆和 QR - 分解包含在第三单元;SVD - 分解包含在第六单元.

教材的组成部分

在《用 Maple V 学习线性代数》一书中,每个单元的主要组成部分是自动函数库,交互式计算机课文,指导实验,应用以及理论,同时有一个单独设置的适应测试系统与它配套.

这些组成部分由图示用户界面(GUI)支持,它被设计成允许用户平稳地通过教材的各个组成部分.这个界面的主屏提供通向教材的六个单元、自动函数的索引、目录表和一般帮助的通路.每个单元的屏幕包括从它能够进入的教材的索引.例如,一旦一个单元被挑选,用户可以卡嗒卡嗒地敲课文、实验、应用、理论,或者自动函数.课文、实验和应用的屏幕包括线性代数概念的动画片.GUI 提供了通向 CAS MAPLE V 的直接通路.

自动线性代数函数库

一个自动函数是用计算机代数系统(CAS)写的程序,它有能力进行数值的和符号的输入,并且它的输出可以包括数值的、原文的、和(或)图形的成分,在《用 Maple V 学习线性代数》里的函数描述这门课程的各种各样的概念的自动化.这些函数的界面被仔细地设计并标准化,以便使用起来直观而且简便.这些函数不强调学习 CAS 的句法,允许用户集中精力花更多时间学习这门课程的概念.此外,作为重复使用这些函数的结果,学生可学习 CAS 的有关命令和语法.

在我们的文库里的自动函数大部分与 Maple V 的 Linalg 包有相同的名字,以便相容.这些函数具有三种职能:

1. 它们是**学习工具**:论证程式显示为学习特殊的概念或算法所需要的中间步骤.
2. 它们是**测试工具**:交互程式允许学生交互式回答一组指定的问题.这些问题被设计来保证突出一个算法或一个概念的主要面貌.这些函数不仅能克服费力的计算,而且使学生加强对过程的学习和对概念的理解.这将鼓励在学习过程中有意义的积极参与和实验.
3. 它们能被**缩短**:无步骤程式产生所要求的没有中间步骤的输出.

每一个自动函数有在线帮助,它包括概念或算法的评论、例子,以及这个函数引出的结果.也包括几个其他的对于用户便利的选择和特色,例如差错的复原和清除.这个软件包括一个手册,它说明如何使用自动函数,学生能够按照自己的进度通过这些函数的论证程式,来学习理解概念的细节;然后通过交互程式来检查他们是否懂了这概念.论证程式和交互程式在某种程度上起看“聪明的电子教师”的作用.自动函数能够从主菜单进入或者从每个单元的菜单进入.主菜单包括所有函数的索引.每个单元的菜单包括与这个单元有关的自动函数.作为组成部分的例子和函数的使用能够从主菜单或每个单元的菜单进入.下列软件包被包括在内:

- **Linsys**: gausselim, rref, backsub, solveqns, graph
- **Linmat**: LUdecomp, inverse, trainnet, commute, trsum, trproduct, trinverse, transtrans, matrixmul, Geometry
- **Linspace**: Lincomb, Lindep, basis, subspace, graphvectadd, graph-scalarmulti, graphlincomb

- **Linpdt**: GramSchmidt, QRdecomp, leastsqrs, lsqr demo
- **Lintran**: Lineartran, matrixrep, kernel, range, changebasis, Basis-Geometry
- **Lineign**: eigenvals, eigenvects, diagonalize, SVdecomp, hermitian, evplot

交互式计算机课文

每篇课文包括:目标、动力、例子、练习、测验、概念的总结和讨论的事实. 课文是非正式地发展, 不包括形式的证明. 事实的证明能够从界面 GUI 的理论部分进入. 大部分课文包括一节学习过程, 学生可以从中选择他们喜欢的例子来理解程序. 学生能够在某种程度上发展他们自己的笔记本. 每篇课文被仔细设计与有关的自动线性代数函数相结合. 交互式计算机课文允许学生按自己的进度学习, 并且充当电子教师.

每篇课文包括一组练习. 练习的解答也在软件包里提供.

每篇课文包括测验. 在测验的末尾提供一份报告, 包括学生的得分、正确答题的数目, 以及没有正确回答的问题.

