21 世纪大学课程辅导丛书

电磁场重点难点及典型题精解

马西奎　刘补生　邱捷　王仲奕　编著

西安交通大学出版社
·西安·

内容简介

本书是为了对选用冯慈璋、马西奎主编的《工程电磁场导论》(高等教育出版社)作为教材的教师和学生进行教学或学习辅导而编写的。也是对作者多年教学经验的总结。全书共8章。每章均包括基本内容和公式、重点与难点、典型题解、自我检测题等4部分。本书侧重对重点与难点的分析,并对精选的典型题进行了详细的分析和解答。本书收集了相当数量的典型题,所选的每道题都力求新颖,并且从分析题意出发,引导出解题的技巧,旨在提高学生分析问题和解决问题的能力。为了突出一些典型的方法,本书几乎对每道题都做了注释。

本书可作为大学生学习电磁场的参考书,也可供报考硕士研究生的考生使用。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场重点难点及典型题精解/马西奎等编著.-西安:西安交通大学出版社,2000.7
(21世纪大学课程辅导丛书)
ISBN 7-5605-1273-9

Ⅰ.电… Ⅱ.马… Ⅲ.电磁场-高等学校-解题
Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第68351号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市咸宁西路28号 邮政编码:710049 电话:(029)2668316)
陕西宝石兰印务有限责任公司印装
各地新华书店经销

*

开本:787 mm×1 092 mm 1/16 印张:14.875 字数:360千字
2000年9月第1版 2000年12月第2次印刷
印数:3 001～6 000 定价:19.00元

前 言

电磁场是高等学校电类专业学生的一门重要的技术基础课。只有学好它，才有可能在专业课学习及科研新领域开拓中获得较高的成就。但是，对于初次接触这门课程的大学生来说，在学习时常会遇到这样或那样的困难。学生们往往抱怨："我理解电磁场的全部理论，但似乎不会解任何习题"。这里，他们把"理解"和"记住"混同起来了。其实，真正的情况更接近于"我记住了电磁场的所有可能的公式，但似乎总不能正确地应用它们来解习题"。为了改进这种情况，我们编写了这本与冯慈璋和马西奎主编的《工程电磁场导论》教材（高等教育出版社）相配套的学习指导书，可以使学生用较少的时间掌握较多的电磁场知识，提高学习的效率。但它既不能代替教材，也不能代替你自己的努力。当然，在一本学习指导书里也不可能说一些有魔力的话，来免去必需的学习时间和解题实践。

本书的编写按《工程电磁场导论》教材的内容和次序，逐章编写。每章均分为以下 4 个部分：

(1) 基本内容和公式

这一部分是对电磁场理论基本内容的简要归纳，提纲挈领，举其大要。

(2) 重点与难点

这一部分强调指出教材中相应章节的要点，指出哪些基本概念、观点和公式是应该牢记的？哪些是应该阅读以求"通晓"但不必牢记的？这实际上是在说明学习电磁场有一个方法问题。

(3) 典型题解

这一部分列举了许多典型例题，但目的并不仅是给出题解而已，而更着眼于使学生加深对基本概念和基本规律的理解，加强对解题思路和解题方法的指导。读者从中可以逐步领悟和学会分析电磁场问题的方法，掌握解题的基本步骤和学会解题技巧，总结出各种类型题目的解题方法，开阔解题思路，提高分析问题和解决问题的能力。

(4) 自我检测题

这一部分给出了供学生自行检查学习效果的题目。如果做不出，说明尚未掌握好教材内容，必须认真阅读教材和本书的"重点与难点"部分。

需要指出的是，学习电磁场课程，一定要认真做题。做题不在多而在精。在认真做了一定数量的典型题目（例如，教师指定的）之后，还应再看看一些有关习题的解答。这种做一部分题看一部分题解，即精做和泛看相结合的方法，可以起到巩固、提高和扩大知识的作用。

参加本书编写工作的有马西奎、刘补生、邱捷、王仲奕。全书经马西奎修改、补充和定稿。在本书的编写中，编者除了总结多年的教学经验外，还参考了若干现有教材和参考书，在许多方面得到启发和教益，在此不再一一指明，特致谢意。

书中难免有疏漏之处，恳请读者批评指正。

编著者

于西安交通大学

2000 年 2 月

目　录

第 1 章　静电场

相对于观察者静止且量值不随时间变化的电荷所产生的电场,称为静电场。本章将就静电场中的基本概念、基本理论和基本计算方法作较详细的论述。近代电磁场问题能够精确求解的不多,故多借助于静电场方法来得到近似解,所以对静电场方法的掌握十分必要,它是进一步解决电磁场与电磁波问题的基础。

