

弹性管束换热器 原理与应用

程 林 著

科学出版社

弹性管束换热器原理与应用

程 林 著

科 学 出 版 社

2001

内 容 简 介

换热器作为一种通用工艺设备,应用十分广泛,其性能的提高将带来巨大的经济与社会效益。囿于传统方法的换热器设计理论在解决换热器内流体诱导振动与传热表面积垢等方面尚存在许多困难,在更广阔的思路上的讨论换热器设计与运行的诸多问题具有重要意义。

本书提出了利用流体诱导的有限振动防止剧烈振动所造成的元件损坏,同时,利用振动提高对流换热系数,降低污垢热阻,进而实现复合强化传热的新理论与新方法。书中进行了换热器内流体诱导振动的讨论,分析了振动过程中传热元件的受力情况,详细介绍了弹性管束换热器的设计过程,论述了弹性管束换热器传热系数和流动阻力的确立,对换热器的动态特征作了仿真,展望了流体诱导振动强化传热研究的前景及近期研究的可能领域。

本书思路清晰,具有强烈的创新意识,对从事传热研究与换热器设计的技术人员有启发作用。本书可供从事热力、化工、轻工等专业的工程技术人员参考,也可作高等学校有关专业的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

弹性管束换热器原理与应用/程林著. -北京:科学出版社, 2001

ISBN 7-03-008932-4

I. 弹… II. 程… III. 热力工程-换热器 IV. TK172

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第56896号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年2月第一版 开本:850×1168 1/32

2001年2月第一次印刷 印张:3 3/4

印数:1—4 150 字数:87 000

定价:15.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

主要符号表

拉丁字母符号

- A 振幅, m; 迎流截面积, m^2
 C 阻尼系数
 C_D 阻力系数
 C_f 摩擦阻力系数
 C_L 升力系数
 C_m 附加质量系数
 D 圆柱体直径; 非圆柱体时, 为垂直于来流的最大宽度, m
 d_i 圆管内径, m
 d_o 圆管外径, m
 E 材料的杨氏弹性模量, N/m^2
 F_D 作用在传热元件上的阻力, N/m
 F_L 作用在传热元件上的升力, N/m
 f_s 紊流脉动频率, Hz
 f_N 系统的固有频率, Hz
 I 圆管的惯性矩, m^4
 k 弹性系数
 L 两个连续管排的中心线距离, m
 l 管子长度, m
 M 附加质量系数
 M_n 放大系数
 m 单位长度传热元件的有效质量, kg
 m_o 传热元件的有效质量, kg
 Nu 努谢尔特数
 P 压力, Pa
 Re 雷诺数
 Re_o 振动雷诺数

r 圆管半径, m
 S Strouhal 数
 T 管束的横向管间距, m
 U 管束内的流体速度, m/s
 U_o 来流速度, m/s
 U_c 临界流体速度, m/s
 x_l 管排相对距离
 y_o 振幅, m

希腊字母符号

α 对流换热系数, $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$
 β 不稳定系数; 动力放大系数
 δ 对数衰减率
 μ 动力粘度, $Pa \cdot s$
 ν 运动粘度, m^2/s
 ρ 流体密度, kg/m^3
 τ 剪切应力, N/m^2
 ω 角频率, rad/s
 ω_N 系统的固有角频率, rad/s
 ξ 阻尼比

目 录

主要符号表	iii
第一章 引言	1
第二章 管壳式换热器内的流体诱导振动及传热元件 受力分析	6
第一节 漩涡脱落诱导振动	6
第二节 紊流抖振	13
第三节 流体弹性激振	16
第四节 传统布置方式的换热器传热元件的振动受力分析	28
第三章 弹性管束设计及振动特性分析	34
第一节 弹性管束结构设计与振动特性分析	34
第二节 弹性管束固有频率的测定	46
第三节 脉动流诱导弹性管束振动的理论求解	49
第四节 弹性管束流体诱导振动试验	53
第五节 与直传热管振动特性的比较	62
第四章 流体诱导振动复合强化传热	68
第一节 一般表面振动强化传热	68
第二节 流体诱导振动复合强化传热	71
第三节 弹性管束换热器的设计	87
第五章 弹性管束换热器的动态特征分析与控制系统 设计	90
第一节 影响热水供应系统动态特性的因素分析	90
第二节 数学模型的求解和动态特性仿真	94
第三节 弹性管束换热器动态特性的实验研究	96
第四节 控制系统设计及控制过程仿真	98
第六章 展望	102
参考文献	105

