

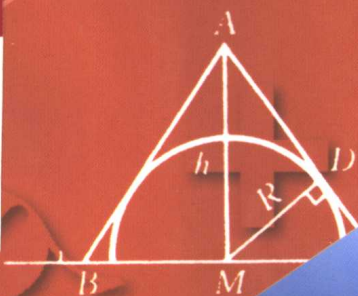
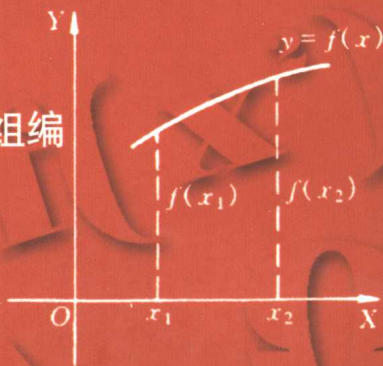
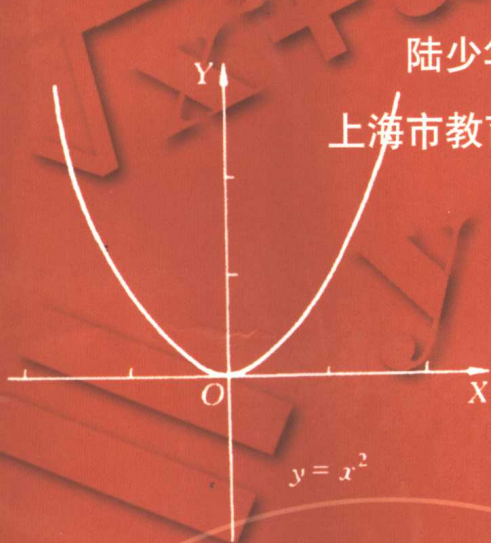


上海普通高校“九五”重点教材

微积分

陆少华 主编

上海市教育委员会组编



上海交通大学出版社

世界银行贷款资助项目
上海市教育委员会组编

微 积 分

陆少华 主编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书系高等院校与经济类相关专业使用的数学基础教材。

全书共分九章,分别为函数,极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,积分,微分方程,空间解析几何,多元函数及级数。本书全面系统地讲述了微积分的基本概念、基本理论与基本方法。每章编排有配套的习题与自测题,书末附有全部计算题的答案。

本书的特点是概念清晰、推理简明、例题丰富、方法实用、习题配套。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/陆少华主编. —上海:上海交通大学出版社, 2000

ISBN 7-313-02446-0

I. 微… II. 陆… III. 微积分-高等学校-教材
IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 24592 号

微积分

陆少华 主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

常熟市印刷二厂印刷 全国新华书店经销

开本:890mm×1240mm 1/32 印张:14.375 字数:412 千字

2000 年 8 月第 1 版 2000 年 8 月第 1 次印刷

印数:1~4250

ISBN 7-313-02446-0/O·120 定价:23.00 元

前 言 (一)

目前数学这门学科已经成为一切科学和技术的基础,即使在管理部门也离不开数学。作为经济数学基础的微积分,更是必不可少的。因此,微积分的教学备受各界关注。

为了适应该课程的教学内容和体系改革的步伐,更好地培养具有创新能力的管理人才,上海交通大学与杉达大学的数学教师,结合多年的教学实践,集中各校的成功经验,编写了这本微积分教材。本书非常重视教学法:在处理一元函数和多元函数微积分时,侧重一元函数微积分;在引入概念时,注意到它们的实际背景;在处理基本理论时,证明方法简明,有独到之处;在处理基本方法时,注意到学生的可接受性,不过分拘泥于技巧性;在例题的选取和习题的安排上,注意到相互配置,便于学生学到基本知识;在每章最后附有自测题,以便学生自己检查基本知识的掌握程度,等等。

本书是参照高等学校财经专业核心课程的教学大纲(本科)编写的。

本书取材适当,理论与应用并重。在内容的安排上对传统的微积分教材内容进行了改革,作了调整和增删,富有新意。本书能满足课程的教学要求,尤其适合高等院校财经类各专业。

本书的出版,对教学改革、提高教学质量定将起到积极的促进作用。

孙薇荣 王嘉善

2000年1月

前 言 (二)

