拓扑空间概论

關肇直 编著

科学出版社

拓撲空間概論

關肇直 編著

科學出版社

1958

內 容 提 要

本書是爲了數學分析方面的青年數學工作者的需要而寫的，主要介紹拓撲空間理論的基礎知識，作爲日後研究現代數學中一些部門(例如汎函分析、概率論等)的準備．敍述方式力求便於剛學過高等學校中數學分析與實變數函數論的人的瞭解．本書內容包括：拓撲結構(鄰域，開集與閉集，定向點列的收斂)，連通性，連續映像；連續函數；拓撲空間的各種分離性 ((T_0)，(T_1)，(T_2)，(T_3)，(T_4))，全正則拓撲空間；緊性；一致性結構；距離空間，拓撲空間的距離化問題；描述集論大意；拓撲羣的簡單介紹等．讀者對象爲高等學校數學專業高年級學生，青年教師與研究工作者．

拓 撲 空 間 概 論

關肇直 編著

*

科 學 出 版 社 出 版 (北京朝陽門大街 117 號)

北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

科學出版社上海印刷廠印刷　新華書店總經售

*

1958年 9 月第 一 版　　書號：1339　字數：263,000

1958年 9 月第一次印刷　　開本：787×1092 1/27

(滬) 0001—1,684　　印張：11 11/27

定價：(10)1.80 元

目　　錄

引　言

拓撲空間的理論一方面是由於 19 世紀數學分析奠基工作的需要，另一方面是受了 19 世紀末以來幾何學基礎以及更一般的公理學方法的影響而產生的．到了今日，它基本上是一門完整的科學，並成爲數學中的一個基礎部分，也就是數學中各個部門的共同基礎． 本書是爲了適合數學分析工作者的需要，特別是爲了適應汎函分析學者的需要而寫的，對拓撲空間理論的基礎知識作一介紹．

在這裏簡略地敍述一下拓撲空間理論的發展史，似乎是不無幫助的．極限與連續性的概念本是古已有之的，但直到 19 世紀，經過微積分學發現後 200 年來數學科學中大量具體材料的積累，人們才對數學分析的基礎問題開始探究． 首先是 Cauchy，Abel 等人對無窮級數與數列的收斂性的研究，然後對於連續函數下了嚴謹的定義． 另一方面，Argand 與Gauss 發現了複數的幾何學表示方法（就是現在所謂 Argand 圖，Gauss 平面這一名詞的來源也在這裏），使得複變量的研究得到了幾何學直觀的解釋． Riemann 不僅在數學分析方面作出了重要貢獻，而且他關於幾何學基礎的研究在數學中開闢了嶄新的方向． 他特別指出，在關於量的理論中，有一部分是與量測無關的，而這時量不是看成具有與位置無關的存在的，也不是看成可以用一種量測單位表示的，而是看成一個 Mannigfaltigkeit 的部分．他並且指出，在一定的 Mannigfaltigkeit 中決定位置時，不僅有時用有窮多個數値，有時也要求用無窮多個數値，例如在一已知函數集中決定一個函數，或在空間中決定一個幾何圖形等．這裏 Riemann 已經有了函數集的初步觀念[1]． 他的這種思想也表現在他關於所謂 Dirichlet 原理的研究中． 値得注意，Riemann 也是組合拓撲學的奠定人． 但 Riemann

1) 見 Riemann 的論文："Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu grunde liegen"，載在 Riemann 全集俄文本 (Сочинение) 中 279—293 頁．

關於拓撲空間的思想一直要等到實數理論以及直綫、平面與三維空間中點集的研究更系統之後才能獲得進一步的發展. 這首先是實數理論的建立,與實變數函數的研究. 特別 Georg Cantor 不僅建立了集論,而且他把幾何圖形看成直綫、平面或一般 n 維歐幾里得空間中的點集,並且他第一次定義了積集點、導集、開集、閉集、完集等概念,獲得了關於直綫上這些種點集的結構的重要結果.

