# 2000年硕士研究生入学考试

# 数学课(经济类)复习指导

傅维潼 罗小伟 王见定 编著

航空工业出版社

2000年硕士研究生入学考试数学课（经济类）复习指导



业出版社

## 内 容 提 要

该书是作者在中国人民大学等院校十余年考研辅导经验的最新总结。本书从考试大纲规定的考查知识点入手，针对历年来考生集中暴露的问题，用适于经济类考生的例题、细致的讲解来引导同学有重点地进行全面的复习。书中尤其注重对解题思路和技巧的提示并予以特殊编排，有助于提高考生临场应考时分析、解决问题的能力。各章之后备有一定数量的练习题，书后又配备了几套模拟试题。

**图书在版编目(CIP)数据**

2000年硕士研究生入学考试数学课(经济类)复习指导/傅维潼等编．－北京：航空工业出版社，1999.6

ISBN 7-80134-408-1

Ⅰ.大…　Ⅱ.傅…　Ⅲ.经济数学-研究生-入学考试-教学参考资料　Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第30109号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号　100029)

北京地质印刷厂印刷　　全国各地新华书店经售

1999年6月第1版　　1999年6月第1次印刷

开本：787×1092　1/16　　印张：17.75　　字数：454千字

印数：1－5 000　　定价：25.00元

# 出 版 前 言

航空工业出版社出版的考研系列丛书是北大、人大等院校资深老师多年来潜心研究研究生入学考试特点的结晶。本套丛书的作者都是活跃在各校教学第一线的中坚力量，本着对考生负责的态度，各位作者将多年来的教学心得倾注于这套丛书之中。在此，航空工业出版社向全体编者表示深深的谢意，并预祝广大考生考试成功。

航空工业出版社

1999.6

# 助 你 成 功

## ——作者寄语

经济学硕士研究生入学考试中，数学这门课是多数考生感到复习时间紧、复习量又大的一门课，总令人有种力不从心、无从下手、忐忐不安的感觉。要解决这一问题，最好有一本全面而又简明的复习资料。

鉴于上述情况，我们对近几年来经济学硕士研究生入学数学考试的特点、命题特点、评分标准、考生应试困难与弱点进行了分析，结合多年来在中国人民大学研究生院举办的研究生入学考试考前辅导班进行辅导所积累的经验编写了这本书。

本书紧扣经济学硕士研究生入学考试数学大纲的要求，对要复习的材料进行了精选，书中的内容对于应考全是有用的，讲解全面系统又简明扼要、逻辑性强，一书在手基本可通览全部考试内容。

参加经济学硕士研究生入学考试的考生，在考试中失分有其自身的特点。本书的主要目的就是针对近年来考生易失分的知识点，从基本概念、定理、公式、法则、基本方法、基本算法的理解、审题、解题方法几个方面，在例题解答过程的旁边做了针对性强的点拨，力求减少考生失分的可能性。这种在解题过程之旁进行点拨的方法既不破坏解题过程的完整性和连续性，又能使读者一目了然。只要你能全面准确地把握本书内容，取得经济学硕士研究生入学数学考试成功的机会必能大大增加。

祝你在研究生入学全国统一考试中达到理想的目标！

本书微积分，线性代数中的矩阵的特征值与特征向量、二次型两部分以及概率与数理统计中的数理统计基本概念、参数估计及假设检验三部分均由傅维潼撰稿。线性代数中的行列式、矩阵、向量和线性方程组四部分由罗小伟撰稿。概率与数理统计中的随机事件和概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理四部分由王见定撰稿，全书由傅维潼统编。