1.1　基本内容和公式

1.1.1　电场强度·电位

1. 库仑定律

库仑定律是静电场的基础。它给出真空中两个相距 R 的点电荷 q_1($\boldsymbol{r}'$处)对点电荷 q_2($\boldsymbol{r}$处)的作用力

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_1 q_2(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0 \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \mid^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R \tag{1-1}$$

式中:$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ F/m。

在上式中涉及空间的两个点,一个是点电荷 q_1 所在的位置,其坐标为(x', y', z'),简称“源点”;另一个是点电荷 q_2 所在的位置,其坐标为(x, y, z),简称“场点”。

2. 电场强度

在静电场中,某 P 点处的电场强度$\boldsymbol{E}$(简称场强),定义为单位正试验电荷在该点所受的作用力。若正试验电荷 q_0 置于电场中某 P 点时受力$\boldsymbol{F}$,则该点处的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \lim_{q_0\to0}\frac{\boldsymbol{F}}{q_0} \tag{1-2}$$

位于坐标原点上的点电荷 q 在无限大真空中引起的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1-3}$$

如果点电荷 q 所在处的坐标为$\boldsymbol{r}'$,则它在点 $\boldsymbol{r}$ 引起的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R \tag{1-4}$$

3. 电位

在静电场中,某 P 点处的电位(用 φ 表示)定义为单位正试验电荷从 P 点移到参考点Q过程中静电力所作的功。若正试验电荷 q_0 从 P 点移到Q 点过程中电场力作功 W,则 P 点处的电位为

$$\varphi = \lim_{q_0\to0}\frac{W}{q_0} = \int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-5}$$

当电荷分布不延伸到无限远时,一般把电位参考点 Q 选在无限远处,将会给电位的计算带来很大的方便。这时,任意 P 点的电位为

$$\varphi = \int_P^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-6}$$

根据式(1-6)和式(1-4),很容易求得点电荷 q 在无限大真空中点 $\boldsymbol{r}$ 引起的电位为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{1-7}$$

公式(1-5)是通过电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的线积分求电位 φ,称为 $\boldsymbol{E}$ 和 φ 之间的积分关系。另一方面,$\boldsymbol{E}$ 和 φ 之间也有如下的微分关系

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi \tag{1-8}$$

4. 点电荷系和连续分布电荷的场强和电位公式

实验表明,电场强度服从所谓叠加原理,每一电荷所产生的电场不因其它电荷的存在而改变,当空间有许多电荷同时存在时,空间各点的总电场强度等于各个电荷在该点所产生的电场强度的矢量和,即

$$\boldsymbol{E} = \sum \boldsymbol{E}_k \tag{1-9}$$

叠加原理对电位也适用,它的数学表达式为

$$\varphi = \sum \varphi_k \tag{1-10}$$

按叠加原理,在 n 个点电荷 $q_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的电场中,某一点处的电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 和电位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 分别为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 R_k^2} \boldsymbol{e}_{R_k} \tag{1-11}$$

和

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 R_k} \tag{1-12}$$

其中,$\boldsymbol{e}_{R_k}$ 是从第 k 个点电荷 q_k 处到场点 $\boldsymbol{r}$ 的矢径 $\boldsymbol{R}_k$ 的单位矢量,R_k 是从第 k 个点电荷 q_k 处到场点 $\boldsymbol{r}$ 的距离。

连续分布电荷的电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 和电位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 分别为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\mathrm{d}q}{R^2} \boldsymbol{e}_{\mathrm{R}} \tag{1-13}$$

和

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\mathrm{d}q}{R} \tag{1-14}$$

其中,$\boldsymbol{e}_{\mathrm{R}}$ 是从电荷元 $\mathrm{d}q$ 到场点的矢径 $\boldsymbol{R}(=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 的单位矢量。电荷分布为体分布时,$\mathrm{d}q=\rho \mathrm{d}V'$,积分域 Ω 为电荷所在的体积 V';电荷分布为面分布时,$\mathrm{d}q=\sigma \mathrm{d}S'$,积分域 Ω 为电荷所在的曲面 S';电荷分布为线分布时,$\mathrm{d}q=\tau \mathrm{d}l'$,积分域 Ω 为电荷所在的曲线 l'。

1.1.2 静电场中的导体和电介质

就静电表现而言,物质可分为导体和电介质两大类。

1. 静电场中的导体

在静电平衡条件下,导体有以下几点特性:

