教育部高职高专规划教材
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

线性代数训练教程

钱椿林 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育部高职高专规划教材

线性代数训练教程

钱椿林　编

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数训练教程/钱椿林编．—北京：高等教育出版社，2001

教育部高职高专规划教材

ISBN 7－04－009471－1

Ⅰ．线…　Ⅱ．钱…　Ⅲ．线性代数－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 01023 号

线性代数训练教程

钱椿林　编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　　话	010－64054588	**传　　真**	010－64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京市鑫鑫印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2001年5月第1版
印　　张	4.5	**印　　次**	2001年5月第1次印刷
字　　数	100 000	**定　　价**	5.20元

内 容 提 要

本书是教育部高职高专规划教材，是与教育部高职高专规划教材《线性代数》配套的训练教程。出版本书的目的，是为了帮助读者在学习线性代数时，更好地掌握有关的基本概念、基本理论和基本方法。本书还力求对线性代数中的一些重点、难点给出进一步的说明，以期开拓读者视野，培养和提高读者灵活运用线性代数的知识分析问题和解决问题的能力。

本书共分四章，包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型，每章都给出了相应的教学要求、主要内容、主要解题方法和自测题。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院工科各专业线性代数课程的训练教材，也可供讲授线性代数的教师参考。

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下，各地已出版了一批高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了"教育部高职高专规划教材"编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批"教育部高职高专规划教材"。

"教育部高职高专规划教材"计划出版500种，用5年左右时间完成。出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程。计划先用2～3年的时间，在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专教育教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

"教育部高职高专规划教材"是按照《基本要求》和《培养规格》的要求，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成

的，适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2000年4月3日

前　　言

本书是教育部高职高专规划教材，是与教育部高职高专规划教材《线性代数》配套的训练教程。

本书在编排格式和包括例题在内的内容安排上都作了精心的设计，以求密切配合主教材训练和培养学生，使其达到教学要求。在内容上，本书着重介绍解题思路和解题方法，如针对不同类型的问题介绍不同的方法，说明解题的思维步骤等等，以培养和提高学生分析问题和解决问题的能力。

本教程是以主教材中的每一章为一训练单元，共四个单元，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型等。每一训练单元由以下几部分组成：

1．教学要求

列出本章中要求了解、理解、掌握的内容，并指出本章的重点和难点，使学生能抓住重点进行训练。

2．主要内容

按主教材的内容顺序，列出本章的基本概念，着重指出易混淆的概念；列出本章的基本理论和主要定理，以便学生在解题中加以运用。在该部分还对教材所涉及的主要理论系统进行归纳和整理，使学生对其有较全面的了解和认识。

3．主要解题方法

主要介绍最基本的解题方法，同时介绍一些常用的技巧和计算方法，以便学生熟练掌握本课程的中心内容。另外，在该部分还提出一些思考问题，倡导一题多解，从多方面训练和培养学生解决有关线性问题的能力。

4．自测题

通过训练后的测试，可以帮助自己了解对本章主要内容和主要解题方法理解和掌握的程度，起到自我检查的作用，便于自学。

本书由北华大学杜忠复教授主审。

高等教育出版社的编辑为本书的编写出版付出了大量的时间和精力，在此表示衷心的感谢！

我们希望本书能有助于初学线性代数的读者加深对教材内容的理解，尽快掌握基本的解题方法，提高分析问题和解决问题的能力。想必在书中不妥或错误之处仍会存在，诚恳地希望各方面专家学者和广大师生及时给予批评指正。

编　者

2000 年 8 月于苏州

目　录

第1章 行 列 式

1.1 教学要求

1. 了解 n 阶行列式的递归定义,余子式与代数余子式的概念及其性质.

2. 理解行列式的性质,掌握利用行列式的性质计算行列式的方法(以计算四阶行列式为主).

3. 了解克拉默(Cramer) 法则的条件、结论.

重点:利用行列式的性质计算行列式.

1.2 主要内容

1.2.1 二阶行列式

规定:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.2.1)$$

(1.2.1) 式称为二阶行列式,其中的数 a_{ij}($i = 1,2;j = 1,2$) 称为该行列式的元,每个横排称为行列式的行,每个竖排称为行列式的列.此时,a_{ij} 的第1个下标 i 表示它位于自上而下的第 i 行,第2个下标 j 表示它位于从左到右的第 j 列,即 a_{ij} 是位于行列式第 i 行与第 j 列相交处的一个元.

利用二阶行列式,解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

若分别记

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

则当 $\Delta \neq 0$ 时，易验证(1.2.2)式的解为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

(1.2.1)式中等号右边的式子又称为二阶行列式 Δ 的展开式.