编者

1999.5

# 目　　录

## 第一篇　微积分

### 第一章　函数、极限与连续



### 第二章　一元函数微分学



### 第三章　一元函数积分学



### 第四章　多元函数微积分



### 第五章　无穷级数(数学四不要求)



### 第六章　微分方程与差分方程(数学四不要求)

# 第二篇　线性代数

## 第一章　行列式



## 第二章　矩阵



## 第三章　向量



## 第四章　线性方程组



## 第五章　矩阵的特征值与特征向量

### 第六章 二次型(数学四不要求)



## 第三篇 概率统计

### 第一章 随机事件和概率



### 第二章 随机变量及其分布,随机变量的数字特征



### 第三章 大数定律和中心极限定理



### 第四章 数理统计的基本概念(数学四不要求)



### 第五章 参数估计(数学四不要求)

## 第六章　假设检验



## 关于隐含条件的挖掘

# 第一篇　微积分

## 第一章　函数、极限与连续

### 一、要点解析

**1. 函数**

函数是微积分研究的主要对象。

1）函数的概念及表示法；

2）分段函数、隐函数、反函数、复合函数；

3）函数的有界性、单调性、周期性、奇偶性；

4）基本初等函数的性质及图形，初等函数。

**关于复合函数的问题**

（Ⅰ）已知函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 的表达式，求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式。

**例 1**　设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0,\\ -1 & x<0\end{cases}$　求 $f(x-x^2)$

解：设函数 $f(u)=\begin{cases}1 & u>0\\ 0 & u=0\\ -1 & u<0\end{cases}$　　把 $f(x)$ 中的 $x$ 换成 $u$

$\therefore\ f(x-x^2)=\begin{cases}1 & x-x^2>0\\ 0 & x-x^2=0\\ -1 & x-x^2<0\end{cases}=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x=0 \text{ 或 } x=1\\ -1 & x<0 \text{ 或 } x>1\end{cases}$　　令 $u=x-x^2$ 代入 $f(u)$ 中

（Ⅱ）已知函数 $f(x)$ 及复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式，求中间变量 $\varphi(x)$ 的表达式。

**例 2**　填空题(1992，五，3 分)

已知　$f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$________的定义域为____________

解：$f(u)=\sin u$　　把 $f(x)$ 中的 $x$ 换成 $u$

$\therefore\quad f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$　　把 $u=\varphi(x)$ 代入 $f(u)$

$\therefore\quad \sin\varphi(x)=1-x^2$　　已知：$f[\varphi(x)]=1-x^2$

$\therefore\quad \varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$　　$\arcsin x$ 的定义域是：

$\because\quad -1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$　　$-1\leqslant x\leqslant 1$

$\therefore\quad -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$ 为 $\varphi(x)$ 的定义域。

（Ⅲ）已知：复合函数 $f[\varphi(x)]$ 及中间变量 $\varphi(x)$ 的表达式，求函数 $f(x)$ 的表达式。

**例 3**　设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，　求 $\displaystyle\int\varphi(x)\mathrm{d}x$

解：由已知：$f(u)=\ln\dfrac{u+1}{u-1}$

$$\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$$

$\therefore\quad \dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x \qquad \therefore\quad \varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

$\therefore \displaystyle\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln(x-1)^2+x+c$

把 $f(x^2-1)$ 中的 $x^2-1$ 换成 $u$ 可得 $f(u)$

由(Ⅱ)知求 $\varphi(x)$ 的方法

**由未知函数所满足的关系，确定未知函数的表达式**

**例 4** 设函数 $f(x)$ 满足关系：$f(x)+\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$ (1)

求：$f'(x)$

解：给定关系中函数 $f(x)$ 和 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的变元 $x$ 与 $\dfrac{1}{x}$ 互为倒数，把它们互换：

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{3}f(x)=x \qquad (2)$$

$$\therefore\quad \begin{cases} f(x)+\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{3}f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{3(3-x^2)}{8x}$$

$$\therefore\quad f'(x)=-\frac{3(3+x^2)}{8x^2}$$

要求 $f'(x)$，关键先求 $f(x)$ 的表达式

把(1)与(2)联立起来，用加减法从中解出 $f(x)$

**例 5** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中可导，且对任意实数 $x,y$ 均满足：$f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)$ 且 $f'(0)=e$，求 $f'(x)$