Cantor 的思想在法國與德國的函數論學派的研究中得到了發展. 例如 Borel, Lebesgue 發現了 n 維歐幾里得空間中有界閉集的緊性(就是現在數學分析教科書中的所謂 Heine-Borel-Lebesgue 定理),而這種思想的發展也被應用到曲綫集與函數集的研究("正規族"). 這樣, 這種思想也密切關聯着汎函分析的早期工作. 1887 年 Volterra 建立了"曲綫的函數" (fonctions de lignes) 的概念,給汎函分析樹立了雛型. 其後, Hilbert 在 1900 年利用 Riemann 的想法證明 Dirichlet 原理中極小存在[即存在函數 $z = f(x, y)$,使

$$J(f) = \iint\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\} dxdy$$

爲極小]. 他考慮了數學分析中的 Bolzano-Weierstrass 定理對函數集是否成立的問題,即函數集的列緊性問題,而函數集的列緊性問題後來在實變數與複變數函數的研究中都顯示出它的重要性. 隨着積分方程的研究出現了與歐幾里得空間類似的無窮維的 Hilbert 空間. 這些事實都說明數學分析的研究爲拓撲空間理論的形成準備了大量的具體材料,使得這樣的一般理論的出現成爲既可能又必要.

另一方面, 公理學方法的發展使得從這些大量材料中產生一般的抽象理論變成現實. Hilbert 在 1899 年發表的經典性著作"幾何學基礎" (Grundlagen der Geometrie) 不僅爲歐幾里得幾何學重新建立了真正嚴謹的公理系統, 而且創立了公理方法, 這就是說, 在建立一個數學理論時,不必去說明那些基本概念究竟是指什麽,而只須把它們的主要特徵用公理系統描述出來, 這樣就使得我們有可能把現實世界中一些量的關係中的次要的、偶然性的屬性捨棄, 而把那些最本質的屬

性提出來．也只有這樣才使得數學家們能更有意識地發現現實世界中的各種根本性的量的關係，而不僅僅限於這些量的關係的某些特種表現的研究． 例如在數學分析中有一個熟知定理，即閉有窮區間上的連續函數必達到它的最大最小值，而這一屬性只不過是閉有窮區間滿足 Bolzano-Weierstrass 定理的後果，認淸這點才可以看出本質關係之所在．正是這樣，M. Fréchet(1906) 由數學分析的大量材料中發現了種種不同問題之間的類似，其共同處在於我們研究的都是變元與變元之間的依賴關係，而且在許多定理的證明中，起作用的不是某種特定變元的某種具體性質，而只是很多種不同變元所具有的某種帶根本性質的一般屬性．爲此，Fréchet 創立了廣義分析這一具有高度抽象性的方向，這在一定意義下可以說是數學分析的基礎部分的公理化，這也可以看成是拓撲空間理論正式建立的開始． 這樣，就可以把函數、極限、連續函數等概念中的最本質的部分剖析出來，建立一般變元之間的依賴關係．但我們感覺興趣的，往往並非過於一般的依賴關係，而是連續的依賴關係．這裏所謂連續，粗略地說，是指這依賴關係所關聯着的雙方的一方(主變元)的足够微小的變化可以只引起另一方(從變元)的任意微小的變化． 但在一般的情形下，什麽叫做“微小的變化”呢？ 用幾何學的語言來表達，所謂兩元相差很小，乃是說它們被看作點時是很近的． 因此，在廣義分析中，重要的不是一般的集，而是其上規定了遠近概念的集，就是所謂“空間”． 引用 Fréchet 的話，爲了考慮空間而不是一般的集，必須把集中的元“組織起來”！ 這就是說，必須規定如何判斷在一集中是否有離某元任意近的點．最初，Fréchet 是使用距離來規定遠近的，這也就是對空間中元偶 $\{x, y\}$ 定義的實數值函數 $\rho(x, y)$，滿足一定的條件，於是他提出了距離空間的概念． 但 Fréchet 後來又發現，數學分析中提供了一些例，其中遠近不能用距離來規定，例如 Baire 函數類就是這樣的例，即那裏的函數列收斂不能用“距離趨於零”來表達．爲了建立能包容這些情形的更一般理論，不得不把距離概念歸到更原始的概念，把實數直綫上以一點爲中心的開區間的概念抽象化成鄰域的一般概念．鄰域是比距離更基本的概念．如果對集中每

