綫性規划概论

A. 查恩斯　W.W. 庫伯　A. 汉特逊 著

科学出版社

綫性規划概论

A. 查恩斯　W.W. 庫伯　A. 汉特逊 著

林自新等譯

許国志校

科学出版社

A. CHARNES W.W.COOPER A. HENDERSON

AN INTRODUCTION TO LINEAR PROGRAMMING

John Wiley & Sons, Inc.

1953

內 容 簡 介

这本小册子是資本主义国家最早出版的一本綫性規划方面的专門书籍，由綫性規划的初期工作者，美国卡內基工业大学的三位教授庫伯（W. W. Cooper），汉特遜（A. Henderson）和查恩斯（A. Charnes）所編。此书詳細敘述了綫性規划問題的一种解法——单純形方法，并附以有关的数学知識。

其中第一部分，由經济問題引入綫性規划中举了一些实例与一些經济观点。这些实例和經济观点本身在我国并无意义，但对讀者了解綫性規划应用的范围及性质是有所帮助的。

本书适合大专学生、工程师与經济工作者閱讀。

綫性規划概论

A.查恩斯 W.W.庫伯 A.汉特遜著

林 自 新 等 譯

許 国 志 校

科 学 出 版 社 出 版（北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

1959 年 10 月第 一 版　　书号：1883 字数：88,000

1959 年 10 月第一次印刷　　开本：850×1168 1/32

（京）0001—7,500　　印张：3 1/2

定价：0.53 元

序

这本讲稿原是一个研究討論班的一部分結果，討論班的經費来源部分是美国空軍部拨給卡內基工业大学的研究經費，这笔研究經費是給該校工业管理学院进行研究厂矿內部行为，和給数学系进行应用数学研究之用的．这些讲稿是为了在某专門杂誌上发表而安排的．可是，当材料齐集了以后，似乎值得找一个更滿意的出路．目的是尽可能快地出版一本廉价的书，供对此有兴趣的各方面的人閱讀，如：应用的和理論的經济学家；工程师；应用統計学家；数学家及与商业和工业企业有联系的人．

这本书分两大部分，第一部分是引論，第二部分是数学的推演．虽然，这么一来，叙述要拖长；但由于它要为各种不同兴趣的人服务，因此这样地来給人們指出这門学科的发展方向，似乎是比較合适的．如果讀者只想对綫性規划的性質得到一些概念，应該讀第一部分的 §§ 1，2，可能的話，再看 § 11，而其它各章可以忽略或依自己的兴趣粗略地讀一下．对实际应用和直接进行規划計算工作有兴趣的人，应該加上 §§ 3，4，5，6，此外还应該試着仔細地复核书中一些作为例題的計算过程．§§ 7，8，9，10 处理了較高深、較困难的材料．这些材料原来就是为了那些希望对綫性規划有較多了解的人而列入本书的，这些材料都和理論經济学中的其它領域有关．

有志于研究綫性規划的，不論是一般理論抑或特殊方面的充分一般性和系統的发展，都該閱讀本书第二部分的数学讲义．讀这讲义所需要的数学基础是极少的．讲义中許多地方，补充了数学的不同領域中与綫性規划有关的材料，以免讀者費时去找其它材料．数学的推演是这样設計的，使得几何的解释可以毫不矛盾地用作引向分析推演的直观基础．这样的推演必然要假定讀者有相当的数学素养．具有一定数学素养的人，会在讀到数学讲义时

觉得最适合他們的兴趣. 其他的人也会发現，这个講义对于比較清楚地理解綫性規划理論是有帮助的. 因此，为了方便地指出数学推演的方向，在本书的第一部分中，有几个地方提到第二部分数学講义中的內容.