致谢	110
----------	-----

第一章 引言*

换热器内流体诱导振动与传热表面积垢是传热技术应用中长期未能解决的世界性难题。换热器内流体诱导振动导致剧烈的噪声与元件损坏,污垢则造成巨大的资源与能量损失。流体诱导振动与污垢问题的复杂性、研究对象和研究方法近乎一成不变的固执使得人们至少在目前还得不到解决这些问题的时间表。也许,在换热器基本结构上作一些具有突破性的变革,才是解决问题的一种出路。

换热器作为一种不同介质间热交换的通用工艺设备,应用十分广泛,其性能的每一份提高都会带来极其巨大的经济与社会效益。在世界各国科学家的共同努力下,换热器及相关技术近20年来迅速发展,几乎在其研究的各个领域都取得了令人鼓舞的进步^[1]。但与此同时,一些长期未能解决的问题更加凸现出来,成为制约换热器技术进一步发展的决定性因素。McGraw-Hill在1981年出版的“Heat Exchangers: Thermal-Hydraulic Fundamentals and Design”^[2]一书中撰文指出,换热器设计中当时尚未解决而又十分急迫的问题有流体诱导振动、传热表面积垢、混合物的沸腾、两相流的流动分布及湍流流动的模拟等五个方面。十几年过去之后,我们今天面对的仍然还是这些相同的问题。

流体诱导振动和传热表面污垢与其他几个问题相比会对换热器造成更直接的危害,人们对此予以积极的关注并为之付出了不

* 本书作者的研究工作得到国家自然科学基金委员会的资助,资助项目的编号为50076022。

懈的努力。但直到目前为止,不仅这些问题没有得到满意的解决,而即使是那些未知的疆域我们也并未完全知晓。

换热器内的流体诱导振动会导致剧烈的噪声及元件的损坏^[3]。换热器振动破坏的实例很多,未经报告的则可能更多^[4]。1969年TEMA(美国管壳式换热器制造者协会)调查了由11家公司制造的42台换热器,其中24台发生振动;1972年HTRI(美国传热研究公司)调查了66台换热器,其中有58台发生不同程度的振动^[5];近年来,换热器振动破坏的实例更有增多的趋势。因为在现代换热器设计中,一方面比较倾向于设备的大型化,一方面又倾向于流动的高速度以提高传热系数和减少污垢热阻,因此增加了发生振动的可能性。

在换热器内部,平行于传热管轴线流动的纵向流和垂直于传热管轴线的横向流,都有可能激发传热元件的振动。在一般情况下,纵向流所激发的振动振幅较小,危害性不大,往往可以忽略,只有在流速远远高于正常流速的场合,纵向流激振才需考虑^[6~8]。而横向流在正常流速下就可能引起较大振幅的振动,对传热元件的危害最大。因此,人们更感兴趣的是,横向流激振的机理以及以这些机理为基础的防止振动的方法。目前,有关文献提出了许多横向流激振的机理,包括漩涡脱落、紊流抖振、流体弹性激振、声共鸣等等。研究者围绕着这些机理的研究做了大量工作,无论是理论还是实验都取得许多进展,提出了不少新的理论解释与实验判别式^[9~12]。这些研究在指导换热器设计方面都起到了积极的作用。但必须指出的是,所有这些预测振动的理论和方法还不足以成功地预测换热器传热元件的破坏,能说明的只不过是哪些换热器容易遭受损害。预测缺乏精确性的原因来自:

- (a) 通过管束流动的复杂性;
- (b) 流体诱导振动时过多的未知因素;
- (c) 振动阻尼的不确定;
- (d) 传热元件的磨损和破坏速度难以准确计量,等等。

显然,就目前研究情况来看,提出一项综合性的预防流体诱导

振动损坏的准则使之能应用于任何一种换热器的设计之中,还需要更多的耐心与等待。

换热器内传热表面积垢使传热能力大幅度降低,影响了换热器的基本效能。污垢是热的不良导体,由于换热器内传热元件的传热系数一般较大,其壁面上的污垢热阻对传热可以起到控制性的作用。污垢恶化了换热器的传热性能,增加了原材料消耗;同时还会因为垢层的增加而减少流通面积,导致流动阻力增加。此外,传热表面污垢的聚集常常引起局部过热而使元件的机械性能降低,从而引发事故。污垢的聚集也常常导致垢下腐蚀,威胁设备的安全运行^[13]。