本书编写过程中,遵循以下原则:

(1) 内容标准化、规范化;

(2) 陈述“深入浅出”;

(3) 体系、方法上力求创新;

(4) 学以致用(体现在概念的引入,例题,习题的编排)。

孙薇荣,范荣良,陈慧玉等老师参与了本书的编写工作。孙薇荣,王嘉善教授对全书作了仔细的核对,审核,并提出了宝贵的修改意见。在此表示深深的感谢。

编 者

2000年1月

目 录

第一章 函数	1
1.1 实数	1
1.2 平面直角坐标系	3
1.3 函数及其表示	4
1.4 函数运算与图形变换.....	17
1.5 初等函数.....	24
1.6 函数关系举例.....	32
第二章 极限与连续	39
2.1 数列的极限.....	39
2.2 函数的极限.....	43
2.3 极限的性质.....	46
2.4 无穷小量与无穷大量.....	49
2.5 极限的运算.....	52
2.6 两个常用极限.....	58
2.7 函数的连续性.....	65
第三章 导数与微分	81
3.1 导数的概念.....	81
3.2 求导法则与求导公式.....	91
3.3 高阶导数	107
3.4 微分及其应用	111
第四章 中值定理与导数的应用	124
4.1 微分中值定理	124
4.2 洛必达法则	131
4.3 函数的单调性与极值	138
4.4 曲线的凹向与拐点	144

4.5	函数图形的描绘	148
4.6	函数的最值	154
4.7	导数在经济分析中的应用	161
第五章	积分	174
5.1	定积分的基本概念	174
5.2	定积分的基本性质	179
5.3	微积分基本定理	182
5.4	基本积分法	196
5.5	定积分的应用	208
5.6	广义积分	218
第六章	微分方程	236
6.1	微分方程的基本概念	236
6.2	一阶微分方程	239
6.3	可降阶的二阶微分方程	248
6.4	二阶常系数线性微分方程	253
6.5	差分与差分方程的概念	263
6.6	一阶常系数线性差分方程	269
6.7	二阶常系数线性差分方程	275
第七章	空间解析几何	291
7.1	空间直角坐标系	291
7.2	向量的基本概念	292
7.3	向量的加法与数乘	295
7.4	向量的内积与外积	301
7.5	曲面及其方程	306
7.6	平面及其方程	314
7.7	空间曲线及其方程	318
第八章	多元函数	325
8.1	多元函数的概念	325
8.2	极限与连续	327
8.3	偏导数	329

8.4	全微分	333
8.5	复合函数求导法则	335
8.6	切线与切面	339
8.7	极值与最值	343
8.8	二重积分	353
第九章	无穷级数	372
9.1	常数项级数的概念与性质	372
9.2	正项级数	379
9.3	绝对收敛与条件收敛	388
9.4	幂级数	394
9.5	函数的幂级数展开	403
9.6	幂级数在近似计算中的应用	414
答案	424

第一章 函 数

本章复习与总结“初等数学”中与“微积分”关系密切的函数概念。“微积分”是研究函数关系的一门数学学科,它的研究对象是函数,主要是初等函数。

1.1 实数

1.1.1 数轴

数轴是定义了原点、方向与单位长度的直线。数轴上的每个点表示一个确定的实数:若点 M 与原点的距离为 d ,且点 M 在原点的正向,则 M 表示正实数 d ;若点 M 在原点的负向,与原点距离为 d ,则 M 表示负实数 $-d$;若点 M 与原点重合,则 M 表示数零。这样,就建立了数轴上的点与实数间的一一对应:每个实数可看成数轴上一个确定的点,数轴上每个点代表一个确定的实数。