为了引导进一步研究，后面附有参考文献. 注意本书中的处理方法和其它規划文献中处理方法的不同，是有好处的，譬如参考书[4]，用的是"活动分析法"(activity analysis). 在活动分析法中，要費很大的努力作分类工作. 如果在开始时就化功夫作这个工作，那末解释結果的問題就簡单化了. 不过，在应用时，我們发現活动分析法不方便、不自然. 它常"約束"(forcing)着問題，或使得有些重要方面因不易塡入已准备好的框架而漏掉. 总的来說，直率地去接近每一个問題；根据資料的要求自然地列出模型和計算步驟，似乎比較好些. 这就是本书所用的方法. 本书和其它規划文献在术語上的某些差别，就是所用方法不同的結果. "清除活动"(disposal activities) 和"伪变量"(pseudo variables) 这两个术語原来是将綫性規划方法应用于一个經济体系的模型或軍事后勤問題时产生的，本书不再用这二个名詞，而用"松弛向量"(slack vectors) 和"松弛变量"(slack variables) 来代替，后二个名詞似乎在大多数的应用問題中有較大的启发性.

硬果混合問題提供了較作者所能提出的任何数值例子为好的例解資料. 它的优点不仅在乎簡单，而且各个系数都是很自然地从問題中引出. 这就減少了解释所举例子的社会制度和工程技术的基础情况的必要性，这些解释需要冗长的說明，且将削弱讀者的兴趣. 我們希望以后另編一本书，专講这些方法在工业、經济和工程問題上的若干具体的应用.

这本书是尝試性的. 我們希望讀者們能愉快地体驗到在綫性規划的試驗中所提供的惊人远景，这即使是在象硬果混合这样簡单的問題的試驗中，也能体驗到的. 欢迎評論、建議或批評.

A. 查恩斯　W. W. 庫伯　A. 漢特遜

于卡內基工业大学

目　　录

第一部分

由經济問題引入綫性規划[1)]

§1. 引　　言

在近几年中，有一类技术获得了很大的发展，它有下列各种名称：投入-出产分析；綫性規划及相关活动的規划[2)]．更确切地說，为了強調我們的兴趣主要是在如何制訂計划，而不是在执行或实施計划，我們可以把这些有关的学問所形成的整个領域称为"規划"；在着重于极大化或极小化問題时，我們还可用最优規划这个名称．簡单說来，綫性規划所考慮的問題是如何按最好可能（最优）的方式来計划一个各种互相关联的活动的集合体．在已給定的买价和卖价，及机器的生产力和工作潛力下，确定混合各种产品的最优方法問題；貨物的最优庫存、运輸和分配問題；在車間的运轉中，如何使启动时間最短的問題以及劳动力的最优配置問題等都是这类技术的用武之地．

通过各种規划的方法，为理論性的和經驗性的研究工作提供

---

1) 对于第一部分的編写，查恩斯（Charnes）教授曾經提供了宝貴的意見和帮助．这一部分中所大胆使用的許多解释，是在他的密切合作下作出的．唐納尔德·法（Donald Farr）先生和参加方法工程会議（Methods Engineering Council）的許多成員——葛尔弗（Gulf）石油公司的鮑勃·麦隆（Bob Mellon）先生；多倫多（Toronto）的虎德（W. C. Hood）教授和卡內基工业大学的西蒙（H. A. Simon）教授，在这个手稿写作的各个阶段中，都提供了有益的意見．

2) 最后的一个名称是由武德（Wood）和但捷格（Dantzig）在[4]中提出的（同时参看庫普曼斯（Koopmans）的討論[4]），其目的是为了避免"綫性"这个字的限制性的含义．因为无論在概念上和在实际上，这个技术可以包括比严格的綫性型更广的范围．而且，在理論上和实际上現在都有直接处理非綫性問題的方法．参看 Kuhn 和 Tucker [8] 和 Wood [4]．現在这本书只講綫性規划．