點都選定一組子集作爲它的鄰域，那末在這集中遠近也就隨着規定了，而所謂一子集包含着“與 a 任意接近”的點，是指這一子集包含 a 的每個鄰域中的點，也就是說，它與 a 的每個鄰域相交．早在 Hilbert 的關於幾何學基礎的著作中就已提出了鄰域概念來給“平面”作公理學的定義． 引用他的原話[1)]，所謂平面，是指一組元，這些元叫做點，每一點 A 决定一些點的子集，它自己含在每個這樣的子集中，這些子集叫做 A 的鄰域．一個鄰域中的點與數平面(即平常帶有 Descartes 直交坐標的平面)中某 Jordan 區域(即由一個封閉 Jordan 曲綫所圍繞的區域的內部)中的點之間成立一一對應．這 Jordan 區域叫做那個鄰域的像．在一個像中的、包含點 A 於其內部的 Jordan 區域仍是 A 的一個鄰域的像．如果一個鄰域有兩個像，那末，藉那個鄰域引起的二像之間的一對一映像是雙方連續的． 如果 B 是 A 的一個鄰域中的某點，那末這鄰域也是 B 的一個鄰域． 對於 A 點的兩個鄰域，恆有 A 的一個鄰域同時包含在那兩個鄰域之中． 如果 A, B 是平面上任意兩點，那末 A 必有一鄰域同時也包含 B．有趣的乃是 Hilbert 的這一公理系統已與現在用鄰域規定拓撲結構的定義很接近了． 當然，必須拋棄某些不必要的具體限制． Fréchet 開始考慮用鄰域定義空間，是在 1913 年，而在大約同時，有些別的數學家也作過類似的考慮，特別是 Hausdorff 在 1914 年出版的書 Grundzüge der Mengenlehre (第一版) 中利用了開鄰域定義我們現在所謂 (T_2) 型空間．F. Riesz 也是拓撲空間理論的奠基人之一，他主要是從導集概念出發． Hausdorff 以後，拓撲空間的理論逐漸定形下來．其後的很多重要工作是屬於蘇聯莫斯科學派的，特別是 П. С. Александров 與 П. С. Урысон． 如果 Fréchet 是最早看出列緊性與緊性的密切關係的人，那末緊空間的系統研究却是屬於 Александров 與 Урысон 的． 他們還在距離化問題——即尋求一個拓撲空間的拓撲結構可以由一距離規定的條件——方面作出

1) Über die Grundlage der Geometrie, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1902), 233—241, 也可參看 Hilbert 的專書 Grundlagen der Geometrie, 第 7 版的附錄 4．

了卓越貢獻，近年來這問題在 Ю. М. Смирнов 手中已經基本上完全解決. Тихонов 對於緊空間的積空間的緊性的證明 (1930) 也是這一學派的重要貢獻.

本世紀三十年代以後法國數學家又在拓撲空間方面作出了新貢獻. Henri Cartan 在 1937 引進了 filtre 的概念，使得“收斂”的更本質的屬性顯示出來. 鄰域只能表達出一個點在某點附近，不適於表達出兩點“相互很近”，數學分析中一致連續性的研究却需要後者，於是 A. Weil 在 1937 提出了一致性結構的概念，這在一定意義下乃是距離空間的推廣，或更恰當地說，一致性結構乃是反映了距離空間的一些本質屬性，因爲過去對於距離空間證明的不少定理實際上與距離的選取或甚至它的存在都沒有關係，只是一致性結構的後果. Fréchet 後來又提出抽象距(1945)的概念，他的學生們進行了完整的研究，指出了當抽象距滿足一定條件時就確眞得出 A. Weil 的一致性結構來. 蘇聯學派近年來又提出了近性空間(пространство близости)的概念.