1.2.2 三阶行列式

三阶行列式的展开式规定为

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ &\quad (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &\quad a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ &\quad a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

利用三阶行列式的展开式，可以把三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的解表示为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

1.2.3 *n* 阶行列式

将 n^2 个元(数或字母等)按一定的顺序排成 n 行 n 列(横的称行，竖的称列)，并在左、右两边各加一竖线的算式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.2.3}$$

称为 n 阶行列式，它表示一个由确定的运算关系所得到的数或代数式. 称 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,n)$ 为行列式 D 的第 i 行第 j 列的元.

1.2.4 余子式 M_{ij}

在(1.2.3)式中，划去元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，其他的元

按原顺序构成的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij}，称为元 a_{ij} 的余子式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2.5 代数余子式 A_{ij}

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称为元 a_{ij} 的代数余子式.

1.2.6 n 阶行列式的展开式

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

称为 n 阶行列式按第一行展开，即 n 阶行列式的展开式. 它是由此行列式的第一行的所有元与其相应的代数余子式的乘积相加而得.

1.2.7 转置行列式

将行列式 D 的行、列互换后，得到的新的行列式 D^{T} 称为 D 的转置行列式. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{则有 } D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2.8 对角行列式

只在对角线上有非零元的行列式称为对角行列式. 即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

1.2.9 上三角形行列式

主对角线(从左上角到右下角这条对角线)下方的元全为零的行列式称为上三角形行列式.即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

1.2.10 下三角形行列式

主对角线上方的元全为零的行列式称为下三角形行列式.即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D^{\mathrm{T}} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

由此可见,上、下三角形行列式都等于主对角线上元的乘积.

若一个 n 阶行列式能通过变换可化为上(下)三角形行列式,则计算它将是很容易的.

在行列式计算中经常使用的一个重要公式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1s} & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{ts} & b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix} \tag{1.2.4}$$

1.2.11 行列式的性质

性质 1　行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等,即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式的值改变符号.

由性质 2 可得出:如果行列式有两行(列)的对应元相同,则这个行列式为零.

性质 3　n 阶行列式等于任意一行(列)的所有元与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$\begin{aligned} D_n &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \\ D_n &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

性质 3 说明了行列式可按任一行或一列展开.一般来说,如果行列式的某一行或某一列中零元较多,则按该行或该列来计算行列式会简便一些.

性质 4　n 阶行列式中任意一行(列)的所有元与另一行(列)相应元的代数余子式的乘积之和等于零.即当 $i \neq k$ 时,有

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0$$

由性质 3 和性质 4,可得到如下结论:

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} D_n, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases}$$

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = \begin{cases} D_n, s = j \\ 0, s \neq j \end{cases}$$

性质 5　将行列式某一行(列)中的所有元都乘以同一数 λ,等于以数 λ 乘此行列式.

由性质 5 可得如下的两个结论:

(1) 行列式某一行(列)中的所有元的公因子可以提到行列式符号的外面.

(2) 行列式中如果有两行(列)元对应成比例,则此行列式为零.

性质 6　如果行列式中某一行(列)的所有元可写成两组数的和,则此行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的这一行(列)分别是第一组数和第二组数,而且其余的元与原来行列式的相应各行的元相同.

性质 7　将行列式某一行(列)的各元都乘以同一个常数后,再加到另一行(列)的对应元上,行列式的值不变.

性质 7 非常重要,且用处很大,但在做题时最容易发生错误,应特别引起重视.例如:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{①-②\\①-③\\①-④}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

此题是用性质 7 来进行计算的,但性质 7 是说:将行列式的某一行(列)的元都乘以同一个常数后,再加到另一行(列)的对应元上,

其值不变.即变换后的行列式,乘数的那一行应保持不变,而被加的一行随之改变.上面的计算却正好相反,这样符号就相反了,一共计算了 3 次,相差 3 个负号,再就是在降阶时只注意了将元提出来,而忽略了代数余子式的符号,这样又差一个符号,前后共差 4 个负号,使最后结果凑巧正确了,但运算过程是错误的.

所以用性质 7 来进行计算时,为了避免错误,应尽可能始终作加法,这样可避免因用减法而容易忽视的错误.另外,代数余子式前面有符号的,一定要记住,不能漏掉.

今后在行列式计算中,用记号"ⓘ · λ"表示将第 i 行(列)乘以 λ;"(ⓘ, ⓙ)"表示将第 i 行(列)与第 j 行(列)交换;"ⓚ + ⓘ · λ"表示将第 i 行(列)乘以 λ 后加到第 k 行(列)上.并把对行的变换写在等号上方,把对列的变换写在等号下方.

1.2.12 克拉默法则

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.2.5}$$

定理 1(克拉默法则) 如果线性方程组(1.2.5)的系数行列式不等于零,即

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么线性方程组(1.2.5)一定有惟一解,其解为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$