了一套有力而又富于适应性的工具．而且，由于这些工具可以用于解决多种的实际問題，所以它們还为扩大經济学的范围提供了一种办法．事实上，到目前为止，許多美国政府机构对这类实际应用的兴趣，正是这类技术获得发展的主要动力．美国的空軍部、联邦預算局和劳动統計局就曾联合主持了这个領域中的許多研究工作．在引起这些机构注意的問題中，有一些也就是經济学家原来感觉兴趣的問題．整个国民經济范围內的就业和动員規划就可以代表这一类型的問題．但是这些政府机构的有关人員也积极探索把这类技术应用到其它領域[1]去的可能性，譬如軍事战斗和后勤人員选择和安排以及运輸計划等．誠然，查恩斯的講演（即本书的第二部分；本书的第一部分是作为第二部分的引論）就是探索把这套技术应用于企业內部分析問題的可能性的系統研究的一部分．

用綫性近似法作为解决重要問題的一种方法，在經济学上如同在自然科学上（包括数学）一样，有着光輝的历史．經济学上，在奎斯奈（Quesnay）的"經济表"（tableau économique）中，在华尔拉斯（Walras）和卡賽尔（Cassel）的一般平衡系統中，以及更近的李昂鉄夫（Leontief）的投入-出产分析中，都可以找到它的应用．在数学工作中，对于綫性規划的解析基础的发展具有特殊重要意义的是 Weyl [6] 和 Von Neumann [12,13,6][2]（及其他数学家）的工作．但捷格对这类問題的一般性的表达法和对"单純形方法"这一計算技术的发展，对早期理論工作之能应用于解决实际問題起着枢紐性的作用．但捷格，奥尔登（Orden），查恩斯和其他人进一步发展了单純形技术，使得这个方法能普遍应用于任何类型的綫性規划問題．这个方法是机械而又很簡单的．可以用手算，也可以用机器算，因此不一定要用代价高昂的快速計算机来計算．只要和最小二乘方或相关系数所需的計算相比較，就可以体会它的簡便性．和相关系数所需要的計算相比較，規划中的計算虽然可能

1) 参看 Koopmans [4] 和美国空軍部研究計划 SCOOP [9].

2) 参看 Koopmans [4]，特别是其中但捷格和盖尔（Gale），以及庫恩（Kuhn）和塔克（Tucker）关于策略論与規划之間的关系的文章．

比較緩慢，但是比較簡单．因为它所需要用到的运算沒有比加、減、乘、除更复杂的．在規划中（如同在統計学中），虽然如何选择和构成問題是一門艺术，但其它的手續都已經由于这些数学家所发展的方法而簡化为簡单的机械的运算了．

虽然，如查恩斯所指出的，还有其它的計算法和各种捷径可以采用；但是，根据刚才提到的理由，我們在第一部分中最好还是把討論限制在单純形方法．这一部分的目的既不是揭露規划問題的全部領域，也不是叙述这方面的新的材料．它的主要目的是尽可能簡单地举例解释第二部分查恩斯講稿中的一些比較重要的內容．

§2. 綫性規划：一个例子

在这一章中将闡明一个比較簡单的例子，使讀者可以比較仔細地、具体地逐步領会，如何构成数学模型和如何进行計算．所选的例子是有意把它簡化的．它是可以用别的更簡单的方法来解的．这样做的好处就是使得讀者，如果愿意，可以用其它的方法来核对所得到的答案．

問題是这样的：一个制造商要选定一个按照表1[1]所列举的規格和价格来混合三种等級的由漆树子、榛子和花生混合起来的果品的最优規划．只要满足了下列的規格，混合物品中榛子的数量可以是任意的．

表 1

混合物品	規格	售价（分/磅）
A	漆树子不少于 50% 花生不超过 25%	50
B	漆树子不少于 25% 花生不超过 50%	35
D	不限規格	25

1) 这里提出的問題是从葛尔弗（Gulf）公司研究所的魏恩柏哥（E. B. Weinberger）向作者提出的一个类似問題中引导出来的．

如果以符号C代表漆树子；H代表榛子；P代表花生．那么，可出售的混合物品的限制可以写成下列数学的形式：

$$A_C \geqslant \frac{1}{2}A, \quad A_P \leqslant \frac{1}{4}A, \quad B_C \geqslant \frac{1}{4}B, \quad B_P \leqslant \frac{1}{2}B, \tag{1}$$