1.1.2 绝对值

1. 定义

定义 1.1 实数 x 的绝对值 $|x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$

实数作为数轴上的点,它的绝对值等于它到原点的距离。

2. 性质

若 a, x 均为实数,且 $a > 0$,则

$$(1) |x| = \sqrt{x^2} = |-x|;$$

$$(2) |x| \geq 0, \text{ 且 } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(3) -|x| \leq x \leq |x|;$$

$$(4) |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a;$$

$$(5) |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ 或 } x < -a。$$

3. 运算

若 x, y 均为实数, 则

$$(1) |x + y| \leq |x| + |y|;$$

$$(2) |x - y| \geq ||x| - |y||;$$

$$(3) |xy| = |x| \cdot |y|;$$

$$(4) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0。$$

1.1.3 区间

若 R 表示实数集, 当 $a, b \in R$, 且 $a < b$, 定义各类区间如下:

$(a, b) = \{x \in R | a < x < b\}$, 称以 a, b 为端点的开区间;

$[a, b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$, 称以 a, b 为端点的闭区间;

$(a, b] = \{x \in R | a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x \in R | a \leq x < b\}$, 称以 a, b 为端点的半开区间。

以上三类区间为有限区间, 其右端点 b 与左端点 a 的差 $b - a$ 称为区间的长度。

无限区间有以下五类:

$$(a, +\infty) = \{x \in R | x > a\};$$

$$[a, +\infty) = \{x \in R | x \geq a\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \in R | x < b\};$$

$$(-\infty, b] = \{x \in R | x \leq b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = R。$$

1.1.4 邻域

实数集合 $\{x \in R | |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 在数轴上是一个以 x_0 为中

心,长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,称为 x_0 的 δ 邻域, x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径。该邻域是数轴上与 x_0 的距离小于 δ 的点的全体所构成的集合。见图 1.1。

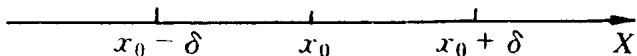


图 1.1

若在 x_0 的 δ 邻域中去掉中心 x_0 ,其余点所成的集合,即 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为以 x_0 为中心, δ 为半径的空心邻域。

例如,以 5 为中心,1 为半径的邻域是开区间 $(4, 6)$;以 2 为中心,1 为半径的空心邻域为 $(1, 2) \cup (2, 3)$ 。

1.2 平面直角坐标系

1.2.1 点关于数轴的坐标

对给出的数轴 T ,平面(或空间)一个点 M 在 T 上有个投影点,即过点 M 的 T 的垂线(或垂面)与 T 的交点,投影点所代表的实数 t 称为点 M 关于数轴 T 的坐标,简称点 M 的 T 坐标。

1.2.2 平面直角坐标系

平面 Π 上两条有公共原点(常记成 O),相同长度单位,相互垂直且成右手系的有序数轴,即第一条数轴绕原点逆时针旋转 90° 成第二条数轴,按序分别将第一条数轴称为 X 轴,第二条数轴称为 Y 轴。这样就建立了平面直角坐标系,简记成 XOY 。

平面直角坐标系 XOY 把平面分成四个象限: X 轴正向与 Y 轴正向间区域称为第 I 象限, X 轴负向与 Y 轴正向间区域称为第 II 象限, X 轴负向与 Y 轴负向间的区域称为第 III 象限, X 轴正向与 Y 轴负向间的区域称为第 IV 象限。见图 1.2。

X 轴常称横轴, Y 轴常称纵轴。点的 X 坐标常称横坐标,点的 Y

坐标常称纵坐标。

1.2.3 点的平面坐标

在平面 Π 上建立了直角坐标系 XOY , 平面 Π 上点 M 的横坐标与纵坐标分别为 x 与 y , 称有序数对 (x, y) 为点 M 的直角坐标, 简称坐标。

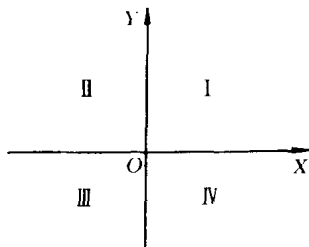


图 1.2

点与其直角坐标的对应是平面 Π 上的点集与实数有序对 $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ 间的一一对应。在这个意义上, 我们常把平面 Π 上的点与其直角坐标等同。称点 $(2, 3)$, 是指直角坐标为 $(2, 3)$ 的点。