与流体诱导振动相比,人们对污垢的研究要早得多。在 1756 年就有了 Leidenfrost 关于加热面水滴蒸发后留下的沉积物的观察报告^[14]。20 世纪 30 年代 Sieder 提出了污垢系数的概念^[15]。1941 年污垢系数列入了 TEMA 标准^[16]。1960 年美国传热研究公司 (HTRI) 在组织指导传热学各领域的研究工作时,将污垢列为重点研究领域之一^[17]。1969 年,英国 Winfrith 原子能研究所也开始了污垢研究计划。20 世纪 70 年代的石油危机,促使人们对污垢问题更加重视。第六届国际传热大会(1978 年)将污垢列为会议的主题之一^[18];接着,第一次国际污垢问题学术会议在 1979 年召开。两年以后,举办了第二次这一问题的国际学术会议^[19]。

污垢研究在 20 世纪 80 年代以后基本上沿着三个方向发展。首先是对污垢的形成过程进行理论分析与实验研究,力图为换热设备的设计提供一个通用而又准确的预测模型^[20~22];其次是污垢监测技术的开发研究^[23];三是污垢对策的研究^[24]。然而,尽管人们在这三个方面做了很多工作,但无论怎样都不能说是完全成功的。

在污垢机理研究方面,由于污垢的形成是在动量、能量和质量传递同时存在的多相流动中进行的,其过程相当复杂,涉及到传热学、流体力学、化学动力学、胶体化学、统计力学和表面科学等不同学科的基础理论。多学科的交叉阻碍了研究的进程,目前的工作状态离解决这一问题确实还很遥远。

在污垢的监测技术开发方面,自从美国传热研究公司(HTRI)推出了第一台污垢实验测量装置以来,由于计算机应用技术的发展,污垢监测与数据采集系统达到了一个新的高度。但所有这些监测装置,都是通过污垢热阻的测量来进行污垢监督,并不能直接反映污垢的状态,而相比之下后者显然更不应该被忽视。

在污垢对策研究方面,主要工作是 80 年代中期 HTRI 和 TEMA 合作,对广泛应用的 TEMA 污垢系数作了全面的检查、修订和补充,公布了新的 TEMA 推荐值^[25]。但人们普遍感到,对于不同的换热器来说,这些数值仍然是过于的笼统。

关于污垢的研究经过几十年的努力,积累了许多有价值的资料与数据,对污垢形成的过程有了基本的了解,对一些运行参数对污垢进程的影响也有了初步的认识。但直到最近,对污垢特性的预测仍然处于无把握状态^[26]。特别是对防垢、抑垢和除垢的研究,应该说是最直接也是最迫切的,但进展却是最缓慢的,基本上沿用了化学清洗与机械清洗两种方法^[27]。

至此,我们有理由认为,不论是流体诱导振动研究还是污垢研究都与生产实际的需求相差甚远。而面对着研究对象与研究方法近乎一成不变的固执,我们似乎更有理由担忧,我们真的在解决这些问题吗?

也许,应该在换热器的基本结构上作一些突破性的变革,才能真正有助于这些基本问题的解决。

流体诱导振动与传热表面积垢在换热器研究中分属不同的研究领域,一直沿着各自的轨迹发展,但这并不意味着两者之间的任何关联都不存在。振动不仅对热量传递具有强烈影响,而且对减少传热表面的积垢有着最直接的作用。20 世纪 70 年代,人们曾对振动强化传热有过较大范围的研究,却因激发振动的装置——机械偏心装置或电磁激励——需要外来能量难以在换热器内实现而得出振动强化传热不适合于工业应用的结论,振动强化传热研究亦因此而偃息。流体诱导振动不需要动力装置也不需要外来能量,但人们一直注意的是它所可能产生的元件损坏与噪声,以致于连利