这里

$$A_C + A_P + A_H = A,$$
$$B_C + B_P + B_H = B.$$

开头的四个不等式表明对混合物品A和B的限制．无論所生产的A的数量是多少，在A中所包含的漆树子的数量A_C至少应是总量(指重量)的一半，而所含的花生的数量A_P则不得超过四分之一．对于B有着类似的限制，但对于D则沒有限制．因为混合物品D只是作为剩余品而出现的，也就談不上什么限制了．在这一組不等式里沒有出現榛子，因为对这种硬果沒有什么限制．只要混合物品满足了关于漆树子和花生的規格，榛子可以是与之相应的任何数量．

第二組等式表現确定的关系：投入品的重量必須等于出产品的重量．当然，在选定最后的規划时，其中有些数量可以是零．但是，全部产品A必須由所用的漆树子A_C，花生A_P和榛子A_H混合而成．

将这些确定的关系代入第一組不等式的右端，并在必要时乘以-1，使所有的不等号指向同一的方向，則不等式組(1)可以簡化成：

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{2}A_C + \frac{1}{2}A_P + \frac{1}{2}A_H &\leqslant 0, \\
-\frac{1}{4}A_C + \frac{3}{4}A_P - \frac{1}{4}A_H &\leqslant 0, \\
-\frac{3}{4}B_C + \frac{1}{4}B_P + \frac{1}{4}B_H &\leqslant 0, \\
-\frac{1}{2}B_C + \frac{1}{2}B_P - \frac{1}{2}B_H &\leqslant 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

現在，假設制造商所能使用的各种投入品有着一定数量上的限制．投入品的这些限制和价格如表2所示：

表 2

投入品	潛容量（磅/日）	价格（分/磅）
C	100	65
P	100	25
H	60	35
总数	260	

在以数学式子表示它們以前，需要仔細地解釋清楚这些項目．如果“潛容量”是表示每一种硬果的最大限額，則这些条件可以写成：

$$\left.\begin{aligned} C &= A_C + B_C + D_C \leqslant 100, \\ P &= A_P + B_P + D_P \leqslant 100, \\ H &= A_H + B_H + D_H \leqslant 60. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

換一句話，加到 A，B 和 D 中的漆树子总量 C 不能超过 100 磅；对于花生有同样的限制；而榛子的总量則不能超过 60 磅．如果我們关心的只是我們經营的各种硬果的总潛容量，260 磅，則上述的三个不等式可以用下列单独的一个不等式来代替：

$$A_C + B_C + D_C + A_P + B_P + D_P + A_H + B_H + D_H \leqslant 260.$$

无論从常識或从数学的角度来看：都知道单一的数量限制不如同时有三个限制来得严格．混淆这两种不同类型的限制，則可能：1)当所要求的是三个限制，而代之以一个单一的全面的限制时，使答案成为沒有意义；2)或是当所要求的仅仅是一个一般的限制，而代之以三个限制时，便失掉了一些获利的可能性．

規划中所用的数学，如同在别处一样，是一种精确的工具，必須审愼地使用．将表 2 中所列举的条件作另一种可能的解释，就更使人明白必須审愼从事了．这些潛容量可以解释为准确的限制，而用等号代替了不等号来写成：

$$\begin{aligned} A_C + B_C + D_C &= 100, \\ A_P + B_P + D_P &= 100, \\ A_H + B_H + D_H &= 60. \end{aligned}$$

这样就取消了不等式所允許的"松弛"．这些表示式的不同引起了意义的变化，如果选用后面一組等式，則投入品的价格就变成无关紧要的了．这些等式要求所使用的投入品是准确規定了的数量，因此原料就从变数轉为固定的因素了．这样的情况是可以有的，例如，根据合同規定，制造商每天必須交給市場固定数量的各种硬果[1]．