若平面 Π 上点 M 的直角坐标为 (x, y) , M 到原点的距离为 r , 则 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; 记 θ 为以 X 轴正向为始边, OM 为终边的角, 称有序数对 (r, θ) 为点 M 的极坐标。

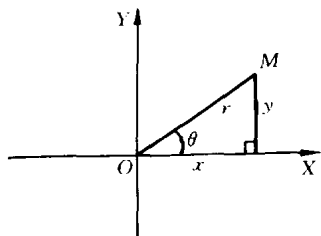


图 1.3

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, & r \geq 0, \\ \tan\theta = \frac{y}{x}, & 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

点与其极坐标的对应是平面 Π 上原点外的点集与有序实数对 $\{(r, \theta) | r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 间的 1-1 对应。

若给了平面 Π 上点 M 的极坐标 (r, θ) , 则 M 的直角坐标 (x, y) 为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

1.3 函数及其表示

1.3.1 函数概念

正方形的面积 S 依赖于边长 a , 把 a 与 S 联系起来的规则是用公

式 $S = a^2$ 给出的。对应于每个正数 a 给出 S 的一个值。这时,我们就说正方形的面积 S 是其边长 a 的一个函数。

某商品单价为 P 元,卖出 Q 件商品所得收益为 $R = PQ$ 。这时,我们说销售收益 R 是销售量 Q 的一个函数。

上述两个例子有一些共同特征:它们都描述了两个变量间的依赖关系,在适当的范围内,每给出一个量 a, Q 时,则另一个量 S, R 就根据各自的规则被确定了。这时,我们把第一个变量 a, Q 称为自变量,把第二个变量 S, R 称为因变量或第一个变量的函数。

下面,给出函数的确切定义:

定义 1.2 设 A 为一个非空的实数集合。如果存在一个对应规则 f ,使得对集合 A 中的每个元素 x ,根据规则 f ,都能确定唯一一个实数 y ,则称这个对应规则 f 为函数,记成

$$y = f(x)。$$

集合 A 为函数 f 的定义域,记成 $D(f)$ 。

数值 $f(x)$ 称为函数 f 在 x 处的值,即函数值。当 x 在定义域 $D(f)$ 中变化时,函数 $f(x)$ 的全体值的集合称为函数 f 的值域,记成 $Z(f)$ 或 Z_f ,即

$$Z(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}。$$

在函数的定义中,自变量与因变量采用什么符号不是关键的,确定一个函数的两个要素是对应规则和定义域。例如函数 $y = f(x)$ 与 $S = f(t)$ 虽然它们的自变量与因变量采用了不同的符号,只要对应规则 f 是同一个,定义域相同,它们就是相同的函数。

实际问题中,函数的定义域由问题的具体含义确定,例如正方形的面积作为边长的函数,其定义域为正实数。如果一个函数是用公式来表示的,并没有明确给出定义域,那么,就按习惯把用此公式可以获得对应函数值的全体实数(即使公式有意义的全体实数)组成的集合为函数的定义域,常称它为函数的自然定义域。

例 1.1 求由下列公式确定的函数的自然定义域:

$$(1) y = \frac{\sqrt{3-2x}}{x+1};$$

$$(2) y = \lg(4 - x^2) + \arcsin(2x - 1);$$

$$(3) y = \sqrt{6 - x - x^2}.$$

解 (1) 表达式中分母不能为零, 于是 $x + 1 \neq 0$, $x \neq -1$; 又负数不能开平方, 故 $3 - 2x \geq 0$, 即 $x \leq \frac{3}{2}$ 。这样, 我们得到函数的自然定义域为