拓撲空間與代數的一些概念結合起來，就變得更豐富，並有更多應用. 特別是拓撲羣與拓撲綫性空間，近年來都已發展成數學中獨立的分支.

本書只對於拓撲空間作一基礎性介紹. 特別，由於這本書是以數學分析的工作者作讀者對象的，即目的在於使一般在高等學校數學專業畢業的青年通過本書可以獲得關於拓撲空間理論的基礎知識，以爲學習汎函分析打下基礎，我們在書的內容與敍述方式的選擇方面，都是根據這一目的來决定的. 特別，我們不追求從拓撲空間理論本身看公理系統的最簡單或美觀(如很多書從 O_1—O_2 出發)，也不追求純拓撲的特徵(如避免實值連續函數等外來的工具等). 相反地，我們儘可能遵循一般實變數函數論中敍述數直綫或 n 維歐幾里得空間中的拓撲性質的方式，例如像 Натансон 的實變數函數論中的敍述方式，以便使初學的青年易於和在高等學校中讀實變數函數論等課所獲得的知識比較，使得他們對那些抽象概念的引入不至感覺突然. 爲此，我們從鄰域組出發定義拓撲空間，並常常使用半序點列的收斂(在一些文獻上稱作

Moore-Smith-Шатуновский 收斂)，而在開始時並不引入從理論上看更好的 filtre 概念．我們也常常使用實數，特別是空間上的實值連續函數作爲輔助工具．但爲了使讀者不與現代一般的拓撲空間理論的敍述形式脫節，我們在書中也介紹了那些陳述形式，並證明這種形式與書中者的邏輯等價．

除一般的拓撲空間理論的內容以外，爲了學習汎函分析的需要，我們在這裏還添加一些有關材料．特別，爲了閱讀像 Banach 的 Théorie des opérations linéaires 一類經典著作，我們將介紹一些平常往往歸到"描述集論"方面的初步知識——第一綱集，Baire 屬性，Baire 函數類，Borel 函數類等等．我們也介紹一點有關拓撲羣與拓撲綫性空間的基本概念，這僅僅爲了使讀者在這樣基礎上能對 Banach 空間理論獲得更好的理解，而這些方面的較深刻的知識則應當是其它專門書的事情了．

本書的編寫基本上是在 1950—1951 年完成的，當時主要的參考材料是 N. Bourbaki 那部名著 Topologie générale，不過敍述方式很不同．近年來，更多的專書出版了，特別是 J. L. Kelley 的 General topology (1955)，無論在編書的目的方面或在敍述方式上，都與我們所採取的相類似．這使得著者懷疑還有沒有出版本書的必要．但鑒於目前我國數學方面專書非常缺乏，而且外國文對於一般青年讀者也不是容易的，於是仍决定把它出版．假如它還能完成一定的使命，總算著者的冒昧還有一點好的效果吧！ 由於著者的淺薄，不敢保證書中沒有錯誤，至於缺點，恐怕更不少，希望海內的學者不吝賜敎．

關 肇 直

1956 年 12 月 · 北京

關於集論的若干準備知識

本書假定集論的知識爲已知. 由於 П. С. Александров 著的 Введение в общую теорию множеств и функций 的漢譯本[1] 已經出版,這樣的要求對於我國的一般讀者來說,似乎不算過份. 但爲了使讀者易於查找,也由於使用名詞與符號的不同,我們在這裏再把集論的一些基本概念作一簡述. 特別對於 П. С. Александров 書中所缺少的,而又爲本書後面所要用到的材料,則不得不敍述一下. 我們並不打算深入集論的細節, 特別不打算在本書中涉及集論基礎中的一些問題,而是像一般數學書那樣,採取所謂"樸質"的觀點,對於集論的一般結果都加以承認. 特別在本書中經常使用選擇公理及與它等價的 Zorn 輔助定理,而對於在哪裏確實使用了它或哪裏可以避免使用它,將不作任何聲明.

爲了在全書中節省書寫, 我們常引用一些符號. 如果 P, Q 表示兩個命題,那末我們用 $P \Longrightarrow Q$ 表示: 由命題 P 可以推演出命題 Q 來, 而 $P \Longleftrightarrow Q$ 則表示兩命題 P, Q 是等價的,即由 P 可以推演出 Q 來,而由 Q 也可以推演出 P 來. 我們在這時也說: 爲了 P 眞,必須且只須 Q 眞. 我們常用符號 $\exists$ 表示"存在",用 $\equiv$ 表示它所聯結的兩邊按定義是相同的.

一. 集代數

集由元組成,爲了明確集的概念,我們必須有一定的準則來判斷那些事物是這個集的元, 那些不是它的元, 從而集是由它的元的一個特徵性質來決定的. 我們用大寫羅馬字母 A, B, $\cdots$ 等表示集, 用小寫羅馬字母 a, b, c, $\cdots$, x, y, z, $\cdots$ 表示集中的元. 我們用

$$a \in A \tag{1}$$

1) 楊永芳譯,集與函數的汎論初階,高等教育出版社.

表示下列命題：a 是 A 中的元，讀成"a 包含在 A 中"。我們也把(1)表示成

$$A \ni a,$$

讀成"A 包含元 a"。用符號

$$a \notin A, \text{ 或 } A \not\ni a$$

表示下列命題：a 不包含在 A 中，或 a 不是 A 的元。

如果集 A 中的元都是集 B 中的元，即對於每個元 x，

$$x \in A \Longrightarrow x \in B,$$

那末我們說 B 包含 A，A 包含在 B 中或 A 是 B 的子集，用符號

$$A \subset B, \text{ 或 } B \supset A$$

表示. 注意：$\subset$ 表示集與集之間的關係，而 $\in$ 表示元與集之間的關係，從而 $\subset$ 與 $\in$ 是表示兩個完全不同的概念，不可混淆. 但如果

$$a \in A,$$

那末由 a 一個單獨元組成的集，通常用 $\{a\}$ 表示，必是 A 的子集[1]：

$$\{a\} \subset A.$$

我們常用固定的符號表示數學中常見的幾個集. 例如用 N 表示自然數的全體，Z 表示整數全體，Q 表示有理數全體，R 表示實數全體，C 表示複數全體，等等.

符號 $\subset$ 所反映的關係叫做包含關係. 這個關係滿足下列三個條件：

1) $A \subset A$;

2) $A \subset B$ 且 $B \subset A \Longrightarrow A = B$，即 A 與 B 由同樣的元組成；

3) $A \subset B$ 且 $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

不含任何元的集叫做空集，表示成

$$\phi.$$

我們規定，ϕ 包含在任意集 A 中：

$$\phi \subset A.$$

在許多數學問題中，常以某一個集 E 作考慮問題的出發點，而所考

1) 有些作者，例如波蘭數學家們常對這兩符號不加區分.