这里我們采用(3)式所提出的解释．但是在进行下一步之前，需要变换一下符号．直到現在所用的符号，对于目前的問題，虽然便于記忆，但是太麻煩，要把它推广就困难了．我們引用的符号不仅要具有一般性，并且还应該与一般規划問題文献中所通用的符号[2]相类似．

让我們来回忆一下，我們所要解决的問題是要确定下列若干变数的值：每一种硬果的購买量和它們用于各种混合物品中的数量．这些变数可以用 λ_{ij} 来表示，下标是表示投入品和出产品的关系，即用到第 i 类出产品中的第 j 类投入品．在不会发生混淆的情况下，这种双下标可以改为单下标，这就是我們这里将采用的办法．符号表(表 3)清楚地說明了这些符号的意义．

表 3 中的符号所代表的意义是：λ_1 代表进入 A 中的 C 的数量(有待决定的)；λ_4 代表进入 B 中的 C 的数量；λ_2 代表进入 A 中的 P 的数量；等等．

表 3

产品 \ 原料	C	P	H
A	λ_1	λ_2	λ_3
B	λ_4	λ_5	λ_6
D	λ_7	λ_8	λ_9

1) 注意：如果按照合同，制造商可以将未混合的硬果照买价卖出，則仍可以采用限制(3)．

2) 参看 Koopmans [4]，特别是其中但捷格，武德等的文章．这个符号大概是但捷格提出的，是現在常用的一种符号．

使用上列新的符号，并将(2)式和(3)式联立，得到下列一組关系：

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_3&\leqslant 0,\\
-\frac{1}{4}\lambda_1+\frac{3}{4}\lambda_2-\frac{1}{4}\lambda_3&\leqslant 0,\\
-\frac{3}{4}\lambda_4+\frac{1}{4}\lambda_5+\frac{1}{4}\lambda_6&\leqslant 0,\\
-\frac{1}{2}\lambda_4+\frac{1}{2}\lambda_5-\frac{1}{2}\lambda_6&\leqslant 0,\\
\lambda_1+\lambda_4+\lambda_7&\leqslant 100,\\
\lambda_2+\lambda_5+\lambda_8&\leqslant 100,\\
\lambda_3+\lambda_6+\lambda_9&\leqslant 60.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

这一組包含9个未知数的7个不等式代表一組需要滿足的要求. 換句話說，需要确定的各个 λ 的值在代入这些不等式时，不能与这些不等式所說明的条件相抵触. 一般地說，在各种規划問題中都有三个不同方面的情况有待考虑：i)如(4)式中那些 λ 的系数所表示的一套已給定的技术情况；ii) 一組特定的要求或詳細的目标，如在 (4) 式右边所列的，它們对可能采取的解答給予一定的限制范围；iii) 一个作为选择各种可能的規划所依据的一般判别准則，譬如利潤函数. 对于目前的問題，i)是由市場习惯所規定的硬果混合的方法(混合各种硬果的百分比)来表示；ii) 是由每种硬果使用量的限額来表示；最后 iii)将由一个利潤函数 (見(7)式) 来給定，規划的目的是要求得它的最大值. 在其它問題中，可以有不同的解释. 在李昂鉄夫型的分析中，規划的目标就是充分就业和各种主要工业的特定的生产水平等等是放在右边的. 在左边，是根据过去各种工业間 (购买、銷售和运輸) 的生产关系研究出来的由經驗决定的技术系数. 但是沒有規定一个判别函数，这是因为至少在靜态的陈述中，李昂鉄夫模型是一个严格的决定性的模型. 于是，規划問題是要求决定出 a)結构和目标 (或要求) 的协調性；b)为完成既定目标所必要的規划組成(各項活动水平). 按照大部

分规划文献的习惯，(4)式的右边可以看作为要求向量.