(1) 导体内部各点的电场强度处处为零($\boldsymbol{E}=0$);导体表面电场强度垂直于导体表面。这

是导体处于静电平衡状态的基本条件，是考虑静电平衡导体问题的前提和出发点，应该很好体会。

(2) 导体是等位体，其表面是等位面。

(3) 导体内部没有电荷分布，电荷只分布在导体表面(包括空腔导体的内表面)上。

2. 静电场中的电介质

电介质对电场的影响可以归结为极化后极化电荷所产生的影响。介质内部和外部的总电场强度应是外场与极化电荷激发的电场的叠加，因而介质内的总电场强度一般不为零。介质极化的程度用电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 表示

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \boldsymbol{p}}{\Delta V} \tag{1-15}$$

介质内部极化电荷的体密度 ρ_{p} 和表面上极化电荷的面密度 σ_{p} 与电极化强度 P 间的关系分别为

$$\rho_{\mathrm{p}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{1-16}$$

和

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}_n \tag{1-17}$$

在分析有电介质存在的电场中，通常引入电通量密度 $\boldsymbol{D}$。电通量密度 $\boldsymbol{D}$、电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 三者间的关系为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{1-18}$$

对于各向同性的电介质，$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 有关系式

$$\boldsymbol{P} = \chi \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{1-19}$$

χ 为电介质的极化率。代入式(1-18)，得

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1-20}$$

ε 为电介质的介电常数，且

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi) = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \tag{1-21}$$

ε_{r} 为电介质的相对介电常数。

1.1.3 静电场基本方程·分界面上的衔接条件

静电场基本方程的积分形式和微分形式分别是

$$\left.\begin{aligned} \oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= 0 \\ \oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= q \end{aligned}\right\} \tag{1-22}$$

和

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \end{aligned}\right\} \tag{1-23}$$

另外，在不同媒质的分界面上，场量的衔接条件为

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad E_{2t} = E_{1t} \tag{1-24}$$

或者

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma, \quad \varphi_1 = \varphi_2 \tag{1-25}$$

当两种各向同性的线性电介质分界面上无自由电荷(即 $\sigma=0$)时,若以 α_1 和 α_2 表示 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_n$ 的夹角,则有静电场中的折射定律

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{1-26}$$

对于导体与电介质的分界面,导体表面上的边界条件为

$$\sigma = D_{2n}, \quad E_{2t} = 0 \tag{1-27}$$

或者

$$\sigma = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad \varphi_2 = 常数 \tag{1-28}$$

其中,第一种媒质为导体。n 为法线方向,且由导体指向电介质。

1.1.4 静电场的边值问题·惟一性定理

1. 静电场的边值问题

在各向同性、线性、均匀电介质中,电位满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1-29}$$

或者拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{1-30}$$

静电场问题通常都可以归结为在给定边值条件下(场域边界面 S 的边界条件;不同媒质分界面上的衔接条件;自然边界条件),求解泊松方程或拉普拉斯方程的边值问题。

在场域的边界面 S 上给定边界条件的方式又可以有以下 3 类。

(1) 已知场域边界面 S 上各点电位的值,即给定

$$\varphi|_S = f_1(S) \tag{1-31}$$

称为第 1 类边界条件。这类问题称为第 1 类边值问题。

(2) 已知场域边界面 S 上各点电位法向导数的值。即给定

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = f_2(S) \tag{1-32}$$

称为第 2 类边界条件。这类问题称为第 2 类边值问题。

(3) 已知场域边界面 S 上各点电位和电位法向导数的线性组合值。即给定

$$\left.\left(\varphi + \beta\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)\right|_S = f_3(S) \tag{1-33}$$

称为第 3 类边界条件。这类问题称为第 3 类边值问题或者混合边值问题。

如果场域伸展到无限远处,则必须提出所谓无限远处的边界条件。对于电荷分布在有限区域的情况,则在无限远处电位为有限值,即

$$\lim_{r\to\infty} r\varphi = 有限值 \tag{1-34}$$

称为自然边界条件。

另外,当边值问题所定义的整个场域中存在不止一种电介质,但能分成几个均匀的电介质子区域时,应按各电介质的子区域分别写出泊松方程或拉普拉斯方程。同时,作为定解条件,

还必须相应地引入不同媒质分界面上的衔接条件。

上述3类边值问题的写法陈述如下：

(1) 第1类边值问题

$$
\begin{cases}
\text{泊松方程或拉普拉斯方程}\begin{cases}\nabla^2\varphi_1=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_1}(\text{或 }0),\text{第 1 种电介质中；}\\ \nabla^2\varphi_2=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_2}(\text{或 }0),\text{第 2 种电介质中；}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{。}\end{cases}\\
\text{边值条件}\begin{cases}\text{各导体上的电位值 }\varphi|_S=f_1(S);\\ \text{不同媒质分界面上的衔接条件；}\\ \text{自然边界条件。}\end{cases}
\end{cases}
$$