$$x \neq -1 \text{ 且 } x \leq \frac{3}{2}.$$

写成区间形式为

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{3}{2}].$$

(2) 要使表达式中 $\lg(4 - x^2)$ 有意义, 必须 $4 - x^2 > 0$, 即 $x^2 < 4$, $x \in (-2, +2)$ 。

要使表达式中 $\arcsin(2x - 1)$ 有意义, 必须 $|2x - 1| \leq 1$, 即 $x \in [0, 1]$ 。

从而函数的自然定义域为

$$D(f) = (-2, +2) \cap [0, 1] = [0, 1].$$

(3) 因为负数不能在实数范围开平方, 故函数的自然定义域由下列不等式确定:

$$6 - x - x^2 \geq 0$$

或

$$(3 + x)(2 - x) \geq 0.$$

上述不等式的解集为 $[-3, 2]$, 这也是函数的自然定义域。

1.3.2 函数的图形

用图形表示函数关系是最直观的, 随着计算机的普及, 也是最常用的。

定义 1.3 函数 $y = f(x)$ 的图形是有序对 (x, y) 的集合, 或直角坐标平面中的点 (x, y) 的集合:

$$G(f) = \{(x, y) \mid x \in D(f)\}.$$

函数 f 的图形 $G(f)$ 通常是一条平面曲线, 我们常称函数 $y = f(x)$ 的图形 $G(f)$ 为平面曲线 $y = f(x)$, 简称曲线 $y = f(x)$ 。

函数 f 的图形 $G(f)$ 给出了直观的函数形态:

(1) $G(f)$ 上点 (x, y) 在 X 轴上方, 意味着 $y = f(x) > 0$; 在 X 轴下方, 意味着 $y = f(x) < 0$ 。点 (x, y) 到 X 轴的距离为 $|y| = |f(x)|$ (见图 1.4)。

(2) $G(f)$ 在 X 轴上垂直投影点集为 f 的定义域, $G(f)$ 在 Y 轴上垂直投影点集为 f 的值域 (见图 1.5)。

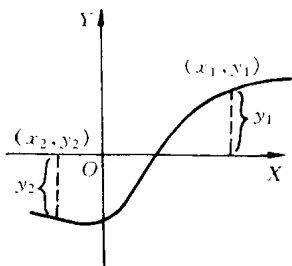


图 1.4

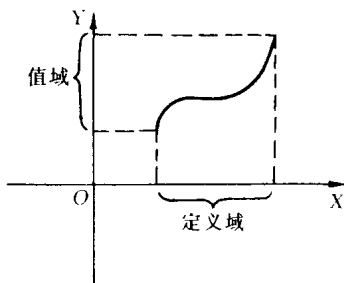


图 1.5

已知函数的定义公式, 可以用描点等方法来作出函数的草图。

例 1.2 用描点法作出下列函数的草图:

(1) $y = 3x + 6$;

(2) $y = x^3$;

(3) $y = \sqrt{x+1}$ 。

解 (1) $y = 3x + 6$ 为一条直线, 不难看出, 点 $(0, 6)$, $(-2, 0)$ 在直线上, 故所求图形为过两点 $(0, 6)$ 与 $(-2, 0)$ 的一条直线 (见图 1.6)。

(2) 计算函数 f 的定义域中一些 x 处的函数值 $f(x)$, 并列于下。

描出这些点, 并用光滑曲线逐段连接它们, 即得函数 $y = x^3$ 的草图 (见图 1.7)。

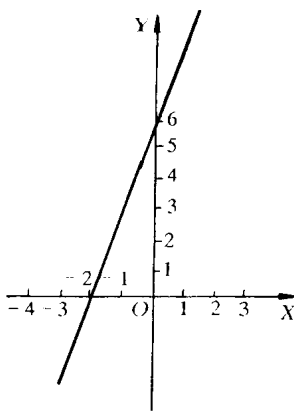


图 1.6

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
x^3	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8
(x, x^3)	(-2, -8)	(-1, -1)	$(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2})$	0	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$	(1, 1)	(2, 8)