指导实验

实验的目的是加强在课文中学到的概念和技巧. 每个实验包括一、二个主要作业和一、二个额外的挑战性的进一步探索的问题. 着重于数值领域. 实验的全部工作需要自动函数.

应用

应用表明在课文和实验中学习的概念和算法的效用. 应用对于来自各个学科中的问题(例如, 差分和微分方程, 自然科学, 计算机科学, 网络, 经济学, 人口流动和工程学)建立模型.

理论

理论部分包括线性代数事实的证明. 我们建议指导教师挑选特别的证明, 并且鼓励学生再读一遍这些证明. 在 Maple V 的释放装置 4 里, 证明也被连接到课文中.

适应测试系统

适应测试系统是单独设置的, 它与《用 Maple V 学习线性代数》一书配套. 它包括学生用的软件包和教员用的软件包. 使用者有权挑选一个适应测试或者非适应测试形式. 测试界面包括计算表, 到 Maple V 的通路, 提示, 说明, 确认按钮, 以及到一般帮助的通路. 适应测试形式的目的是给学生在特定的概念或算法的进展一个直接反馈. 在适应测试形式中问题的难度是根据正确回答的次数. 非适应测试形式提供随机挑选的问题. 在非适应形式中, 使用者必须指定试图解答的问题的数目, 共有 400 多道多重选择题, 其中每一道题按照难度打分.

在测试的最后提供一份报告, 包括学生的得分、正确回答的数目、没有做的题, 以及对于没有正确回答的问题的解释. 教员的软件包包括在测试中允许教员增加的新的问题, 修改现

有的问题,以及保持学生的详细记录. 通往教员的软件包的口令是 bgd.

关于工具的建议

《用 Maple V 学习线性代数》是由教科书和与之配套的光盘一起提供的. 教科书编辑成交互式课文、指导实验、应用以及理论的版式. 我们建议教员在与学生第一次见面的时候,使学生晓得学习数学时使用技术的重要性:在教育中使用技术的过程所蕴含的是,时间因素,评估和评分方法,以及他们的努力所得到的奖赏和利益. **交互式课文**能够被教员用于突出课文的主要想法,或者被学生在由教员管理的课内时间使用,或者被学生在课外时间使用. **指导实验**是由每一位学生跟着这个单元的课文完成的. 实验被设计成在教员的管理下一节课内完成. 我们建议至少完成 6 个实验, **应用**是分组活动(每组两个学生),在课外时间完成(1 至 2 周). 我们建议至少完成 4 个应用. 频繁的适应测试被建议用于检查学生的学习情况,进度和重新评估训练方法.

感谢

作者深深感激他们的家庭在这本教材的准备和各个发展阶段中给予的持续的鼓励、忍耐、支持和理解. 我们感激我们的父母所给予的启蒙和指导. 我们感谢用这本教材的初稿的学生的评论、建议和耐心. 我们感谢一个非常出色的学生 Carlos Uribe 在界面上的工作和交流想法. 我们也感谢另一位学生 Binh Phan 为发展适应测试系统所花的时间和努力. 我们感谢英语系的同事 Chris Birchak 编辑这本教材的初稿. 最后但不是最少,我们想感谢纽约施普林格出版社的 Jerry Lyons, 休斯敦城商业区大学计算机和数学科学系的 Vicky Evarretta, Karen Phillips 和 Ken Dreyhaupt, 以及美国数学协会交互式数学教材项目(IMTP)的支持.

作者将感谢这本交互式教材的使用者的任何建议、评论或指正,并且希望和我们联系.

埃利斯·狄巴(Deeba@dt. ah. edu)
安南德·古纳瓦得那(Guna@pitt. edu)

目 录

第一单元 线性方程组	(1)
课文 1.1 线性方程组的例子	(2)
课文 1.2 相容和不相容的方程组	(6)
课文 1.3 等价的方程组和初等行变换	(10)
课文 1.4 线性方程组的矩阵表示	(13)
课文 1.5 基本的线性代数算法	(15)
指导实验 1.1 用图形表示	(20)
指导实验 1.2 线性方程组相容的条件	(23)
应用 1.1 营养模型	(25)
应用 1.2 炼油厂模型	(27)
第二单元 矩阵代数	(29)
课文 2.1 矩阵的代数	(30)
课文 2.2 特殊类型的矩阵	(37)
课文 2.3 奇异矩阵	(41)
课文 2.4 矩阵的逆	(47)
课文 2.5 矩阵的行列式	(51)
课文 2.6 伴随矩阵	(57)
课文 2.7 LU-分解	(59)
指导实验 2.1 矩阵的基本性质	(62)
指导实验 2.2 多项式方程和矩阵	(66)
应用 2.1 航线连接问题	(70)
应用 2.2 人口流动目标	(72)
应用 2.3 神经网络	(74)
第三单元 线性空间	(79)
课文 3.1 线性空间介绍	(80)
课文 3.2 线性组合和张成	(85)
课文 3.3 子空间	(89)
课文 3.4 线性无关	(92)
课文 3.5 基和维数	(97)