(2) 第2类边值问题

$$
\begin{cases}
\text{泊松方程或拉普拉斯方程}\begin{cases}\nabla^2\varphi_1=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_1}(\text{或 }0),\text{第 1 种电介质中；}\\ \nabla^2\varphi_2=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_2}(\text{或 }0),\text{第 2 种电介质中；}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{。}\end{cases}\\
\text{边值条件}\begin{cases}\text{各导体上的电荷量或}\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S=f_2(S);\\ \text{不同媒质分界面上的衔接条件；}\\ \text{自然边界条件。}\end{cases}
\end{cases}
$$

(3) 第3类边值问题，写法类似，不重复了。

2. 惟一性定理

在静电场中，凡满足电位的泊松方程(或拉普拉斯方程)和给定边值条件的解 φ，必定是给定静电场的惟一解，称为静电场的惟一性定理。

惟一性定理之所以重要，在于它指出了静电场具有惟一解的充要条件，且可用来判定得到的解的正确性。根据此，我们可以尝试任何一种能找到的最方便的方法求解某一问题(那怕是凑)，只要这个解满足泊松方程(或拉普拉斯方程)和给定的边值条件，那么这个解就是正确的。任何另一种方法求得的同一问题的解必然是与它完全相同的。

1.1.5 静电场边值问题的几种解法

1. 直接积分法

直接积分法是一种采用常微分方程的求解方法。它适用于一维电场问题。

电位 φ 满足的泊松方程(或拉普拉斯方程)是一个二阶偏微分方程，一般情况下很难求解。但是，如果空间自由电荷是球面对称、柱面对称或平面对称分布，边界条件和电介质分界面也有类似的对称性，那么电位 φ 只是一个坐标变量的函数，于是泊松方程(或拉普拉斯方程)可化为二阶常微分方程，就可采用积分法直接求解。当然，这类问题原则上也可用高斯定律先求出电场强度 $\boldsymbol{E}$，然后应用式(1-5)求得电位 φ。

2. 分离变量法

分离变量法是求解拉普拉斯方程的一种常用的方法。它的大意是把电位 φ 用 2 个或 3 个仅含一个坐标变量的函数的相乘积表示，代入拉普拉斯方程后，借助“分离”常数使拉普拉斯方程转化为几个常微分方程，然后分别求解这些常微分方程，并以给定的边界条件确定其中的待定常数和函数，最终得到电位 φ 的解。

分离变量法的关键是能否选择出可分离变量的坐标系，使场域的边界面和电介质的分界面均与所选坐标系的坐标面相吻合。常用的坐标系有直角坐标系、圆柱坐标系和球面坐标系。

直角坐标系中拉普拉斯方程的解：如果所讨论的问题的边界面和电介质分界面都是平面，而且这些平面要么互相平行，要么互相垂直，这时就可选用直角坐标系来求解，设电位 φ 的分布只是 x 和 y 的函数，而沿 z 方向没有变化，则拉普拉斯方程是

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{1-35}$$

其分离变量形式的解是

$$\varphi(x,y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cosh k_n x + B_n \sinh k_n x)(C_n \cos k_n y + D_n \sin k_n y) \tag{1-36}$$

或者

$$\varphi(x,y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos k_n x + B_n \sin k_n x)(C_n \cosh k_n y + D_n \sinh k_n y) \tag{1-37}$$

其中：A_0、B_0、C_0、D_0、A_n、B_n、C_n 和 D_n 都是待定常数；k_n 称为分离常数。

圆柱坐标系中拉普拉斯方程的解：在圆柱坐标系中，如果电位 φ 与 z 无关，则拉普拉斯方程是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \tag{1-38}$$

它的分离变量形式的解是

$$\varphi(\rho,\phi) = (A_0 \ln\rho + B_0)(C_0 \phi + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \rho^n + B_n \rho^{-n})(C_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi) \tag{1-39}$$

其中：A_0、B_0、C_0、D_0、A_n、B_n、C_n 和 D_n 都是待定常数。

3. 有限差分法

有限差分法是求偏微分方程近似解的一种重要的数值方法。它适用于场域边界的几何形状比较复杂的二维或三维电场问题。

有限差分法的基本思想是，首先把场域用适当的网格离散化，然后在各网格节点上用电位的差商来近似替代该点的偏导数，把泊松方程（或拉普拉斯方程）转化为一组相应的差分方程，解之即得电位 φ 在各网格节点上的数值解。