这里要明确說明为了使答案有經济意义所必需的另一組要求. 使变数为負值的答案，卽使能滿足关系(4)，也是不允許的. 这个限制也取消了負生产(从出产品中取出投入品)的可能性. 这个不能是負值的要求的数学表現式可以写成：

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, 9. \tag{5}$$

零产量是允許的，但不允許有負产量，λ_i 限制为非負值.

在每个关系式中引进一个新的非負的未知数，不等式組(4)就可以变为一个等式組：

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 + \lambda_{10} &= 0,\\
-\frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{3}{4}\lambda_2 - \frac{1}{4}\lambda_3 + \lambda_{11} &= 0,\\
-\frac{3}{4}\lambda_4 + \frac{1}{4}\lambda_5 + \frac{1}{4}\lambda_6 + \lambda_{12} &= 0,\\
-\frac{1}{2}\lambda_4 + \frac{1}{2}\lambda_5 - \frac{1}{2}\lambda_6 + \lambda_{13} &= 0,\\
\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_7 + \lambda_{14} &= 100,\\
\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_8 + \lambda_{15} &= 100,\\
\lambda_3 + \lambda_6 + \lambda_9 + \lambda_{16} &= 60.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

所引进的 λ_i $(i = 10, 11, \cdots, 16)$ 可以看作是"松弛变数". 在本問題中，它們表示超額滿足所規定的要求，或沒有完全利用可用的份量. 因此，如果在最后答案中，λ_{10} 的值大于 0，则加到混合物品 A 中的漆树子超过最低要求 50% 是最有利的. λ_{11}，λ_{12} 和 λ_{13} 有类似的意义. 如果在最后答案中 λ_{14}，λ_{15} 或 $\lambda_{16} > 0$，就是希望将这些可用的份量留下不用. 表示松弛变数也不能是負数的要求只要扩展一下(5)式的下标的范围就可以了，使 $i = 1, 2, \cdots, 16$.

这样就是要从(6)式所列的七个关系式解出 16 个同时滿足(5)式的未知数. 一般講，这样一組关系可以产生无限个解答. 我們要求从这些无限个解答中选择对于某些准則或准則組最适合的

$\lambda_i \geqslant 0$. 这样的准则在本問題中，就是考虑純收益的問題[1]. 参照表 1 和表 2 中所列举的价格和表 3 的符号，可以建立如下的(綫性)汎函:

$$z = 50(\overbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}^{A}) + 35(\overbrace{\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6}^{B}) + 25(\overbrace{\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9}^{D}) - $$
$$- 65(\underbrace{\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_7}_{C}) - 25(\underbrace{\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_8}_{P}) - 35(\underbrace{\lambda_3 + \lambda_6 + \lambda_9}_{H}) \quad (7)$$

或

$$z = -15\lambda_1 + 25\lambda_2 + 15\lambda_3 - 30\lambda_4 + 10\lambda_5 +$$
$$+ 0\lambda_6 - 40\lambda_7 + 0\lambda_8 - 10\lambda_9.$$

显然，(綫性) 汎函 z 仅是混合物品 A, B, D 的总收入减去所用硬果 C, P, H 的可变成本的表現式，其单位是分/磅.

如要完整地叙述上列汎函，那就需要把松弛变数 λ_i ($i = 10, 11, \cdots, 16$) 引入(7)式的右边. 为了簡洁起見，这些变数沒有写出来. 引入这些松弛变数須是零价格的，因此就不需要把它写到汎函中去. 超額滿足最低的要求或可用的分量利用不足的結果，既不增加收入，也不增加成本[2]. 我們所尋求的就是这个汎函的一个最大值. 这就是，要寻求一組 λ 的值，使得要求 (5) 和 (6) 得到滿足，并使得

$$z = f(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{16}) = \max. \quad (8)$$

現在应該再把上列問題的要点重述一遍，借以指出我們討論的这个特殊問題可以放在綫性規划的范围之內. 和第二部分 §3 中的(1)及其有关的討論相比較，显示出上述硬果混合問題之成为綫性規划問題的主要面貌已經有了充分的叙述[3]. 这里的方程組(6)和第二部分 §3 的方程(1)是同样形式的，除了: a)有待决定的变数的数目，这里是限制在 λ_i, $i=1,2,\cdots,16$; b)一个特定的常数組

1) 为了确定利潤，汎函中应减去固定成本.

