

数理逻辑基础

希爾伯特著
阿克曼

科学出版社

D. HILBERT UND W. ACKERMANN
GRUNDZÜGE DER THEORETISCHEN LOGIK
SPRINGER-VERLAG
BERLIN GÖTTINGEN HEIDELBERG
1949

內 容 提 要

本書是數理邏輯的有名經典著作之一，內容包括四章：

第一章為命題演算，介紹基本邏輯聯結詞及其各種性質，並就命題演算而給出一個公理體系，證明其不矛盾性、完備性及互相獨立性。

第二章為類演算，兼討論如何從類演算而推出亞里士多德邏輯。

第三章為狹義謂詞演算，對該演算作出公理體系，同樣討論其不矛盾性、完備性及獨立性，對判定問題作簡單而詳盡的介紹。

第四章為廣義謂詞演算，詳細介紹邏輯謬論產生的情況，因而須用類型論加以解決。最後並舉例詳細說明類型(層次)演算在數學方面的應用。

數 理 邏 輯 基 礎

希爾伯特
阿克曼 著
莫紹揆 譯

*

科學出版社出版 (北京朝陽門大街 117 號)

北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

中國科學院印刷廠印刷 新華書店總經售

*

1958 年 7 月第 一 版
1958 年 7 月第一次印刷
(京) 0001--2,280

書號: 1277 字數: 157,000
開本: 787×1092 1/27
印張: 8

定價: (10) 1.10 元

譯 者 的 話

關於這本有名的著作，讀者可參考俄譯本序言的論述，本書不再另作介紹。這裏只想說明以下幾點：

1. 原書在作形式推演時，有很多公式沒有編號，因此徵引時每每有“前面兩行的公式”“某某公式之後第三行的公式”這類字樣。爲方便起見，譯者把後面要徵引的公式一律編號。爲使這類編號不與原來的編號相混，我們以甲乙丙丁等字樣標明，以便識別。

2. 本書譯名一律採用“數學名詞”（科學出版社 1956 年出版）所定出的，遇該書未載入的則由譯者斟酌譯出，主要有：Stufe 譯爲“層次”，Gegenstand 譯爲“客體”。

3. 原書有英譯本（Robert E. Luce 主譯，1950 年出版）及俄譯本（А. А. Ерофеев 譯，並由 С. А. Яновская 加評註，1947 年出版），這二譯本都由原書第二版譯出，而本書則根據第三版譯出。因第三版作了不少的更改，故本譯本與英俄譯本有顯著的不同。盡管如此，遇可能時譯者還是詳細地參考該兩譯本，希望錯誤因而減少。

4. 本書所以要譯出原書第一版中第四章 §5—§9 的理由，可參見俄譯者序言。

莫 紹 揆

俄譯者序言

本書中所敘述的理論邏輯或數理邏輯（這更正確些），依照歷史的習慣，大家都認為是從萊布尼茲（Leibniz）的“一般文字”開始，其後便是十九世紀的德莫干（De Morgan）、布爾（Boole）、耶方斯（Jevons）、施累德（Schröder）、皮爾斯（Peirce）諸人的著作。這種說法雖則在一定程度上是正確的¹⁾，但基本上，數理邏輯應該算是屬於最新科學之一，可以作為二十世紀科學的特徵。

二十世紀以前，數理邏輯本質上已經成了純數學的一支。由於一系列的考慮我們才稱它為數理邏輯。它的成長首先是以數學的需要為條件的。非歐幾何的創立（在非歐幾何的歷史中，我們的同胞洛巴契夫斯基（Н. И. Лобачевский）佔有一個中心的地位）以及現代數學集合論的方法的出現，在數學中引起了概念上的激烈的改變。這改變的兩面性的本質已經被列寧在“唯物論與經驗批判論”中揭開了。無論在質或量方面，科學在它歷史上出現了空前未有的發展，它不可避免地走上了唯物辯證論的道路。但在帝國主義的情況下，這個進步却又產生了寄生在科學之上的唯心論派哲學的反動企圖，想利用科學的每一個新進展來達到自己的目的。這種情景（其詳細情形這裏不可能來談論了），在介於數學與邏輯之間的數學基礎問題的領域上已經展開。早在幾何研究（後來產生非歐幾何）的開始時期，數學已經必須審查各種各樣不同的論證，自稱有權叫做歐氏平行假設的證明。因為這時經常發