在直角坐标系中，设电位 φ 的分布只是坐标 x 和 y 的函数，而沿 z 方向没有变化，则拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{1-40}$$

的差分格式为

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = 0 \tag{1-41}$$

应该注意到，这里采用了正方形网格剖分，如图1－1所示。

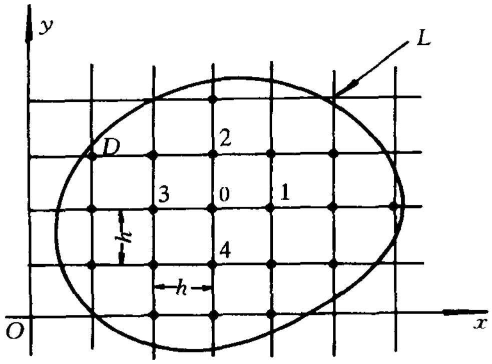

图 1－1　有限差分的网格分割

4．镜像法

镜像法是求静电场边值问题解的一种间接方法，其理论依据是惟一性定理。它只适用于场域边界形状比较典型的几种特定情况。

这个方法的出发点，就是用放置在原问题边界外的假想的简单电荷分布（称为镜像电荷）来模拟边界条件（即等效地代替导体表面或介质分界面上真正的电荷分布），把实际上有边界的问题代之以没有边界的问题。

点电荷对导体平面的镜像：一个点电荷 q，若距离无限大的接地导体平面为 d，则其镜像电荷为在平面另一侧，距离平面为 d 处的点电荷（$-q$）。

点电荷对无限大电介质分界平面的镜像：对于图 1－2 所示的电介质分界平面，镜像电荷为

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}q, q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}q \tag{1-42}$$

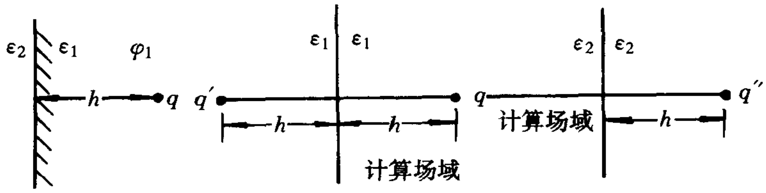

图 1－2　无限大电介质平面的镜像

点电荷对导体球的镜像：一个点电荷 q，若离半径为 R 的接地导体球的球心为 $d(d>R)$，则其镜像电荷（$-q'$）位于球心及 q 所在点的联线上。如图 1－3 所示，距球心为 b，并且

$$q' = \frac{R}{d}q, b = \frac{R^2}{d} \tag{1-43}$$

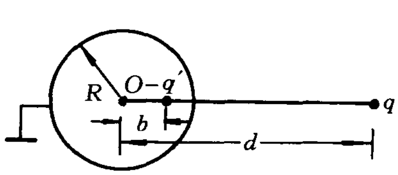

图 1－3　点电荷与导体球面的镜像

若导体球不接地，则应在球心放置一点电荷 q'，相当于 3 个点电荷系的计算。又若不接地导体球带电荷 Q，则 Q 应置于球心，才能保持导体球表面为等位面。这时球心的电荷为（$Q+q'$）。

5．电轴法

电轴法只能解决带等量异号电荷的两平行圆柱导体间的静电场问题。如图 1－4 所示，其电轴的位置和电位的表达式分别为

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d}, h_2 = \frac{d^2 + a_2^2 - a_1^2}{2d} \\ b &= \sqrt{h_1^2 - a_1^2} = \sqrt{h_2^2 - a_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-44}$$

和

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} \tag{1-45}$$

若两平行圆柱导体的半径相等($a_1=a_2=a$),此时 $h_1=h_2=h$,且有

$$h^2 - a^2 = b^2 \tag{1-46}$$

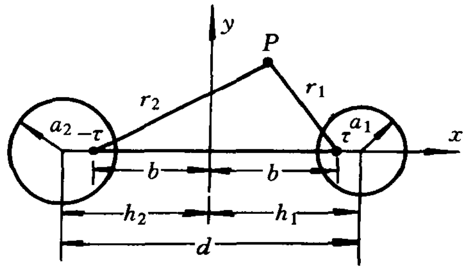

图 1-4 平行圆柱导体传输线

1.1.6 部分电容

在各向同性的线性电介质中,如果两个导体电极形成电容器,则其电容

$$C = \frac{Q}{U} \tag{1-47}$$

式中:U 为两导体电极间的电压,Q 为一个电极上的电荷量。

电容器的电容值由它的电极的几何形状、尺寸,中间填充的电介质及电极间相对位置决定,与其带电量无关。

在各向同性的线性电介质中,对于由多个导体组成的静电独立系统,必须应用“部分电容”来代替电容器的“电容”概念。若在有限区域中有 $n+1$ 个导体,设用 q_i、φ_i($i=0,1,2,\cdots,n$)表示第 i 个导体上的电荷量和电位,且把 0 号导体选作电位参考点($\varphi_0=0$),这时,有