解：将给定关系式两边对 $y$ 求导

$$f'(x+y)=e^xf'(y)+e^yf(x)$$

$$f'(x)=e^x\cdot e+f(x)$$

$\therefore\quad f'(x)-f(x)=e^{x+1}$ 且 $f(0)=0$

$\therefore\quad f(x)=xe^{x+1}$

$\therefore\quad f'(x)=(x+1)e^{x+1}$

为了得到一个微分方程，

令 $y=0$

解微分方程可求出 $f(x)$

**例 6** 连续函数 $f(x)$ 满足 $\displaystyle\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=f(x)+x\sin x$，求 $f(x)$

解：设 $F'(x)=f(x)$

则 $\displaystyle\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}[F(x)-F(0)]$

$\therefore\quad \dfrac{1}{x}[F(x)-F(0)]=f(x)+x\sin x$

$$F(x)-F(0)=xf(x)+x^2\sin x$$

把给定关系式左边的积分号去掉是关键

$\therefore\ f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\sin x+x^2\cos x$

$f'(x)=-2\sin x-x\cos x$

$\therefore\ f(x)=\cos x-x\sin x+c$

两边求导，再整理

**由极限确定函数的表达式**

**例 7** 填空题(1992，五，3 分)

设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$ 则 $f'(t)=$__________

答：$(2t+1)e^{2t}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x=t\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{t}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{t}{x}\right)^x}=t\,\dfrac{e^t}{e^{-t}}$

$\therefore\quad f(t)=te^{2t}$

$\therefore\quad f'(t)=(2t+1)e^{2t}$

把 $t$ 看成常数用重要极限

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

**例 8** 选择题(1998，三、四，3 分)

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点。其结论为：

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

答：(B)

解：当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=0$

当 $x=-1$ 时　$f(x)=0$

当 $-1<x<1$ 时　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$

当 $x=1$ 时　$f(x)=1$

$$\therefore\quad f(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant -1 \text{ 或 } x>1\\ 1+x & -1<x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

选(B)，即 $x=1$ 是间断点。

讨论：$|x|>1$，$|x|<1$，$x=\pm1$ 各种情况下的极限

**由给定条件、性质或关系式，确定函数中的未知参数**

**例 9** 选择题

设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$ 则

(A) $a=1,b=1$　(B) $a=-1,b=1$　(C) $a=1,b=-1$　(D) $a=-1,b=-1$

答：(C)

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-ax^2)-(a+b)x-b}{x+1}=0$

$\therefore\quad a=1\quad a+b=0\qquad \therefore\quad b=-1$

选(C)

$\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b$

$=\dfrac{(x^2-ax^2)-(a+b)x-b}{x+1}$

**例 10** 填空题(1991，四、五，3 分)

设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点$(-1,0)$，且在点$(-1,0)$有公共切线，则

$a=$______，$b=$______，$c=$______

答：$a=-1, b=-1, c=1$

解：$-1-a=0, b+c=0$ | $f(-1)=0, g(-1)=0$

$f'(x)=3x^2+a,\quad g'(x)=2bx$ | $f'(-1)=g'(-1)$

$3+a=-2b$

∴ $a=b=-1\quad c=1$

**2. 极限与连续**

极限的理论是微积分的基础，函数的连续性也是微积分的重要概念。

1）极限的概念

（1）数列的极限：数列$\{x_n\}$以常数$A$为极限，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$：$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N$（正整数），当$n>N$时，总有$|x_n-A|<\varepsilon$成立。

（2）函数的极限Ⅰ：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ M>0$，当$|x|>M$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立。

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$：

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ M>0$，当$x>M$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立。

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$：

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ M>0$，当$x<-M$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立。

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

函数的极限Ⅱ：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立。

左极限与右极限：

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A,\quad \text{记为}\quad f(x_0-0)=A$$

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立。

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A,\quad \text{记为}\quad f(x_0+0)=A$$