课文 3.6 行空间和列空间	(103)
指导实验 3.1 线性空间的基本性质	(108)
指导实验 3.2 线性组合和线性无关	(111)
指导实验 3.3 线性空间的基	(113)
应用 3.1 再谈炼油厂	(115)
应用 3.2 竞赛矩阵	(117)
第四单元 内积空间	(119)
课文 4.1 内积	(120)
课文 4.2 正交投影	(126)
课文 4.3 Gram-Schmidt 正交化	(132)
课文 4.4 QR-分解	(137)
指导实验 4.1 正交基和 QR-分解	(139)
指导实验 4.2 正交基和最小二乘法的应用	(142)
应用 4.1 人口变动模型	(144)
应用 4.2 正交函数展开和信号处理	(146)
第五单元 线性变换	(149)
课文 5.1 线性变换介绍	(150)
课文 5.2 线性变换的核和值域	(156)
课文 5.3 线性变换的矩阵表示	(161)
课文 5.4 基变换	(165)
课文 5.5 相似性	(169)
指导实验 5.1 线性变换的核和值域	(172)
指导实验 5.2 线性变换的矩阵表示	(174)
应用 5.1 平衡化学反应	(177)
应用 5.2 管理科学:仓库问题	(179)
第六单元 特征空间	(181)
课文 6.1 特征值与特征向量	(182)
课文 6.2 矩阵的对角化	(188)
课文 6.3 埃尔米特矩阵	(194)
课文 6.4 酉矩阵	(197)
课文 6.5 二次型和正定矩阵	(199)
指导实验 6.1 特征值与离散系统	(203)
指导实验 6.2 二次型	(206)
应用 6.1 生态模型	(208)
应用 6.2 购物策略	(210)
应用 6.3 血中二氧化碳的浓度	(212)
应用 6.4 红血细胞的产生	(214)

事实的证明	(216)
第一单元 线性方程组	(216)
第二单元 矩阵代数	(217)
第三单元 线性空间	(221)
第四单元 内积空间	(227)
第五单元 线性变换	(230)
第六单元 特征空间	(235)
Maple V 和 ILAT 软件包	(237)
参考书目	(243)
中英文对照	(244)

第一单元

线性方程组

线性方程组是从应用数学、自然科学、社会科学和工程学等学科中的许多问题的数学建模中产生的. 线性问题 $Ax = b$ 是许多数学模型的基础. 在这门课程里, A 表示一个矩阵. 在其他场合下, A 可以表示一个微分变换或积分变换, 或者两者的组合. 主要想法是找出线性方程组 $Ax = b$ 相容或不相容的条件. 什么样的算法能被用来决定线性方程组的相容性? 如果方程组是相容的, 什么样的算法能够应用于解这个方程组? 如果方程组是不相容的, 我们能否求出这个方程组的近似解?

线性方程组的例子

在这篇课文里我们将考虑线性方程组,并且分析它们的解集.线性方程组产生于许多问题的数学建模中.

初始化软件包

```
>with(Lianlg):with(linsys);
```

线性方程组

让我们从具有两个未知量的两个方程的某些例子开始.

例 1.1 考虑有两个未知量的由两个方程组成的方程组

```
>eq1:=x+y=z; eq2:=x-2*y=4;
```

让我们用图示法检查这个方程组是否有解:

```
>graph(eq1,eq2);
```

在这个例子里方程组有**唯一解**.

例 1.2 考虑有两个未知量的两个方程的方程组

```
>eq1:=x+2*y=2; eq2:=2*x+4*y=4;
```

让我们用图示法检查这个方程组是否有解:

```
>graph(eq1,eq2);
```

在这个例子里方程组有**无穷多个解**.