2) 除非是在可变或机会价格的意义上，亦即由于非最优規划而拋棄利益. 后面可以看到，单純形方法为計算这些价格提供了方便的办法.

3) 以后均以括弧中的罗馬字数目表示所要参考的查恩斯講义的第几节. 如 (III) 指查恩斯講义的 § 3.

代替了那里的比較普遍的 a_{ij}. 因此,那里的第一列常数 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}$, 在这里是代以特定的数值 $a_{11} = -1/2$, $a_{21} = -1/4$, $a_{31} = 0$, $a_{41} = 0$, $a_{51} = 1$, 等等. 对于这些关系式右边的分量 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 构成的列可以类推. 我們的非負要求(5)和那里的要求形式也一样[1];在目前的問題中 $n = 16$. 从(8)式可以看出,我們有兴趣的是查恩斯的普遍綫性汎函 f 的一种特殊情况. 在現在研究的特殊問題中,我們的目标是要求最大値,但是象查恩斯所提示的,在一般綫性規划問題中,对汎函的要求可以是求最大値或最小値.

为了簡化起見,使符号 P_i 代表第 i 列的常数,幷作如下規定:用一个純数量(或实数)乘 P_i, 其含义是指用該数乘該列中的每一个分量. 于是

$$\lambda_1 P_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{2} \\ -\frac{\lambda_1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

每一个 P_i 都是一个列向量,而 P_1 (含有上面括弧中列举的分量)是第一列向量(也可以选择行的分量,这样就規定了行向量. 行向量和一个純数量相乘也要依照同样的規則:行中的每一个分量被純数量所乘). 最后,这类向量的加法是可以互换的,即,

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \lambda_2 P_2 + \lambda_1 P_1. \tag{10}$$

下面从表 4 到表 5 的各列之間的交换,就是根据这个互换定律. 因此互换性是表示方程組(例如(6)式)中所列举的变数的順序是可以任意互换的.

---

1) 每一个 P_i 的分量,可以看作是向量分量,或空間中一点的坐标. 参看查恩斯(I). 就是說,"点"或是"向量"的解释都可以用. 利用"位置向量"的概念——一个以原点为起点的、确定空間一点的位置的有向射綫,可以代替前述两种概念.

使用了这种符号和附带的規定，就可能将綫性规划問題叙述为下列簡洁的形式：求一組 λ 的值，使綫性汎函

$$f(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i, \quad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \tag{11}$$

取最大值(或最小值)，并且滿足

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = P_0 \quad 和 \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{12}$$

这恰恰就是第二部分 §5 中的方程(7)和(8)．显然，在硬果問題中，P_0 是(6)式中数値組的要求向量，而 c_i 是 (7) 式中的淨单位价格 (分/磅)．因此，象先前所提到的，綫性规划是根据一組限制的集合体，去确定各种相互联系的經济活动的最优計划．活动和限制表現为 (12) 式，而評判最优性的准則則是总結于以不同的 λ_i 代入(11)式所得到的数値．

§3. 利用单純形方法的規划計算

在綜述了这个問題之后，現在可以对方程組(6)中的各个常数加以分析，并把它們排列成更有系統的形式．这样就是表 4 中的矩陣．矩陣中的数値和方程組 (6) 中出現的常数相对应．每个数値有系統地列在它的适当位置．矩陣中的空白代表零．現在設想：对应于表 4 頂上一行中的每一个 P_i 有一个 λ_i．如果，每一个 λ_i 被

表 4

結构向量									松弛向量							要求向量
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}	P_0
$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							1							
$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$								1						
			$\frac{-3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$						1					
			$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$							1				
1			1			1							1			100
	1			1			1							1		100
		1			1			1							1	60