慮的元都是這個集的元，所考慮的集都是這個集的子集. 我們常根據 E 中元的某一性質來界定 E 的子集. 例如，以實數全體 R 作考慮問題的出發點，那末根據“大於 5 ”這一性質，就可以在 R 中界定出一個子集來，即由 R 中一切大於 5 的數組成. E 中元的一個性質往往由一個命題 $P(x)$ 決定：$P(x)$ 表示元 x 具有由命題 P 敍述的那個性質. 這時，由這性質界定的子集用下列符號表示：

$$\{x \mid x \in E,\ P(x)\}.$$

例如上面說的那個大於 5 的實數所組成的集用下列符號表示：

$$\{x \mid x \in R,\ x > 5\}.$$

這樣，不難看出，

$$P(a) \Longleftrightarrow a \in \{x \mid x \in E,\ P(x)\}.$$

集 E 的一切子集(包括 E 自己與空集 ϕ)全體用

$$\mathfrak{P}(E)$$

表示. 這種由集組成的集（即一個集，它的元本身是集）叫做集族. $\mathfrak{P}(E)$ 是一個特殊的集族. 一般的集族常用符號

$$\{A_\iota\}_{\iota \in I}$$

表示，這裏 A_ι 是集，I 是一個標號族，其中元 ι 都是標號. I 的勢可能是有窮，可數或不可數無窮. 對於只含有窮多個集的集族，我們可以取 I 爲自然數集 N 的一個子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$，而這集族表示成

$$\{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}.$$

如果族中恰含可數多個集，那末用自然數集 N 作標號族 I：

$$\{A_i\}_{i \in N} \text{ 或 } \{A_i\}_{i=1, 2, \cdots}.$$

所謂集族 $\{A_\iota\}_{\iota \in I}$ 中諸集 A_ι 的併集(簡稱併)，是指由至少包含在一個 $A_\iota(\iota \in I)$ 中的元組成的集，我們用

$$\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$$

表示. 如果 $I \subset N$，那末併集可用下列符號表示：

$$\bigcup_{i \in N} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots;$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

所謂集族$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$中的諸集A_ι的交集（簡稱交），是指由包含在一切A_ι中$(\iota\in I)$的元所組成的集，我們用

$$\bigcap_{\iota\in I} A_\iota$$

表示．當$I\subset N$時，我們用下列符號表示交集：

$$\bigcap_{i\in N} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots;$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n.$$

如果

$$\bigcap_{\iota\in I} A_\iota = \phi,$$

我們說諸集$A_\iota(\iota\in I)$沒有公共點，或不相交．而一般交集$\bigcap\limits_{\iota\in I} A_\iota$也叫做諸集$A_\iota$的公共部分．如果在集族$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$中，每兩個$A_\iota$不相交，即

$$\iota,\ K\in I,\ \iota\neq K\Longrightarrow A_\iota\cap A_K=\phi,$$

那末我們說這族中的集兩兩不相交．

所謂集A與集B的差集，是指A中一切不包含在B中的元所組成的集，用

$$A\setminus B$$

表示，即

$$A\setminus B \equiv \{x | x\in A,\ x\notin B\}.$$

這時，我們不必限制B是A的子集．不難看出，為了$A\subset B$，必須且只須$A\setminus B=\phi$．如果在某問題中所考慮的集都是某集E的子集，那末差集

$$E\setminus A \qquad (A\subset E)$$

常表示成

$$CA \quad 或 \quad C_E A,$$

叫做A（相對於E）的補集．不難看出

$$CE=\phi,\quad C\phi=E,\quad C(CA)=A.$$

不難驗明，上面定義的那些關於集的運算，下列諸關係成立（設所考慮的諸集 $A, B, \cdots$ 等都是一個固定集 E 的子集）：

$$A\cup A=A,\qquad A\cap A=A;$$
$$A\cup CA=E,\qquad A\cap CA=\phi;$$
$$A\cup\phi=A,\qquad A\cap E=A;$$
$$A\cup E=E,\qquad A\cap\phi=\phi;$$
$$A\cup B=B\cup A,\qquad A\cap B=B\cap A;$$

$A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B$, 而且

$$A\subset C,\ B\subset C\Longrightarrow A\cup B\subset C;$$

$A\supset A\cap B$, $B\supset A\cap B$, 而且

$$A\supset C,\ B\supset C\Longrightarrow A\cap B\supset C;$$

$$C(A\cup B)=CA\cap CB,\quad C(A\cap B)=CA\cup CB;$$

更一般：

$$C\bigcup_{\iota\in I}A_\iota=\bigcap_{\iota\in I}CA_\iota,\quad C\bigcap_{\iota\in I}A_\iota=\bigcup_{\iota\in I}CA_\iota.$$