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立。

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=A \text{ 且 } f(x_0+0)=A$$

变量$u$在某一无限变化过程中以$A$为极限$\Leftrightarrow$在此过程中有$u=A+\alpha$，其中$\alpha$为该过程中的无穷小。

2）极限的性质

（1）唯一性：在某一无限变化过程中，变量$u$以常数$A$为极限，则这个极限$A$是唯一的。

（2）局部有界性：在某一无限变化过程中，变量$u$以常数$A$为极限，则在该变化过程中必存在一个时刻，使得在这个时刻以后，变量$u$是有界的。（注意：数列$\{x_n\}$以$A$为极限，则这个数列一定有界。）

（3）保号性：在某一无限变化过程中，变量$u$以常数$A$为极限，则：

① 当$A>0$时（$A<0$），则在该变化过程中必存在一个时刻，使得在这个时刻以后总有，$u>0$（或$u<0$）。

② 反之：当$u\geqslant0$时（$u\leqslant0$），则$A\geqslant0$（$A\leqslant0$）。

③ 在某一无限变化过程中，变量 $u$ 以 $A$ 为极限，变量 $v$ 以 $B$ 为极限，且 $u\leqslant v$，则 $A\leqslant B$。

3）无穷大与无穷小的概念及它们之间的关系

（1）在某一无限变化过程中，变量 $u$ 以 0 为极限，则称变量 $u$ 是在该变化过程中的无穷小。

（2）在某一无限变化过程中，变量 $u$ 的绝对值无限增大，则称 $u$ 为该过程中的无穷大。即 $\forall E>0$，在该过程中必存在一个时刻，使得在该时刻以后，总有 $|u|>E$ 成立。

（3）在某一无限变化过程中，变量 $u\neq 0$ 是无穷小，则 $\frac{1}{u}$ 是该过程中的无穷大；$u$ 是该过程中的无穷大，则 $\frac{1}{u}$ 是该过程中的无穷小。

4）无穷小的基本性质，无穷小阶的比较方法

（1）无穷小的基本性质

① 有限个无穷小的代数和仍为无穷小；

② 无穷小与有界变量之积仍为无穷小；

③ 有限个无穷小之积，仍为无穷小；

④ 无穷小除以极限不为 0 的变量，其商仍为无穷小。

（2）无穷小阶的比较方法

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$

① 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则记为 $f(x)=o(g(x))$，称 $f(x)$ 为比 $g(x)$ 的高阶无穷小（$x\to x_0$ 时）；

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小（$x\to x_0$ 时），特别 $c=1$ 时，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小（$x\to x_0$ 时），记为 $f(x)\sim g(x)$，$(x\to x_0)$。

③ 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则 $g(x)=o(f(x))$，$(x\to x_0)$，称 $f(x)$ 为比 $g(x)$ 的低阶无穷小（$x\to x_0$）。

5）极限存在的两个准则

（1）单调有界数列必有极限。

（2）夹逼定理：在某一无限变化过程中，有三个变量 $u,v,w$，它们有关系 $u\leqslant v\leqslant w$，若在该过程中 $u$ 与 $w$ 都以常数 $A$ 为极限，则在该过程中，变量 $v$ 也以 $A$ 为极限。

6）极限的四则运算法则，两个重要极限

（1）在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在的条件下有：

① $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

③ 当 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$

（2）两个重要极限：

① $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

7）一个常用的定理：数列极限与函数极限之间的关系

命 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$是任何一个趋于 $x_0$ 的数列，定义 $f(x_n)=y_n$，则：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$对于任何一个以 $x_0$ 为极限的数列$\{x_n\}$，所对应的数列$\{y_n\}$均有$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

8）函数连续性的概念

基本初等函数在它们各自的定义域中连续和初等函数在其定义区间中连续。

（1）设函数 $f(x)$在 $x_0$ 的某邻域中有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则称 $f(x)$在点 $x_0$ 处连续，而$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$称 $f(x)$在 $x_0$ 点处左连续，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$称 $f(x)$在 $x_0$ 点处右连续。

（2）使函数 $f(x)$不连续的点，称为 $f(x)$的间断点，若 $x_0$ 是 $f(x)$的间断点，则可能是以下情形之一：

① $f(x)$在 $x_0$ 处无定义；

② 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$无极限：

$(a)$ $f(x_0-0)$与 $f(x_0+0)$都存在但不相等；

$(b)$ $f(x_0-0)$与 $f(x_0+0)$之一不存在或都不存在。

③ $f(x_0)$有意义且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$。

9）闭区间上连续函数的性质

（1）$f(x)$在区间$(a,b)$内的每一点处连续，则称 $f(x)$在开区间$(a,b)$中连续。

（2）$f(x)$在$(a,b)$中连续，且 $f(a+0)=f(a)$，$f(b-0)=f(b)$（即在 $a$ 处右连续，在 $b$ 处左连续），则称 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则：

① 在$[a,b]$上 $f(x)$有界；

② 在$[a,b]$上 $f(x)$有最小值和最大值；

③ 设 $f(a)\neq f(b)$，且 $c$ 为 $f(a)$和 $f(b)$之间的任何一个实数，则必有 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=c$。

特别当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\zeta\in(a,b)$，使 $f(\zeta)=0$。

10）求极限的方法

（1）利用已知极限结合极限四则运算法则求极限。

**例 11** 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-9n+5}{7n^2+4n+1}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-9n+5}{7n^2+4n+1}$$

“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的未定式，不能直接求极限

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{9}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{7+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$$

先用分式基本性质：分子、分母同乘以$\dfrac{1}{n^2}$

$$=\frac{1}{7}$$

已知：$\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{1}{n}=0$，运用极限四

**例 12** 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+6^n}{5^{n+1}+6^{n+1}}$

解：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+6^n}{5^{n+1}+6^{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{6}\right)^n+1}{5\left(\frac{5}{6}\right)^n+6}$$
$$=\frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{6}\right)^n}{6+5\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$
$$=\frac{1}{6}$$

"$\frac{\infty}{\infty}$"型的未定式，不能直接求极限

分子、分母都乘以$\left(\frac{1}{6^n}\right)$

已知：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{6}\right)^n=0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$

用极限四则运算法则

**例 13** 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

解：
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

"$\infty-\infty$"型的未定式，不能直接求极限

分子、分母同乘$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式

分子、分母再同乘$\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1$

(2) 利用变量替换法求极限。

定理：设函数 $g(u)$ 在 $b-r_1<u<b+r_2$ 且 $u\neq b$ 中有定义$(r_1>0)$，函数 $u=f(x)$ 在 $a-r_2<x<a$，$a<x<a+r_2(r_2>0)$ 中有定义，且 $x\in(a-r_2,a)\cup(a,a+r_2)$ 时，总有 $f(x)\in(b-r_1,b)\cup(b,b+r_1)$。

若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 且$\lim\limits_{u\to b}g(u)=A$，则 $g[f(x)]$在$(a-r_2,a)\cup(a,a+r_2)$中有定义，且
$$\lim_{x\to a}g[f(x)]=\lim_{u\to b}g(u)=A$$

在具体运用时，如果要求$\lim\limits_{x\to a}F(x)$，又不易直接求出，则应想办法把 $F(x)$表示成复合函数：$F(x)=g[f(x)]$，且 $f(x)$，$g(u)$具有上述性质，这往往是通过变换 $x=\varphi(u)$及逆变换 $u=\varphi^{-1}(x)$来实现，此时：$F(x)=F[\varphi(u)]$。

**例 14** 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$ （$n$ 为正整数）

解：
$$\lim_{x\to0}\frac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$$
$$=\lim_{u\to0}\frac{u}{\frac{(u+1)^n-1}{a}}$$
$$=\lim_{u\to0}\frac{au}{(u^n+c_n^1u^{n-1}+\cdots+c_n^{n-1}u+1)-1}$$

"$\frac{0}{0}$"未定式，不能直接求极限

令 $u=(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1$，则 $x=\frac{1}{a}[(u+1)^n-1]$，

当 $x\to0$ 时，$u\to0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{au}{u[u^{n-1}+nu^{n-2}+\cdots+n]}$$

$$=\frac{a}{n}$$

牛顿二项式展开

$$(u+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^k$$

(3) 利用两个重要极限求极限。

**例 15** 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

解：
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+a+b}\right)^{x+a}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+b}{x+b+a}\right)^{x+b}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x+a}\right)^{-(x+a)}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{-(x+b)}$$

$$=\mathrm{e}^{-b}\cdot\mathrm{e}^{-a}$$

$$=\mathrm{e}^{-(a+b)}$$

“$\dfrac{\infty}{\infty}$”未定式极限

$$\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$$

$$=\left(\frac{x+a}{x+a+b}\right)^{x+a}\left(\frac{x+b}{x+a+b}\right)^{x+b}$$

看出这一结构是关键

重要极限：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

**例 16** 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

“$\dfrac{0}{0}$”型未定式

$$\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

看出这一结构是关键

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

(4) 利用函数连续的性质求极限。

① 设 $f(x)$在 $x=a$ 处连续，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)=f(a)\qquad 和\qquad \lim_{x\to a}f(x)=f(\lim_{x\to a}x)=f(a)$$

② 设 $g(u)$在 $u=b$ 处连续，$u=f(x)$有以下性质：

$$\lim_{x\to a}f(x)=b$$

则

$$\lim_{x\to a}g[f(x)]=g[\lim_{x\to a}f(x)]=g(b)$$

③ 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$，　$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$

则

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{B\ln A}=A^B$$

**例 17** 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$　$(a>0)$

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u\ln a}{\ln(1+u)}$$

“$\dfrac{0}{0}$”型未定式

令 $u=a^x-1$，由 $a^x$ 的连续性知：当 $x\to 0$ 时，$u\to 0$

$$=\ln a\frac{1}{\lim\limits_{u\to0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

$$=\ln a\cdot\frac{1}{\ln e}=\ln a$$

重要极限$\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$及$\ln x$的连续性

读者可以自己做：$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)\quad(a>0)$

**例 18** 填空题(1996，样卷，3 分)

$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________

答：$e^6$

解：$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim_{x\to0}e^{6\frac{x}{\sin x}\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}}}=e^6$$

"$1^\infty$"型未定式

看出$e^{\frac{x}{\sin x}\ln(1+3x)}=e^{\frac{6x}{\sin x}\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}}}$是关键

(5) 利用等价无穷小因式替换法求极限。

常见的等价无穷小：当$x\to0$时：$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$。用这种方法常可使计算简单化。

**例 19** 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2x}$

解：
$$\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-\sqrt{\cos x})(\cos x+\sqrt{\cos x})}{\sin^2x(\cos x+\sqrt{\cos x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-\cos x}{x^2(\cos x+\sqrt{\cos x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x(1-\cos x)}{x^2(\cos x+\sqrt{\cos x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2\cos x}{x^2(\cos x+\sqrt{\cos x})}$$
$$=-\frac{1}{4}$$

"$\frac{0}{0}$"型未定式极限

分子、分母同乘：$\cos x+\sqrt{\cos x}$

当$x\to0$时，$\sin x\sim x$，

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

用$x$代替$\sin x$

用$\frac{1}{2}x^2$代替$1-\cos x$

$\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$

(6) 用洛比达法则求极限。

① 设函数$f(x)$与$g(x)$满足以下条件：

(a) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$

(b) $f(x)$和$g(x)$在某个$0<|x-x_0|<\delta$有定义

(c) $f'(x)$和$g'(x)$在$0<|x-x_0|<\delta$中存在，$g(x)\neq0$，且有$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$(有穷或无穷)，则有：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda\quad(\text{有穷或无穷})$$

(这是"$\frac{0}{0}$"型的)

② 设函数$f(x)$与$g(x)$满足以下条件：

(a) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$