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \cdots + \alpha_{1n}q_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_k &= \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \cdots + \alpha_{kn}q_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n &= \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \cdots + \alpha_{nn}q_n \end{aligned}\right\} \tag{1-48}$$

或者

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \cdots + \beta_{1n}\varphi_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_k &= \beta_{k1}\varphi_1 + \beta_{k2}\varphi_2 + \cdots + \beta_{kn}\varphi_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_n &= \beta_{n1}\varphi_1 + \beta_{n2}\varphi_2 + \cdots + \beta_{nn}\varphi_n \end{aligned}\right\} \tag{1-49}$$

式中,α_{ij}是电位系数,β_{ij}是感应系数。

式(1-49)也可写成

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + \cdots + C_{1k}U_{1k} + \cdots + C_{1n}U_{1n} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_k &= C_{k1}U_{k1} + C_{k2}U_{k2} + \cdots + C_{k0}U_{k0} + \cdots + C_{kn}U_{kn} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_n &= C_{n1}U_{n1} + C_{n2}U_{n2} + \cdots + C_{nk}U_{nk} + \cdots + C_{n0}U_{n0} \end{aligned}\right\} \tag{1-50}$$

式中，C_{ij}称为部分电容，$C_{10},C_{20},\cdots,C_{k0},\cdots,C_{n0}$称为自有部分电容；$C_{12},C_{23},\cdots,C_{kn},\cdots$等称为互有部分电容。这些部分电容只与各导体的几何形状、大小、相互位置及电介质分布有关，而与导体的带电量无关。

利用部分电容 C 组成的电容网络，可以求得多导体系统的等效电容或工作电容。

1.1.7 静电能量与力

1. 静电能量

静电场的能量(称为静电能量)定域在静电场中。它是在建立电场过程中，由外源作功转化而来的。

点电荷系的静电能量为

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q_k\varphi_k \tag{1-51}$$

式中：q_k 是第 k 个点电荷的电量，而 φ_k 是除 q_k 以外其余$(n-1)$个点电荷在 q_k 所在处产生的电位。

连续分布电荷系的静电能量为

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\iiint_{V'}\rho\varphi \mathrm{d}V' + \frac{1}{2}\iint_{S'}\sigma\varphi \mathrm{d}S' \tag{1-52}$$

式中：V'是体积电荷 ρ 分布的区域；S'是面积电荷 σ 分布的表面。

变换式(1-52)，静电能量又可写成

$$W_{\mathrm{e}} = \iiint_{V}\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \tag{1-53}$$

这里，V 是电场存在的整个空间区域。上式表明，静电能量储存在整个场域内，其静电能量的体密度(简称静电能量密度)为

$$w'_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} \tag{1-54}$$

对于 n 个带电导体系统，其总静电能量为

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q_k\varphi_k \tag{1-55}$$

式中：q_k 是第 k 个导体上的电荷量；φ_k 是第 k 个导体的电位，它等于本身电荷 q_k 和其他电荷共同产生的电位。

2. 静电力

电场对电荷的作用力，原则上可用 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$ 计算。但对于体积分布或面分布的电荷，其所受的电场力，一般需做矢量积分计算，相当复杂，甚至无法进行。利用虚位移法由能量的变化来计算，可得电场力的计算公式为

$$f_g = \left.\frac{\partial W_{\mathrm{e}}}{\partial g}\right|_{\varphi_k=\text{常量}} = -\left.\frac{\partial W_{\mathrm{e}}}{\partial g}\right|_{q_k=\text{常量}} \tag{1-56}$$

式中：g 为广义坐标；f 为广义力。只要静电能量求得，任意假设带电导体的电荷不变或电位不变，利用式(1-56)，即可求得电场力。

利用法拉第对静电力的观点，亦可分析带电体受力的情况。法拉第观点认为：在静电场中的每一段电位移管，沿其轴向要受到纵张力，而在垂直于轴向方向则要受到侧压力。每单位表

面所受到的纵张力和侧压力的量值相等，都是$\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$。

1.2 重点与难点

1.2.1 电场强度和电位及其计算

透彻地理解描述静电场的两个基本物理量：电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电位 φ 及其它们之间的关系，是本章的重点之一。掌握好求解 $\boldsymbol{E}$ 和 φ 的几种方法是学习中的难点。

1. 电场强度

对于电场强度 $\boldsymbol{E}$，要注意以下几点：

(1) 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是一个随着空间点位置不同而变化的矢量函数$\boldsymbol{E}(x,y,z)$。它是由电场本身的性质所决定，与试验电荷 q_0 无关。改变 q_0 的大小，$\boldsymbol{F}$ 也随之改变，但比值 $\boldsymbol{F}/q_0$ 不变。

(2) 电场的可观测性是通过它与其他电荷的相互作用力来表现的。电场强度 $\boldsymbol{E}$ 反映了这种作用力的强度，即 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$。

(3) 一定的电荷分布，联系着一定的静电场。

静电场基本方程中的第 1 方程 $\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$或$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，说明了静电场的一个基本性质——无旋性。所以，通常又说静电场是无旋场(保守场、位场)。不管电介质如何，只要是静电场都具有这个性质。第 1 方程反映了静电场对电荷的电场力作功性质：电荷在静电场中移动时，电场力要作功，此功与电荷移动的路径无关，仅与电荷的初、终点位置有关。

第 2 个方程 $\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=q$ 或$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$(也称高斯定律)，说明静电场是有源场。从闭合面内穿出的 $\boldsymbol{D}$ 通量可以想象为是从此面内流出的某种流量。当 $\boldsymbol{D}$ 通量大于零时，即有流量流出，说明闭合面内必有流量的源，即 $\boldsymbol{D}$ 线由正的自由电荷发出，终止于负的自由电荷。

应该注意的是：①高斯定律只告诉我们，穿出闭合面的 $\boldsymbol{D}$ 通量仅由面内的自由电荷决定，与闭合面外部的电荷无关，与闭合面内部的电荷怎么分布也无关；②闭合面 S 上的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是S 面内、外空间中所有电荷的贡献，不能理解为仅是闭合面 S 所包围电荷产生的电场强度；③q 是闭合面S 内电荷的代数和。当 $q>0$ 时，并不意味着 S 内一定没有负电荷。反之，当 $q<0$ 时，并不意味着 S 内一定没有正电荷。当 $q=0$ 时，并不说明 S 内一定没有电荷分布(可能有等量的正、负电荷分布，也可能处处为零)。

高斯定律对静电场是普遍适用的，但只是对电场分布具有某种空间对称性的电场，才能应用此定律来计算电场分布。它也是计算这类具有对称性电场的重要方法，应该牢固掌握。

2. 电位

电位 φ 是从电场力对电荷作功的特征来描述电场的。因为静电场是无旋场($\nabla\times\boldsymbol{E}=0$)，电场力作功与路径无关，所以可以引入电位 φ，有

$$\varphi=\int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-57}$$

或者

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi \tag{1-58}$$

对于电位 φ，要注意以下几点：

(1) 电场中给定 P 点的电位 φ,表示单位正电荷由给定 P 点移至参考点 Q 处时电场力所作的功。

(2) 明确电位参考点的作用,电位仅有相对意义。在同一个静电场中,各点电位的大小与正负,与参考点 Q 的选取有关。而两点间的电位差是绝对的,即与参考点 Q 的选取无关。把两点 A 与 B 间的电位差定义为此两点间的电压(用 U 表示),即

$$U_{AB}=\varphi_A-\varphi_B=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-59}$$

(3) 参考点 Q 的选取是任意的,但一般应遵守这样两个原则:①电位表达式有意义;②电位表达式应尽可能简单。另外,同一静电场中只能选取一个参考点。

所谓"有意义",就是它能给出场中各点电位的确定值。这可由点电荷的电位表达式

$$\varphi(P)=\int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_Q}\right)$$

中体会到。如果取 $r_Q=0$,则$\frac{1}{r_Q}=\infty$,于是场中各点的电位均为无限大,无确定的电位值,上面的电位表达式 $\varphi(P)$就失去意义。就是说,在点电荷的电场中,不能选取点电荷所在处为参考点。同样,对于电荷分布延伸到无限远时(例如,无限长带电线、无限长带电圆柱面等),也不能把参考点 Q 选在无限远处。