(3) $y = \sqrt{x+1}$ 的定义域为 $[-1, +\infty)$, 通过下列表中的数据描点画出草图(见图 1.8)。

x	-1	0	1	3
$\sqrt{x+1}$	0	1	$\sqrt{2}$	2

实际上, 函数 $y = \sqrt{x+1}$ 的图形是抛物线 $x = y^2 - 1$ 的上半部分(见图 1.9)。

函数的图形是 XOY 平面上的一条曲线。但在 XOY 平面上的怎样的曲线才可能是某个函数的图形呢? 这要用下面这个称为“垂直线检测法”的方法来决定。

垂直线检测法: XOY 平面上曲线 G 是函数 $y = f(x)$ 的图形的充要条件是与 X 轴相垂直的直线与曲线 G 的交点不能多于一个。这是因为: 若垂直线 $x = a$ 仅与 G 交于

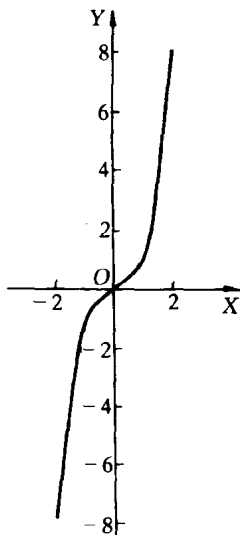


图 1.7

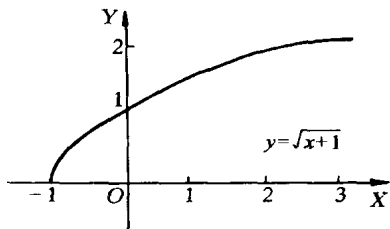


图 1.8

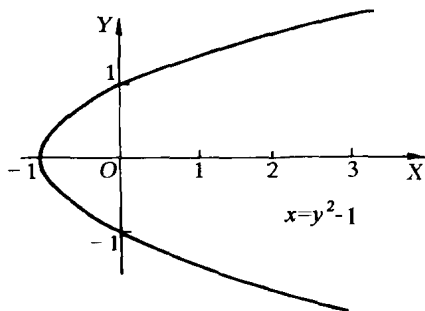


图 1.9

一点 (a, b) , 则就定义了函数值 $b = f(a)$ 。若垂直线 $x = a$ 与 G 有多于一个的交点 $(a, b), (a, c), \dots$, 则 $f(a) = b, f(a) = c, \dots$, 与函数的定义相矛盾。(对应于定义域中自变量的一个值, 函数只有一个确定的值。)

图 1.9 中的抛物线 $x = y^2 - 1$ 就不表示一个函数 $y = f(x)$, 因为当 $a > -1$ 时, 垂直线 $x = a$ 与抛物线有两个交点。不难看出, 抛物线的上半部分与下半部分分别为函数 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 与 $g(x) = -\sqrt{x+1}$ 的图形。

1.3.3 函数的表示法

表示函数关系的常用方法有公式法, 列表法与图示法。

1. 公式法

公式法也称解析法, 就是用解析表达式来表示函数关系的一种方法, 常有显式与隐式两种。

显式的标准形式为 $y = f(x)$, 这里 $f(x)$ 是一个含自变量 x 的解析式, 例如 $y = x^2, y = \sin x$ 等。

隐式的标准形式为 $f(x, y) = 0$, 这里 $f(x, y)$ 是含自变量 x 与因变量 y 的一个解析式, 由 x 的值和 $f(x, y) = 0$ 可确定相应 y 的值, 例如 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ($y \geq 0$)等。

但现实生活中的许多函数关系难于用单个的公式来表示, 例如一天的气温作为时间的函数, 出租车的车费作为行驶距离的函数等。表示这些函数就要用到表格法与图示法。

2. 表格法

例如, 邮件的邮费 C 是重量 W 的函数, 可以用表格来表示。下面的邮件邮资费表就描述了这个函数的对应法则:

邮件重量(g)	[20, 100]	(100, 250]	(250, 500]	(500, 1000]	(1000, 2000]
邮费(元)	7.80	15.70	28.30	46.90	87.80

通过这个表格, 可对重量在 20g 到 2000g 间的每个邮件算出要付的邮费。例如, 重 350g 的邮件可从表中第 3 列(因为 $350 \in (250, 500]$)