例 1.3 考虑有两个未知量的两个方程的方程组

```
>eq1:x+2*y=2; eq2:=x+2*y=-2;
```

让我们用图示法检查这个方程组是否有解:

```
>graph(eq1,eq2);
```

在这个例子里方程组**没有解**.

同样的图示方法能够建立用于有三个未知量的方程组上.

例 1.4 考虑有三个未知量的由三个方程所组成的方程组

```
>eq1:=x+y+z=2; eq2:=x-2*y-z=4; eq3:=x-y-z=1;
```

让我们用图示法检查这个方程组是否有解:

```
>graph(eq1,eq2,eq3);
```

在这个例子里方程组有**唯一解**.

例 1.5 考虑有三个未知量的三个方程的方程组

```
>eq1:=x+y+z=2; eq2:=x+y+z=2; eq3:x-y-z=1;
```

让我们用图示法检查这个方程组是否有解:

```
>graph(eq1,eq2,eq3);
```

在这个例子里方程组有**无穷多个解**.

例 1.6 考虑有三个未知量的两个方程的方程组

```
>eq1:=x+y+z=2; eq2:=x+y+z=10;
```

让我们可用图示法检查这个方程组是否有解:

```
>graph(eq1,eq2);
```

在这个例子里方程组**没有解**.

简单的信用问题导致线性方程组.

例 1.7 两个未知量两个方程的方程组. 总共 10 000 美元投资给两个发行随时可换成现款的股票的投资公司 M_1 和 M_2 . 公司 M_1 的年利润率是 15%, 公司 M_2 的年利润率是 22%. 一年后总共的利润是 2000 美元. 试问: 投资给每个公司多少美元?

设分别给公司 M_1 和 M_2 投资 x 千美元和 y 千美元. 为上述问题建模的方程是

```
>eq1:=x+y=10; eq2:=15/100*x+22/100*y=2;
```

有 x 和 y 的值满足这两个方程吗?

用代数方法检查. 如果你想看中间步骤, 就挑选 Solveqns 论证程式; 否则挑选无步骤程式.

```
>Solveqns({eq1,eq2},{x,y});
```

例 1.7 描绘了一个有唯一解的两个未知量两个方程的方程组.

例 1.8 三个未知量三个方程的方程组. 总共 10 000 美元投资给三个投资公司 M_1 , M_2 和 M_3 . 投资给这三个公司的年利润率分别为 12%, 15% 和 22%. 总共的利润是 2000 美元. 投资者的策略是投给公司 M_2 的钱是投给公司 M_1 的 2 倍. 为了达到这个利润, 应当投资每个公司多少美元?

设投给公司 M_1 , M_2 和 M_3 的钱分别是 x , y , z 千美元. 为这个问题建模的数学方程是

```
>eq1:=x+y+z=10;
eq2:12/100*x+15/100*y+22/100*z=2;
eq3:=2*x-y=0;
```

有 x , y 和 z 的值满足上述方程组吗?

用代数方法检查:

```
>solveqns({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});
```

例 1.8 描绘了一个有唯一解的三个未知量三个方程的方程组.

例 1.9 三个未知量两个方程的方程组. 总共 10 000 美元投资给三个公司 M_1 , M_2 和 M_3 . 年利润率分别为 12%, 15% 和 22%. 总共的利润是 2000 美元. 为了达到这个利润, 应当给每个公司投资多少美元?

设投给公司 M_1 , M_2 和 M_3 的钱分别是 x , y , z 千美元. 为这个问题建模的数学方程是

$$\text{>eq1:} = x + y + z = 10; \quad \text{eq2:} = 12/100 * x + 15/100 * y + 22/100 * z = 2;$$

有 x, y 和 z 的值满足这两个方程吗?

用代数方法检查:

$$\text{>solveqns(\{eq1, eq2\}, \{x, y, z\});}$$

计算能够投给公司 M_3 的最大可能的量, 对于这个最大值, 能够投给另外两个公司的钱是多少?

例 1.9 描绘了一个有许多解的三个未知量两个方程的方程组. 注意其中一个变量任取一个值, 其他两个变量的值能够用这个变量的值解出来. 取任意值的变量称为自由变量.