怎样使表达式简单呢?仍以点电荷的电位表达式 $\varphi(P)$为例来说明,当$\frac{1}{r_Q}=0$ 时,$\varphi(P)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$,其电位表达式最简单,所以在点电荷的电场中,选取无限远处为电位参考点 Q 最合适。通常,当电荷分布不延伸至无限远处时,一般在理论分析中若把电位参考点 Q 选在无限远处,将会对电位计算带来很大的方便。这时,任意 P 点的电位为

$$\varphi=\int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-60}$$

3. 电场强度的计算方法

这里的主要问题是已知电荷分布,求解电场中的 $\boldsymbol{E}$ 分布。若这种分布已确定,则电荷在静电场中的受力、电场力对电荷作的功以及带电体系静电能量的问题就容易解决了。

归纳起来,计算电场强度 $\boldsymbol{E}$ 分布的方法有 3 种:

(1) 应用场强叠加原理求解电场强度 $\boldsymbol{E}$。对点电荷系、连续分布电荷系,其计算公式分别见式(1-11)和式(1-13)。在学习中,一定要掌握点电荷系和一些比较简单的连续电荷分布系的电场强度的计算方法。

(2) 当电场分布具有某种空间对称性时,可以利用高斯定律求出电场强度。在学习中,一定要会计算点、线、球形电极的电场。

(3) 用梯度法求电场强度 $\boldsymbol{E}$。若电位分布已知,则可用 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 求出电场强度分布。但是要注意的是,必须求出电位 φ 作为空间分布函数的普遍表达式,才能用梯度公式计算电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的分布。

例 1-1 试求半径为 a,电荷面密度为 σ 的均匀带电球面的电场。

解 (1)应用场强叠加原理

(a) 球外电场

如图 1-5 所示，以 P 点与球心连线为球坐标的极轴（$\theta=0$），则 P 点的坐标为 $(r,0,0)$。在球面上，P' 点的坐标为 (a,θ',ϕ')，取面元 $a\mathrm{d}\theta' a\sin\theta'\mathrm{d}\phi'$，可把其上的面电荷 $\sigma a^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$ 看成一个点电荷，与 P 点的距离为 R，这个面电荷在 P 点的电场 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma a^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'}{R^2}$ 方向为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1$，而在对称点 $(a,\theta',\phi'+180°)$ 处的元电荷 $\sigma a^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$ 产生一个大小相等的电场，方向为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_2$，两者合成则得方向为径向 $\mathrm{d}E_{\mathrm{r}}$ 的合成电场。故总电场的方向为径向，它是所有元电荷产生电场的矢量和，即

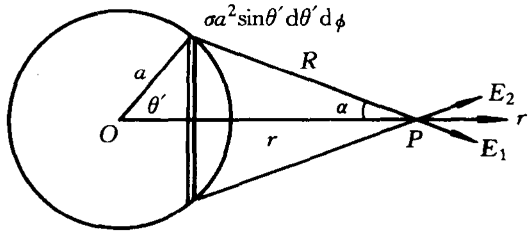

图 1-5　均匀球面电荷外的电场

$$E_r(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma a^2\sin\theta'\cos\alpha}{R^2}\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$$

因为 $\cos\alpha=(r^2+R^2-a^2)/(2rR)$，$\cos\theta'=(r^2+a^2-R^2)/(2ra)$，故 $\sin\theta'\mathrm{d}\theta'=-\mathrm{d}\cos\theta'=\frac{R\mathrm{d}R}{ra}$。将上述 E_{r} 积分的积分变量换为 $\mathrm{d}R$，当 $\theta'=0$ 时，$R=r-a$；$\theta'=\pi$ 时，$R=r+a$

$$\begin{aligned}E_r(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{r-a}^{r+a}\frac{\sigma a^2R(r^2+R^2-a^2)}{ra\cdot 2rR\cdot R^2}\mathrm{d}R\mathrm{d}\phi'\\&=\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\int_{r-a}^{r+a}\frac{r^2+R^2-a^2}{2r^2R^2}\mathrm{d}R\\&=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2r^2}\right)\left[R-\frac{r^2-a^2}{R}\right]\Bigg|_{r-a}^{r+a}\\&=\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

即球外电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1-61}$$

设球面上有电荷总量 q，则式(1-61)可化为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1-62}$$

这说明：均匀球面电荷在球外建立的电场反比于场点与球心距离的平方，相当于把球面上的电荷集中到球心所形成的点电荷的电场。

(b) 球内电场

对于球内电场，上面的积分下限变成 $a-r$，则

$$E_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{r})=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2r^2}\right)\left[R-\frac{r^2-a^2}{R}\right]\Bigg|_{a-r}^{a+r}=0$$

即，球内电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0 \tag{1-63}$$

这说明均匀球面电荷在球内建立的电场恒为 0。