這最後一式以及下面很多公式表明了集論中的對偶性原則，即在集的關係中，如果把每個集換成它的補集，而把 $\cup$ 與 $\cap$ 對換，那末得出來的新關係仍成立！又

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

更一般些，

$$\bigcup_{\substack{\iota\in\cup J_\lambda\\ \lambda\in L}}A_\iota=\bigcup_{\lambda\in L}\Big(\bigcup_{\iota\in J_\lambda}A_\iota\Big),\quad \bigcap_{\substack{\iota\in\cup J_\lambda\\ \lambda\in L}}A_\iota=\bigcap_{\lambda\in L}\Big(\bigcap_{\iota\in J_\lambda}A_\iota\Big);$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

更一般些，

$$\Big(\bigcup_{\iota\in I}A_\iota\Big)\cap\Big(\bigcup_{\kappa\in K}B_\kappa\Big)=\bigcup_{\substack{\iota\in I\\ \kappa\in K}}(A_\iota\cup B_\kappa);$$

$$\Big(\bigcap_{\iota\in I}A_\iota\Big)\cup\Big(\bigcap_{\kappa\in K}B_\kappa\Big)=\bigcap_{\substack{\iota\in I\\ \kappa\in K}}(A_\iota\cup B_\kappa).$$

$$A \subset B \Longleftrightarrow CA \supset CB \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A;$$

$$A \cap B = \phi \Longleftrightarrow A \subset CB \Longleftrightarrow B \subset CA;$$

$$A \cup B = E \Longleftrightarrow CA \subset B \Longleftrightarrow CB \subset A.$$

上面已經談到，由一個元 a 組成的集用 $\{a\}$ 表示(稱做單點集)．一般，由有窮多或可數無窮多元 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 所組成的集各用符號

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \text{ 及 } \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

表示(各相應地稱做有窮集與可數無窮集)．

二．映 像

如果有兩個集 E 與 F，對於每個 $x \in E$，有一定規律使我們找到一個元 $y \in F$ 與 x 相應，這規律叫做由 E 到 F 中的映像，平常表示成

$$x \longrightarrow f(x) = y \quad (x \in E, f(x) \in F),$$

或簡單地用 f 表示這映像．有時只對 E 的某子集 A 中的元 x，有 $y \in F$ 與它相應，那末我們說映像 f 定義在 E 的子集 A 上，A 叫做 f 的定義域；我們也說，f 把集 A 映入 F．$f(x)$ 叫做元 x 按照映像 f 在集 F 中的像．F 中凡作爲 A 中某元 x 的像的全體（表示成 $f(A)$，即 $f(A) = \{y \mid \exists\, x \in A, f(x) = y, y \in F\}$）叫做映像 f 的值域．一般，對於 E 的任意子集 B，令

$$f(B) = \{f(x) \mid x \in B\},$$

則 $f(B)$ 是 F 中的子集，叫做 B 按映像 f 在 F 中的像．

如果特別 F 是數集(例如 $F = R$ 或 $F = C$)，那末由 E 到 F 中的映像一般叫做 E 上的函數[1]．

由 E 到 F 中的一切映像的全體表示成

$$F^E.$$

平常在數學分析中考慮的“函數”乃是 R^R 中的元，而在複變數函數論中所遇到的乃是 C^C 中的元．如果 $F = E$，那末由 E 到 E 中的映像也簡稱作 E 中的映像．

如果映像 f 滿足 $f(E) = F$，那末 F 中每個元必是 E 中某元按映像

1) 在早期文獻中叫做汎函數，在現代汎函分析中仍這樣用這一名詞．