用它的可能性都未曾讨论。

事实上,在换热器内完全防止振动的产生几乎是不可能的。振动的本质是能量的不断聚集与耗散,有能量的聚集就会有能量的耗散,不让流体流动过程中由于粘滞阻力而聚集在传热管上的能量通过某种形式有效地耗散出去,单纯地依靠增加传热管的刚度来阻止这些能量可能激发的振动,并不一定总是有效的。用有限的振动使能量不断地耗散,却有可能避免剧烈振动所造成的元件损坏与噪声。基于这种思路,作者与作者的研究小组提出了利用自由振动防止振动破坏与噪声的新方法。这种方法完全不同于传统的研究模式,不致力于振动的预防,而是使元件在脉动流的诱导下自由振动,依靠元件本身的振动特性使振幅通过系统阻尼得到有效控制,使得无论是漩涡脱落、紊流抖振还是流体弹性激振都不能诱发起强烈的共振,从而使传热元件能够长期安全运行而不致损坏;同时,脉动流诱导下的振动频率与振幅较低亦不会产生剧烈的噪声。

将流体诱导振动看作并不仅仅意味着噪声与元件损坏的一种能量的表达方式,则利用流体诱导振动强化传热成为可能。在提高对流换热系数的同时降低污垢热阻无疑是在强化传热技术中最具诱惑力的,一般强化方法却很难做到。作者与作者的研究小组在利用自由振动防止振动破坏的基础上进而提出了利用流体诱导振动强化传热的新方法,其目的是利用流体流动诱导的弹性管束振动在扰动水流提高对流换热系数的同时,利用振动变形清除传热表面积垢,降低污垢热阻,实现复合强化传热。

本书叙述了作者在以上方面的思考与工作,其目的是希望能够有助于在更为广阔的思路讨论有关换热器设计与运行的更多问题,这样,也许才会使换热技术得到更多的发展。当然,这种发展并不是因为作者的工作,而是取决于是否会有更多的人参与。作者始终认为,自己的工作只是微末的,但这一领域的前景却是十分广阔的。越来越多的研究积累告诉我们,确实如此。

第二章 管壳式换热器内的流体诱导 振动及传热元件受力分析

在换热器运行过程中,由于内部工质的不断流动,会导致传热元件的振动。在管壳式换热器中,引起振动的主要原因是漩涡脱落、紊流抖振和流体弹性激振。换热器内传热元件布置方式使得任何一种元件都很难产生自由振动,但可能产生流体诱导下的共振。流体激振力主要取决于流速,一旦流体流动的速度达到某一数值,则可能激发传热元件的剧烈振动而导致元件损坏。换热器内十分复杂的流场分布和流动的不稳定使得这种危险始终存在。

第一节 漩涡脱落诱导振动

流体横掠圆管时,在其两侧的下游交替发生漩涡,形成周期性漩涡尾流,致使圆管上的压力分布也呈周期性变化。圆管两侧的静压不同,产生一个垂直于流动方向的升力,其大小与方向随漩涡的脱落而不断变化。正是由于这种升力的交替变化,导致了圆管与流体流动方向垂直的振动。同样,漩涡脱落也使流动阻力发生交替变化,从而导致圆管在流体流动方向上的振动。

为了求解由于漩涡脱落而引起的系统振动,必须首先求解纳维尔-斯托克斯方程,代入有关振动方程,最终求得振动的频率和振幅。但是,这仅仅是一种理想的方法,因为理论求解纳维尔-斯托克斯方程尚无法完成。目前,分析由于漩涡脱落而诱导的振动,主要应用尾流振荡模型和相关模型。

尾流振荡模型由 Bishop 和 Hassan 于 1964 年首先提出,后由 Hartlen 和 Skop 等人改进,可以用于计算雷诺数在 10^3 到 10^5 范

围内弹性支撑的圆柱体的漩涡脱落诱导振动,不适用于非圆截面^[3]。

考察图 2.1 所示的支撑在弹簧和阻尼器上的刚性圆柱体在横掠流动产生的漩涡作用下引起的振动。假设振动是二维的,且在临近尾流以外的流场中流体粘性可以忽略。漩涡只产生在圆柱体的附面层内,仅以一种频率脱落,圆柱体表面除流动所产生的力外无其他外力,系统是一个单自由度的二元流动模型。振动方程为