1) 這裏還須提到俄國學者喀山的數學家及邏輯學家 П. С. Порецкий 的有創見性的著作。

現，在這些論證中，總在其前提內或明或暗地引用了率直地等價於平行公理的假設，所以很自然地發生下列要求：把歐氏“原本”系統實際上所需要的一切假設都公佈出來。但是直到二十世紀初，在有名的希爾柏脫(Hilbert)的“幾何原理”一書內才把這個工作真正完成了。希爾柏脫詳細地列出了幾何內基本的未定義的概念，借助於它們而定義其餘的概念，又詳細列出了基本的未證明的命題，借助於它們而證明其餘的命題。但是爲了要證明所列舉的公理，一方面確實足以推出某個科學的一切真命題，另一方面借它們之助又不可能推出假命題，那末必須不但要考察所用的全部假設，而且要考察從它們而推出新命題時所用的推理方法。在十九世紀最後二十五年內，皮亞諾(Peano)與弗雷格(Frage)彼此獨立地從事這項工作。這時，必須闡明由於最初等的數學概念與數學命題之間的最深奧及最基本的邏輯關係，使得弗雷格甚至產生了一個印象，認爲他能够定義算術中的無定義的概念，能證明算術中的未證明的命題，並把它們化歸到更一般的邏輯概念與邏輯命題(“規律”)去。但是，還在弗雷格生時，在二十世紀初，羅素(Russel)已經在弗雷格的系統中發現了矛盾。儘管在弗雷格的發現中有很多具體的關係式實際上是成立的，但整個說來，他的系統是不適當的，因爲借它之助可以證明出隨便一個命題來。爲了要避免所謂“廣義謂詞演算的諍論”，羅素提出了有名的“類型區分論”，它立即帶來了新的困難，引起了猶豫不決的、混亂的主觀主義的立場。1910—1913年期間，一共有三大卷的著作，即羅素與懷特黑(Whitehead)的“數學原理”出版了，從它出發可以向兩個方向進行：或者正如它的著者們所做的，對唯物論越來越採取侵略性的攻擊並對經院哲學加以保護(爲這種意識所武裝的羅素，他宣傳立即使用原子彈以對付蘇聯，並非偶然的)；或者多少有些猶豫地(在帝國主義社會的情況下，這種猶豫是很自然的)，或多或少不可避免地加入了拒絕羅素主觀主義立場的道路。這兩條道路都被資產階級學者所採

用。這裏必須強調指出，唯心立場不變地引起新的困難，反之，最有價值的成就却屬於那些數學家，他們拒絕主觀主義、形式主義並且還拒絕了與這些主義有關的在我們思想方法上所作的限制。

還可指出，數學證明論（它的研究對象已不是數學的特別對象如數、點、直線以及函數、集合、數或點間的關係等等，而是在數學內處理它們的手段及方法）的創立，在數學專家們手裏已被判明它絕不限於對數學基礎以及解決其中所發生的困難來說才是必要的，因為借助於證明論已經得到了——現在還繼續得到——一系列特別的而且越來越重要的數學結果。

但數理邏輯這個命名不但由於它是從數學的需要而產生，並且由於它的絕大多數的新結果都是借數學專家們之手而獲得的。它構成一個最典型的數學部分，不但可以當作數理邏輯還可以當作邏輯數學。因為在極大程度上它是把數學方法應用到形式邏輯問題上的結果。

但是要熟識它並不限於對數學家才是必要的。不用再說，數學基礎方面的哲學困難問題對哲學家來說是有興趣的，而數學證明論的具體問題，特別，數學在邏輯問題上的應用對邏輯專家來說亦應該是有興趣的。掌握了數理邏輯的基本知識後，可以進而熟識一系列對他們更有興趣的問題。這裏他們將遇到關於內容真確性與形式證明之間的關係的一些具體結果；關於形式證明的可能性的界限問題的完全解法；關於在直接的數學要求的範圍內構造出模態邏輯的企圖；關於對歸納邏輯問題的一些觀點；直接有關於推廣古典的亞里士多德（Aristotels）三段論的一系列的問題；甚至於遇到數理邏輯的最簡單部分，所謂“命題演算”，例如說，在繼電器系統的結構上的純技術應用等等。

關於數理邏輯及其應用的著作的數目每天都在強烈地增長着。正如上述，這領域的基本結果是屬於數學專家們的。它們主要是公佈在數學雜誌上。關於蘇聯學者的著作可舉波茲瓦爾（Б.

А. Бочвар)、格里文科(В. И. Гливенко)、舍加勒金(И. И. Жегалкин)、科爾莫哥洛夫(А. Н. Колмогоров)、馬里采夫(А. И. Малышев)、馬爾科夫(А. А. Марков)、諾維科夫(П. С. Новиков)、桑芬克勒(М. И. Шейнфинкель)、謝斯塔科夫(В. И. Шестаков)等的著作。它們大多數印在“數學匯刊”(Математический Сборник)、“蘇聯科學院報告”(Доклады)、“蘇聯科學院院報”(Известия)(數學之部)及“莫斯科大學學報”(Учёные записки)等刊物上面。現在幾乎沒有一篇邏輯文章或一本邏輯書,甚至於初等教科書不是在一定的程度上出現有現代數理邏輯的結果及方法的。甚至可以說,數理邏輯的任何一章,連最初等的在內,那裏好像一切早已明確了的,亦不斷地受到改善。而且有時甚至還要用到現代數學的非常有力的方法(例如代數學的:如格論,環及代數論)。爲了要得到命題演算的不同變種的拓撲學解釋(這種解釋的最簡單情形是用圓來表示概念的通常方法),便建立了所謂有閉包的布爾代數,它與拓撲學是有密切關係的(而它本身又使得集合論的形式研究可能得到某種拓撲的解釋)。

因此,爲了能够追隨現代的數理邏輯的文獻,我們必須把有關數理邏輯方法的系統性課程作徹底的研究,甚至要弄清許多證明的細節。對初學者說,尤其對不習慣閱讀數學文獻的人來說,這將花費很多的工夫,但這時特意地去熟識數學倒也並不需要。如果不通過這個熟識技巧方法的預備階段,就不可能批判地追隨數理邏輯的廣大文獻。但批判地追隨却是必須的。正如上述,在國外的數理邏輯的文獻中,我們可以遇到有價值的科學成果,也可以遇到利用它們來作極端黑暗愚昧的宣傳的反動唯心企圖。但事實上却是:所得的結果越有力地加以證明,我們就越看得清楚,它保證了辯證唯物的哲學立場的正確性;事實上,資產階級學者亦可能付出被迫脫離主觀主義及神祕主義的代價而獲得極重要的結果。

難怪有名的數理邏輯專家哥德爾(K. Gödel)被迫承認,羅素

對於數學的哲學問題的見解所以會發生困難，原因在於他的主觀主義。哥德爾斷言說，爲了要克服這個困難，必須承認，事物的集合及用以確定集合的性質及關係是現實地存在的，與我們的主觀結構無關。他斷言說：“容許這樣的對象，也正和容許物理的物體那樣地合法。爲了得到一個合適的數學體系，它們是必要的，正如爲了得到關於我們五官感覺的合適的體系，物理的物體是必要的那樣，在這兩種情形下，都不可能把關於本質的命題解釋爲關於“已給”的命題”。爲了要判斷這個斷言的原意，當然必須要知道哥德爾把抽象這個構造過程理解作什麼，但無論如何，他所說的已經有足够的合理性了，正如在評閱他的著作時伯爾奈斯 (Bernays) 對哥德爾立場所說的那樣。伯爾奈斯說：“就哥德爾關於數學的邏輯基礎方面的哲學問題的整個立場說來，主要的一點應該在於他拒絕了企圖把數學內容作現象主義觀點的解釋。他並使我們注意到，數學與理論物理有一個共同點，即必須假設一些對象及關係的存在性，且與我們的感覺及意識上的構作無關的存在性。”

同時我們又遇到一位相當有權威的專家克里 (Curry) 的斷言。他說：“顯然，現實主義的觀點在現時是不應該認真地採用的。當然，它是原始的觀點——原始人的數學本質上是經驗的，而這對於簡單的算術命題例如 $2 + 2 = 4$ 是行得通的，但現代數學的無窮概念在外界却没有其原像，這一點是無需討論的。”當然，對此我們可以說，克里沒有辯證唯物論的概念，因而就採用了唯物論的敵對者所喜愛的把唯物論庸俗化的方法。反之，照馬克思列寧主義的立場說來，對唯心論的曲解所作的意識鬥爭必須以掌握技術爲先決條件，它可把敵人自己的武器拿來變成反對敵人的武器。

本書是從十九世紀末及二十世紀三十年代中有名的數學家希爾柏脫的講義稿改寫而成的，並由他的學生阿克曼 (W. Ackermann) 寫成。與數理邏輯有關的哲學問題及它在數學基礎問題上的應用，包括被進一步的科學發展所駁斥了的希爾柏脫自己的形式主

義立場，在其中根本沒有討論。本書原來計劃是作為較後出版的書的導引的，即作為希爾柏脫與伯爾奈斯的“數學基礎”（共兩卷）一書的導引的，在後一書中包括有對這領域的基本成果（直到1940年為止）的更詳細的分析。因此，在這本書中沒有涉及，或者幾乎沒有涉及所謂元邏輯（metalogic）的問題，即關於構作邏輯的“形式體系”的一般理論，並討論如何證明它的矛盾性及完備性的問題以及這證明是否可能的問題；因而引入並且後來發展為數學上算法的一般理論的遞歸函數論，以及哥德爾後來所引用的“元邏輯算術化”等在本書中亦都沒有討論。關於所謂“狹義謂詞演算”的矛盾性（這演算的規律可以說是由有窮的客體領域抽出而伸展到無窮領域去的，即對於一個已給的無窮客體領域的情形，我們有權把它當作有窮的去考慮），這一點本書也沒有討論到（儘管這種討論是必要的）；與古典邏輯不同的邏輯“形式體系”，例如科爾莫哥洛夫的不用排中律的“問題演算”等等，本書也根本沒有討論到。

著者嚴格地限於最必要的材料，可是却給以極詳細的證明。讀者如果慎重仔細地研究了這本書，便能够掌握這方面的技術。本書寫得非常簡要並且是假定讀者習慣於使用數學文獻的。但是顧到更廣大範圍讀者的興趣，我們加了一些評註¹⁾，這並不是作為補充而首先是作為闡釋的。尤其是對第二章首兩節的評註，將使初等邏輯的教師發生興趣，因這是亞里士多德邏輯的一種形式化。

這譯本是根據原書第二版，它與第一版有很大的不同。其中改正了第一版的一些不精密處，例如關於狹義謂詞演算的“代入規則”的不準確的表述。有趣的而且重要的是在第三章中加入了關於“狹義演算”的公理及規則的完備性與獨立性的證明，特別，包含了有名的累文漢（Löwenheim）的結果，它標誌着討論邏輯“演算”的可能性界限的開始。在第四章關於“廣義演算”的敘述作了有意

1) 這些評註並未譯成中文——譯者註。

義的改進，該演算對於解決數學基礎的哲學問題是有特別意義的。但關於這我們必須指出下列一點。爲了要克服所謂“字義學的”諍論，羅索引進了“分支類型論”，因而它便傳播入整個數學並給數學引起了一系列的新困難。但是如果我們放棄羅素的主觀主義立場，又因“字義學的諍論”根本沒有威脅到數學，那末只使用“簡單類型論”已經很够了。因此在原書第二版內，著者根本排除了“分支類型論”及有關於它的困難的討論。但是對於閱讀數學的哲學問題的文獻來說，這個理論却有熟識的必要。此外，從純邏輯方面說，“字義學的諍論”不但有自身的獨立興趣，並且大量地使用於上述元邏輯的研究中。因此對於我們，下列的辦法是更合適的，如果不但引入（如著者所作的那樣）字義學的諍論，而且講授克服它們的可能方法並預告讀者，“分支類型論”這個複雜的邏輯方法之有意義，全在於應用到下列的公理系統，如果沒有這個理論預先考慮加以確定的話，這系統便不可能依照或多或少相應於通常的邏輯規律的法則而討論的。因此，我們認爲有必要把原書第一版中關於“分支類型論”及它的困難的那些節段放入附錄中。

希爾柏脫曾探討數理邏輯方法，希望借它之助可以證明他的數學上的形式主義及唯心主義的觀點是正確的，即把數學當作依一定規則寫出的無內容的公式的總體。但是邏輯的實際發展，且希爾柏脫自身所建立的方法都表明了他的希望的不現實性。這領域的科學發展不變地證實了馬克思列寧主義的哲學立場的正確性。但資產階級學者不願意承認這點，他們頑固地爲反對所有的唯物論現象而鬥爭，而且越來越兇惡了。一些唯心的“希望”遭到了破滅，但又出現了另一些，而且更爲反動。在由先進的馬克思列寧主義哲學所武裝起來的研究者手中，數理邏輯不但是發現新真理的武器，而且是揭穿反動意識的工具。

在應用到數理邏輯時我們必須特別理解日丹諾夫（А. А. Жданов）同志在關於亞力山大洛夫（Г. Ф. Александров）的“西歐

哲學史”的討論會上發言中所作的指示。日丹諾夫說：“現時的資產階級科學給僧侶階級、崇神主義添加了新論據，對這必須作無情的揭穿”。“除了我們——戰勝的馬克思主義國家及其哲學家——還有誰能領導反對墮落的醜惡的資產階級意識的鬥爭！除了我們，還有誰能給它帶來了致命的打擊！”

C. 雅諾夫斯卡婭

原著者第一版序言

本書對理論邏輯（又名數理邏輯，邏輯演算或邏輯代數）的處理方式，是我在大學內關於數學基礎問題的講稿（數學原理，1917—18 冬季；邏輯演算，1920 冬季；數學基礎，1921—22 冬季）中所發展及使用的。在準備上述的講稿時，我曾得到同事伯爾奈斯的重要支持及商量，他對這些講稿亦給以極精細的修正。我的學生阿克曼採用了並補充了這些材料，遂完成了整個材料的目前安排形式及表述形式（阿克曼曾以自立的有價值的著作出現於數學基礎的領域中）。

本書同時可以作為伯爾奈斯與我將在最近出版的另一本書的先導，並幫助對它的理解。後一本書處理數學基礎的方法，正如我在伯爾奈斯的有力合作之下所完成的一系列著作中所使用的那樣（數學的新基礎，Abhandlungen des mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität, Bd. 1, 157 頁，1922；數學的邏輯基礎，Math. Ann., Bd. 88, 151 頁，1922；論無窮大，Math. Ann., Bd. 95, 161 頁，1925）。

D. 希爾柏脫

哥丁根，1928 年 1 月 16 日

第二版序言

在數理邏輯基礎第二版中，對第一版的結構與次序完全保留。但初版後科學上的進展要求對本書在不超出原定的範圍內作一次仔細的檢查並給出各方面的改進與補充。

關於命題演算的公理化的進展，現在新作了一個簡短的回顧。此外第一第二兩章基本上保留不變。第二章中類演算的結構的敘述，就其本身說來，雖是值得—述的，但現在仍沒有改進，因為就本書的整個結構說來，它只佔一個很孤立的位置。對於第三章，首先是對謂詞演算的推演規則的處理有所改進，因為以前的表述不够精確。該章內所使用的公理系統的獨立性與完備性的證明，也開始加入，關於判定問題的一節，也補充了一些新結果的簡述。第四章大大地縮短了，因為自從羅素與懷特黑的分支類型論被大多數人放棄以後，再深入討論它已經證明是不必要的。因而第二層次謂詞演算的結構以及一般的層次演算的結構便得到一個重要的改進及補充。

用語方面已經和希爾柏脫—伯爾奈斯的數學基礎一書相協調。例如“函詞演算”一語全部改為“謂詞演算”，“邏輯和”與“邏輯積”二語，已採用一般邏輯用語，完全改為“合取”及“析取”。

我特別感謝伯爾奈斯(秋里西)，他曾讀過本書的初校校樣，並給以大量的意見。我也感謝堅欽(哥丁根)先生及施密特(馬堡)先生，施勒茲(閔斯朵)先生，他們都給我以種種的建議及指示，前者還讀過本書的原稿。對他們我衷心地致以感謝。

W. 阿克曼

布爾斯坦浮特，1937年11月

第 三 版 序

本版對第二版的修改是比較少的。除却一些微小的改進及補充外,第二章 §1 §2 有所擴充,它們以前的敘述實在太短了。在第三章中關於謂詞演算的代入規則以及哥德爾的完備性定理的處理均有所改進,關於判定問題也添入一些新結果。最大的改變是第四章 §4 處所給的層次演算的結構。此外,又加入一節簡短的結語。