例 1.10 四个未知量一个方程的方程组

$$\text{>eq1:} = 2 * x + 3 * y - 7 * z + 2 * w = 0;$$

用代数方法检查

$$\text{>solveqns(eq1, \{x, y, z, w\});}$$

例 1.10 描绘了一个四个未知量一个方程的方程组, 它有无穷多个解, 有三个自由变量.

例 1.11 三个未知量三个方程的方程组

$$\text{>eq1:} = x + y - z = 1; \quad \text{eq2:} = x + 2 * y - 7 * z = 4; \quad \text{eq3:} = 2 * x + 3 * y - 8 * z = 8;$$

有 x, y, z 的值满足这些方程吗?

代数地检查

$$\text{>solveqns(\{eq1, eq2, eq3\}, \{x, y, z\});}$$

例 1.11 描绘了一个没有解的三个未知量三个方程的方程组.

例 1.1—例 1.11 表明对于一个线性方程组, 下述之一必定成立:

- 方程组有唯一解.
- 方程组有无穷多个解.
- 方程组没有解.

一般地, n 个未知量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的 m 个方程的方程组是形如

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

的方程组, 其中 a_{ij} 是未知量的系数, b_i 是已知量. 如果方程的数目 m 等于未知量的数目 n , 则这个方程组是方的. 如果所有 b_i 都等于零, 则这个方程组称为齐次方程组; 否则, 称它为非齐次方程组.

练习

在下列练习中你可能需要利用自动函数 graph 和 solveqns 来回答问题.

1. 考虑线性方程组

$$2x + 3y = 5$$

$$x + ky = 15$$

确定参数 k 的值, 使得方程组

(1)有唯一解;

(2)没有解.

这个方程组能够有许多解吗?请解释.

2. 下列线性方程组有解吗?分析并且说出理由.

(1) $2x - y + 3z = 1, x - 4y + 2z = 2, x - 11y + 3z = 5;$

(2) $2x - y + 3z = 1, x - 4y + 2z = 2, x - 11y + 3z = 6;$

(3) $2x - y + 3z = 1, x - 4y + 2z = 2, x - 11y + 4z = 7.$

3. 假设线性方程组

$$x - 2y = 2$$

$$x - y = 2$$

$$4x - 8y = d$$

对于 d 的某个值有唯一解. 通过对于 d 的不同的选择画几个图, 确定有唯一解时 d 的条件.

4. 找出 d 的所有值(如果有的话)使得下述方程组没有解

$$x - 2y = 2$$

$$x - y = 2$$

$$4x - 8y = d$$

(提示: 对于 d 的不同的选择画几个图, 然后确定产生这个结果的 d 的条件.)

5. 对于方程组

$$2x - y + 3z = 1$$

$$x - 4y + 2z = 2$$

$$x - 3y + z = d$$

重复第 3 题的要求.

6. 总共 10 000 美元投资给三个投资公司 M_1, M_2 和 M_3 . 年利润率分别是 12%, 15% 和 22%. 投给 M_1 和 M_2 的资金的和等于投给 M_3 的资金. 总利润是 k 美元. 总利润的最小值是多少? 最大值是多少? 为了达到最小值或最大值, 应当投资给每个公司多少美元?

相容和不相容的方程组

一个线性方程组的解由同时满足这个方程组的所有未知量的值组成. 方程组的所有解组成的集合称为**解集**. 对于任一线性方程组, 下述之一必定成立:

- 解集是单元素集;
- 解集是无限集;
- 解集是空集.

如果一个方程组的解集不是空集, 则称它是**相容的**. 这时解集是**单元素集**或者**无限集**, 根据这个方程组有**唯一解**或者有**无穷多个解**确定. 如果一个方程组的解集是**空集**, 则称它是**不相容的**. 等价地, 这个方程组**没有解**.

初始化软件包

```
>with(linalg):with(linsys);
```

齐次方程组

n 个未知量 m 个方程的齐次方程组是形如

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= 0 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0\end{aligned}$$

的方程组.

齐次方程组是相容的还是不相容的?

齐次线性方程组总是相容的. 齐次方程组的解集决不会是空集. 事实上, $x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0$ 总是满足这样的方程组, 这个解称为**零解**或**平凡解**.

例 2.1 考虑方程组

$$\text{eq1: } =x+y+2*z=0; \quad \text{eq2: } =2*x+y-3*z=0;$$

这个方程组的解集是什么?