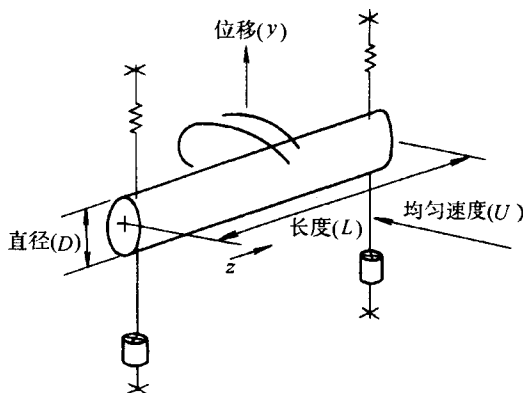


图 2.1 刚性圆柱体振动系统

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\zeta\omega_n \frac{\partial y}{\partial t} + \omega_n^2 y = \frac{1}{2} \frac{\rho U_o^2 L}{m_o D} C_L \quad (2.1)$$

式中, y 表示圆柱体的振动位移, ω_n 表示系统的固有频率, ζ 表示系统的阻尼系数, U_o 表示来流速度, C_L 表示漩涡引起的升力系数, m_o 表示包括流体附加质量的圆柱体质量, D 表示圆柱体直径。

升力系数是时间的函数,按 Skop 的模型, C_L 可用下式描述:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_L}{\partial t^2} - \omega_s G \left[C_{L_o}^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{\partial C_L}{\partial t} / \omega_s \right)^2 \right] \frac{\partial C_L}{\partial t} \\ + \omega_s^2 \left(1 - \frac{4}{3} H C_{L_o}^2 \right) C_L = - \omega_s \frac{\partial y}{\partial t} \frac{F}{D} \end{aligned} \quad (2.2)$$

式中, $\omega_s = 2\pi \frac{SU_o}{D}$, 是 Strouhal 圆频率; C_{L_o} 是圆柱体固定不动时升

力系数的最大值,由实验确定; G, H 和 F 是待定系数。

式(2.1)和(2.2)组成了流固耦合振动系统的非线性方程组,可用 Van der Pol 渐近解法求解。其解可以写成

$$\frac{y}{D} = C_{L_0}[\alpha_1(\omega t)\sin\omega t + \alpha_2(\omega t)\cos\omega t] \quad (2.3)$$

$$C_L = C_{L_0}[\alpha_3(\omega t)\sin\omega t + \alpha_4(\omega t)\cos\omega t] \quad (2.4)$$

其中,振动频率 ω 和振幅分量 $\alpha_i(\omega t)$ ($i=1,2,3,4$) 都是待求的。

按 Van der Pol 的解法,可设 $\alpha_i(\omega t)$ 是时间 t 的慢变函数。 α_i , $\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t^2}$ 的数量级分别为

$$\alpha_i \sim (C_{L_0})^0$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \sim (C_{L_0}^2)^1$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t^2} \sim (C_{L_0}^2)^2$$

按下式引入两个频率失调率:

$$\delta = 2\left(\frac{\omega}{\omega_n} - 1\right) \quad (2.5)$$

$$\Delta = 2\left(\frac{\omega_s}{\omega_n} - 1\right) \quad (2.6)$$

δ 和 Δ 也是 C_{L_0} 的量级。对于圆柱体来说,可以认为 $C_{L_0}^2 \ll 1$, 因此,由以上两式可以导出近似关系式:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \approx 1 + \delta \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_n}\right)^2 \approx 1 + \Delta \quad (2.8)$$

将式(2.3)、(2.4)代入式(2.1)、(2.2),略去量级比 $C_{L_0}^2$ 更小的项,令方程两侧的 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 项的系数相等,即可得到下列四个微分方程:

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} &= -2\xi\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \mu\alpha_3 \\ 2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} &= -\delta\alpha_1 + 2\xi\alpha_2 - \mu\alpha_3 \\ 2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} &= F\alpha_1 - GC_{L_0}^2(\alpha_3^2 + \alpha_4^2 - 1)\alpha_3 \\ &\quad - [\Delta - \delta - HC_{L_0}^2(\alpha_3^2 + \alpha_4^2)]\alpha_4 \\ 2 \frac{\partial \alpha_4}{\partial t} &= F\alpha_2 + [\Delta - \delta - HC_{L_0}^2(\alpha_3^2 + \alpha_4^2)]\alpha_3 \\ &\quad - GC_{L_0}^2(\alpha_3^2 + \alpha_4^2 - 1)\alpha_4 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