我仍然感謝伯爾奈斯先生(秋里西),在編輯原稿時得到他的各種意見及指示。又感謝施勒茲先生(閔斯朵),他給出了各種建議。

W. 阿 克 曼

呂德賽特, 1949 年 3 月

目 錄

譯者的話.....	i
俄譯者序言.....	ii
原著者第一、二、三版序.....	x
導言.....	1

第一章 命題演算

§ 1. 基本邏輯聯結詞的引入.....	3
§ 2. 等值性；基本聯結詞的可省約性.....	5
§ 3. 邏輯表達式的範式.....	11
§ 4. 永真的複合命題的刻畫.....	13
§ 5. 對偶原則.....	15
§ 6. 邏輯表達式的析取範式.....	16
§ 7. 由一些給定的基本命題所能作成的複合命題的總體.....	17
§ 8. 關於普遍有效性及可滿足性問題的補充注意.....	20
§ 9. 由給定的公理而作的一切推論——系統性的綜覽.....	22
§ 10. 命題演算的公理.....	26
§ 11. 由公理推演公式的例子.....	29
§ 12. 公理系統的不矛盾性.....	36
§ 13. 系統的獨立性與完備性.....	38

第二章 類演算(一元謂詞演算)

§ 1. 命題演算符號在內容上的新解釋.....	41
§ 2. 類演算與命題演算的聯合.....	45
§ 3. 傳統的亞里士多德推理式的系統地推演.....	50

第三章 狹義謂詞演算

§ 1. 以前的演算的不充分性.....	56
----------------------	----

§ 2.	謂詞演算在方法論上的基本思想	57
§ 3.	關於謂詞演算的應用的初步提示	61
§ 4.	謂詞演算中記號的精確化	65
§ 5.	謂詞演算的公理	68
§ 6.	永真公式系統	70
§ 7.	替換規則；一公式的否定的作成	78
§ 8.	推廣的對偶原則；範式	80
§ 9.	公理系統的不矛盾性及獨立性	85
§ 10.	公理系統的完備性	89
§ 11.	由給定的前提所導出的推論；與永真公式的關係	98
§ 12.	判定問題	107

第四章 廣義謂詞演算

§ 1.	第二層次的謂詞演算	120
§ 2.	謂詞謂詞的引入；數目概念的邏輯處理	129
§ 3.	集合論的基本概念在廣義演算中的表示	133
§ 4.	邏輯諍論	136
§ 5.	層次演算	144
§ 6.	層次演算的應用	159
§ 7.	對層次演算的最後附註	167

附錄 原書第一版第四章最後幾節

§ 5.	層次演算的方法	170
§ 6.	層次演算的不足性	174
§ 7.	可化歸性公理	177
§ 8.	可化歸性公理的應用	179
§ 9.	對於層次演算的最後附註	186
	參考文獻	189
	德中名詞對照表	191
	中德名詞對照表	197
	德中人名對照表	200

導 言

理論邏輯，又名數理邏輯或符號邏輯，是把數學上的形式方法應用到邏輯領域上去的結果。它（譯者按：指形式方法）在邏輯上使用一種形式語言，這語言在表示數學關係時早已使用。在今天，如果有人想只利用日常語言來建立數學的某一個部門，這只會被人當作烏托邦的空想。自古以來，在數學各部門中例如在代數學中所獲得的大進步，主要地可以說在於：它創造了一套有用的、有效率的形式體系。形式語言在數學上所已做到的，即能夠對它的對象作一個確切的、科學的處理，在理論邏輯上它也應當做到。的確，判斷、概念等等之間的邏輯關係現在可用公式來表達而絕不致於有含糊的解釋，但在語言的表達式中，這含糊却是極易出現的。根據三段論所作的邏輯推理，現在被分解成最基本的元素而且表示成由開始公式出發根據某些規則而作的形式變形，這些規則又與代數學中的演算規則非常類似；邏輯思考便反映成邏輯演算了。這個演算使得我們有可能去從事探索一些可獲得豐富結果的問題，而純粹內涵的邏輯思考對此，原則是無能為力的，例如，決定由某個已給的前提到底能夠推出那些命題等等都屬於這類問題。近數十年來邏輯演算顯得特別重要，因為這時它已經發展成為對數學基礎的探求來說是一個不可缺少的工具了。

數理邏輯這個思想首先是由萊布尼茲明顯說出的。德莫干（1806—1876）與布爾（1815—1864）得到一些初步結果，以後的整個發展都根原於布爾。他的後繼者耶方斯（1835—1882）尤其是皮爾斯（1839—1914）更豐富了這年青的科學。施累德在他的“邏輯代數講義”（1890—1895）一書中把他的前輩的各種各樣的結果作