式中, $\mu = \frac{\rho L D^2}{8\pi^2 S^2 m_0}$, 是一个常数, 称为约化质量系数。

对于稳定解, 漩涡的发放频率与结构系统的频率锁定在同一个频率。此时, $\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = 0 (i=1, 2, 3, 4)$, 即 α_i 是与时间无关的常数。于是, 式(2.3)、(2.4)可以表示成

$$\frac{y}{D} = C_{L_0}(\alpha_1 \sin \omega t + \alpha_2 \cos \omega t) \quad (2.10)$$

$$C_L = C_{L_0}(\alpha_3 \sin \omega t + \alpha_4 \cos \omega t) \quad (2.11)$$

因为是稳定解, 与时间 t 的起始点的选取无关, 故可取 t 的原点使 $\alpha_2 = 0$, 同时令 y 与 C_L 的相位差为 ψ , $\alpha_1 = \alpha$, 则可将以上两式进一步简化为

$$\frac{y}{D} = \alpha C_{L_0} \sin \omega t \quad (2.12)$$

$$C_L = A C_{L_0} \sin(\omega t + \psi) \quad (2.13)$$

按上式, $\alpha_3 = A \cos \psi$, $\alpha_4 = A \sin \psi$, $A = \frac{|C_L|}{C_{L_0}}$, 是振动圆柱的 C_L 的幅值与固定圆柱体的 C_L 的幅值 C_{L_0} 之比。

将式(2.12)、(2.13)代入方程组(2.9)中, 整理后得

$$\left. \begin{aligned} -2\xi\alpha + \mu A \sin \psi &= 0 \\ \delta\alpha + \mu A \cos \psi &= 0 \\ F\alpha - GC_{L_0}^2(A^2 - 1)A \cos \psi - (\Delta - \delta - HC_{L_0}^2 A^2)A \sin \psi &= 0 \\ -GC_{L_0}^2(A^2 - 1)A \sin \psi + (\Delta - \delta - HC_{L_0}^2 A^2)A \cos \psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

上列方程组是一个线性奇次方程组,利用奇次方程有非零次解的条件,即系数行列式等于零,导出计算失调率 δ 的方程为

$$\delta^3 - (\Delta - HC_{L_0}^2)\delta^2 + \left(4\xi^2 - \frac{\mu HF}{G}\right)\delta - 2\xi(2\xi\Delta - 2\xi HC_{L_0}^2 - \mu F) = 0 \quad (2.15)$$

求得该方程的实根,并代入式(2.7)中,即可求得漩涡脱落诱导振动的频率。

分析漩涡脱落诱导振动的另一个理论模型是相关模型^[3]。在用尾流振荡模型分析漩涡脱落引起的振动时,假设流体的运动沿柱体方向是完全相关的二元流动。实际上漩涡脱落引起振动时,特别是在振幅不大的情况下,流体的运动是随机的,三维的。Blevins 和 Burton 应用随机振动理论,建立了动态的漩涡脱落诱导振动模型,即相关模型。模型的基本假设是:

(1)在共振时,作用在圆柱体上相关的升力变化幅度能够用圆柱体振幅的一个连续函数来表示。

(2)在共振时,漩涡力在跨距方向的相关作用能够用特征的相关长度来表示,直到完全相关。

振动系统仍如图2.1所示。若漩涡脱离的主导频率 ω_s 接近于或等于圆柱体区段的固有频率 ω_n ,圆柱体就会以单一振型对漩涡脱落所形成的诱发力作出响应,圆柱体位移 $y(z, t)$ 能够分解成 $y(t)\psi(z)$ [$\psi(z)$ 为固有模态]。振动方程可以写成

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\xi\omega_n \frac{\partial y}{\partial t} + \omega_n^2 y = \frac{\int_0^L F(z)\psi(z)dz}{\int_0^L m(z)\psi^2(z)dz} \quad (2.16)$$

其中, ξ 是结构的阻尼系数, $m(z)$ 是包括随动流体质量的单位长度质量, $F(z, t)$ 是在 y 方向作用于该区间的流体动态升力。

如果漩涡的诱发力被模化为谐波:

$$F(z, t) = \frac{1}{2}\rho U_s^2 DC_L(z) \cos \omega_s t \quad (2.17)$$

式中, $C_L(z)$ 是升力系数, 方程很容易得到解: