GAILÜ
TONGJI
XITI
JIEDA

概率统计习题解答

关家骥　瞿永然编

概率统计习题解答

关家骥　瞿永然编

湖南科学技术出版社

概率统计习题解答
关家骥　瞿永然　编
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1979年9月第1版　1981年9月第4次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：13.625　插页：1　字数：282,000
印数：73,001——88,400
统一书号：13204·7　　定价：1.29 元

前　言

随着科学技术的发展，"概率论与数理统计"的应用越来越广泛了。例如，在天文、气象、地质、水文、物理、化学、生物等理论研究中，在医药、卫生、交通、电讯等部门以及政治、经济、工农业、商业、军事、航海等方面都要用到概率统计。为了适应科学实验和工农业生产发展的需要，高等工科院校把概率论列为基础部分的教学内容，并在工程数学中开设"概率论与数理统计"课程。新编中学教学大纲中也增加了概率统计初步知识。这些说明这门学科已经受到了应有的重视。

目前，许多人正在学习概率论与数理统计方面的知识。不少人在学习这门课程时，感到习题演算相当困难。的确，概率统计的解题方法，特别是基础概率部分，与其他数学学科比较，有些独特之处。因此初学时感到困难是并不奇怪的。问题是在于如何帮助初学者较快地度过这一关。我们认为利用汇编成册的习题解答，进行基本概念的阐述和基本方法的介绍，是有效的途径之一。

基于上述原因，我们编写了《概率统计习题解答》一书，为的是起到抛砖引玉的作用。

这本小册子的阅读对象是中学数学教师，高等工科院校和农、林、医等院校的学生，以及广大的科技、工程人员。我们

希望这本小册子能够对初学者有所帮助。由于面向广大读者，在深度方面有一定的限制，所以，对于学习概率统计专著的读者来说，这里所选的习题无疑是太浅了的，这也是必须说明的。

我们在编写过程中，获得了其他专著的启示，并得到了侯振挺教授热情的指导，在此一并表示衷心的感谢。由于我们的学识、水平有限，本书内容可能挂一漏万，甚至还有不少缺点、错误，敬请读者批评指正。

编　者

一九七九年五月六日

目　　录

第一章　随机事件及其概率

§1　随机事件

以A，B，C，…等表示随机事件，以ω表示构成随机事件的基本事件，则$\omega \in A$表示ω是含于A的一个基本事件；$\omega \notin A$表示ω是不含于A的基本事件。

如A出现必然导致B出现，则称A是B的特款，或B包含A，记为$A \subset B$。若$A \subset B$，同时$B \subset A$，则称A与B相等，记为$A = B$。

A与B的和，记为$A + B$，指的是"A、B中至少有一个出现"这一事件。类似的$\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$是指"$A_1$，$A_2$，…$A_n$中至少有一个出现"这一事件（在有些著作中，$A$与$B$的和记为$A \cup B$。当$A$、$B$不能同时出现时，称$A$与$B$互斥，或互不相容，这时$A$与$B$的和才记为$A + B$）。

A与B的差，记为$A - B$（或$A \setminus B$），指"A出现而B不出现"这一事件。

A与B的积（或称作交），记为AB（或$A \cap B$），指"A,B同时出现"这一事件。类似的，$\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$或$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$指"$A_1$，$A_2$，…$A_n$

同时出现"这一事件。

A与B互斥（互不相容），可表示为$AB=V$，其中V表示不可能事件。

A与B互逆，或互称为对立事件，记为$B=\bar{A}$，指"A,B必出现其中之一，但二者不能同时出现"的情形，可表示为$A+B=U$，$AB=V$，其中U表示必然事件。

随机事件的运算有下列定理：

交换律　$AB=BA$，$A+B=B+A$。　(1—1)

结合律　$(AB)C=A(BC)$，

$(A+B)+C=A+(B+C)$。　(1—2)

分配律　$(A+B)C=AC+BC$　(1—3)

$(AB)+C=(A+C)(B+C)$　(1—4)

对偶律（莫根定理）　$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$　(1-5)

$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$　(1—6)

习题1.1　设A，B，C表示三个随机事件，试将下列事件用A，B，C表示出来。

(i)　A出现，B、C不出现；

(ii)　A、B都出现，而C不出现；

(iii)　所有三个事件都出现；

(iv)　三个事件中至少一个出现；

(v)　三个事件中至少两个出现；

(vi)　三个事件都不出现；

(vii) 不多于一个事件出现；

(viii) 不多于两个事件出现；

(ix) 恰有一个事件出现。

【解】 (i) $A\bar{B}\bar{C}$； (ii) $AB\bar{C}$； (iii) ABC；
(iv) $A+B+C$； (v) $AB+BC+CA$； (vi) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$；
(vii) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$，或$\overline{AB+BC+CA}$；
(viii) $\overline{ABC}$，或$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+$
$+A\bar{B}C+\bar{A}BC$； (iv) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$。

习题1.2 抽查 4 件产品，设A表示“至少有一件次品”，B表示“次品不少于两件”。问$\bar{A}$，$\bar{B}$各表示什么事件？

【解】 $\bar{A}$表示没有次品；

$\bar{B}$表示次品不超过一件。

习题1.3 在图书馆按书号任选一本书，设A表示“选的是数学书”，B表示“选的是中文版的”，C表示“选的是1970年以后出版的”。问：

(i) $AB\bar{C}$表示什么事件？

(ii) 在什么条件下$ABC=A$？

(iii) $\bar{C}\subset B$表示什么意思？

(iv) 若$\bar{A}=B$，是否意味着馆中所有数学书都不是中文版的？

【解】 (i) $AB\bar{C}$表示选的是 1970 年以前出版的中文版数学书；

(ii) $ABC=A$，则$A\subset ABC$（$ABC\subset A$，按积的定义是必然的）。这说明当$\omega\in A$时，必有$\omega\in B$与$\omega\in C$，于是知$A\subset BC$。

这就是说，在“馆中数学书都是1970年以后出版的中文版这一条件下”，有$ABC=A$。

(iii) $\bar{C}\subset B$ 表示馆中 1970 年以前出版的书都是中文版的。

(iv) $\bar{A}=B$ 表示馆中非数学书都是中文版的，且中文版的书都不是数学书。但此式又可写成$A=\bar{B}$，因此也意味着所有数学书都不是中文版的。

习题1.4 下面各式说明什么包含关系？

(i) $AB=A$； (ii) $A+B=A$； (iii) $A+B+C=A$。

【解】 (i) $AB=A$，则 $A\subset AB$（$AB\subset A$，按积的定义是必然的），即当$\omega\in A$时，必有$\omega\in AB$，因而$\omega\in B$，故 $A\subset B$。

(ii) $A+B=A$，则 $A+B\subset A$（$A\subset A+B$，按和的定义是必然的）。即$\omega\in A+B$时，包括$\omega\in A$或$\omega\in B$时，总有$\omega\in A$. 故$B\subset A$。

(iii) $A+B+C=A$，则 $A+B+C\subset A$，即 $\omega\in A+B+C$时，包括$\omega\in A$，$\omega\in B$或$\omega\in C$时，总有$\omega\in A$。故$B+C\subset A$。

习题1.5 简化下列各式：

(i) $(A+B)(B+C)$； (ii) $(A+B)(A+\bar{B})$；

(iii) $(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)$。

【解】 (i) $(A+B)(B+C)=AB+AC+B+BC$（分配律），

因为 $AB+BC\subset B$（按积的定义 $\omega\in AB$ 或$\omega\in BC$必有$\omega\in B$），

所以 $(A+B)(B+C)=B+AC$。（注：本题相当于用（1—3）来证（1—4）。）

(ii) $(A+B)(A+\bar{B})=A+A\bar{B}+BA+B\bar{B}$ （分

配律），

因为 $A\bar{B}+BA=A(\bar{B}+B)=AU=A$，

$B\bar{B}=V$，注意到任何事件C总有$C+V=C$，

所以 $(A+B)(A+\bar{B})=A$。

(iii) $(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)$

$=A(\bar{A}+B)=A\bar{A}+AB=V+AB=AB$。

习题1.6 证明下列等式

(i) $\overline{\overline{A}}=A$； (ii) $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$ （即(1—5)）；

(iii) $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$ （即(1—6)）； (iv) $A-B=A\bar{B}$。

【证】 (i) 设$\omega\in\overline{\overline{A}}$，则$\omega\overline{\in}\bar{A}$，亦即$\omega\in A$，故$\overline{\overline{A}}\subset A$；另一方面，设$\omega\in A$，则$\omega\overline{\in}\bar{A}$，亦即$\omega\in\overline{\overline{A}}$，故$A\subset\overline{\overline{A}}$。

于是 $\overline{\overline{A}}=A$。

上述推导过程是"可逆"的。我们也可以叙述为：

$\omega\in\overline{\overline{A}}$等价于$\omega\overline{\in}\bar{A}$，又等价于$\omega\in A$，故$\overline{\overline{A}}=A$，证毕。

(ii) $\omega\in\overline{AB}$，等价于$\omega\overline{\in}AB$，又等价于$\omega\overline{\in}A$与$\omega\overline{\in}B$至少出现其一，又等价于$\omega\in\bar{A}$与$\omega\in\bar{B}$至少出现其一，这等价于$\omega\in\bar{A}+\bar{B}$。

故 $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$， 证毕。

(iii) $\omega\in\overline{A+B}$，等价于$\omega\overline{\in}A+B$，又等价于$(\omega\overline{\in}A)(\omega\overline{\in}B)$，又等价于$(\omega\in\bar{A})(\omega\in\bar{B})$，这等价于$\omega\in\bar{A}\bar{B}$。

故 $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$， 证毕。

另外，也可由(ii)推导出(iii)之结果。在(ii)的等式中以$\bar{A}$，$\bar{B}$分别代换A，B，即得

$\overline{\bar{A}\bar{B}}=\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}=A+B$，

两边再各取其对立事件，即得 $\bar{A}\bar{B}=\overline{A+B}$，证毕。

(iv) $\omega\in A-B$等价于$\omega\in A$而且$\omega\bar{\in}B$，又等价于 $\omega\in A$而且$\omega\in\bar{B}$，即等价于$\omega\in A\bar{B}$。故 $A-B=A\bar{B}$，证毕。

§2 概率的直接计算

概率的古典定义

设一个试验的一切可能结果是N个互不相容且具有等可能性的基本事件，试验时这N个基本事件必有一件发生。对于随机事件A，若这N个基本事件中有M个基本事件是有利于事件A的发生的，则定义随机事件A的概率等于有利于A的基本事件数M与基本事件的总数N的比值：

$$P(A)=\frac{M}{N}. \qquad (1—7)$$

这个定义常常叙述为：有利场合数M与总场合数N的比值。

特别地，对于必然事件U，每一个基本事件都是有利的。故 $M=N$；对于不可能事件V，每一个基本事件都是不利的，$M=0$。因此U的概率与V的概率总是分别等于1与0：

$$P(U)=1; \qquad P(V)=0. \qquad (1—8)$$

为了计算N与M，常常应用排列与组合的下述公式：

(1) n个不同的元素，全部取来进行排列，则排列的种数为$n!$；

(2) n个不同的元素，每次任意从中取出r个不同的元素来进行排列，则所有不同排列的种数为

$$A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!};$$

(3) n个不同的元素，每次任意从中取出 r 个不同的元素来进行组合，则所有不同组合的种数为

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\times 2\times\cdots\times r} = \frac{n!}{r!(n-r)!};$$

(4) n 个不同的元素，每次允许重复地从中任取 r 个元素来进行排列，则所有不同排列的种数为n^r。

几何型概率

概率的古典定义只适用于基本事件总数是有限数的情形。假设试验的基本事件总数有无穷多个，那就可以用几何图形的测度来表示其总和，设为S（例如线段长度，平面图形的面积，立体图形的体积等），其中的一部分，即有利于随机事件A的基本事件数，也可以用类似的几何图形的测度来表示，设为s，则事件A的概率可定义如下：

$$P(A) = \frac{s}{S}. \qquad (1\text{—}9)$$

习题1.7 一部四卷的文集，按任意次序放到书架上，问各卷自左向右或自右向左的卷号顺序恰好为1，2，3，4的概率是多少？

【解】 一切可能的排列次序总数为 $N=4!$，有利于所讨论之事件的排序项序总数为$M=2$。即按1，2，3，4及4，3，2，

1两种次序排列．代入公式(1—7)得

$$P=\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}.$$

习题1.8 电话号码由5个数字组成，每个数字可以是0，1，2，…，9中的任意一个数，求电话号码是由完全不相同的数字组成的概率。

【解】 一切可能结果的总数，是从10个数字中允许重复地选取5个进行排列的总数，即 $N=10^5$；有利的情形则是在10个数字中不重复地选取5个进行排列的种数，即 $M=A_{10}^5$。按公式(1—7)，得

$$P=\frac{A_{10}^5}{10^5}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10^5}=0.3024.$$

习题1.9 设有 n 个房间，分给 n 个人，每个人都以 $\frac{1}{n}$ 的概率进入每一房间，而且每间房里的人数没有限制，试求不出现空房的概率。

【解】 n 个房间分给 n 个人，人数不限，即每个房间可以重复分配给不同的人，这相当于取 n 个房间给 n 个排列好的人，可以重复取，故可能的排列种数为 $N=n^n$；没有空房，即每人进入一间房，没有把一间房分配给不同的人，这相当于 n 个房间不重复地分配给 n 个排列好的人，也就是取 n 个房间进行全排列，故 $M=n!$。

所求的概率是

$$P=\frac{n!}{n^n}.$$

习题1.10 把10本书任意地放在书架上，求其中指定的三本书放在一起的概率。

【解】 总的可能场合数$N=10!$；

有利的场合数相当于把指定的三本书当作一个元素进行全排列的总数，乘以这三本书相互之间进行全排列的总数，即$M=8!3!$。故

$$P=\frac{8!3!}{10!}=\frac{3\cdot2}{10\cdot9}=0.067.$$

习题1.11 在0至9这十个整数中，任取四个，能排成一个四位偶数的概率是多少？

【解】 0至9十个数字不重复地任取4个排列的种数$N=A_{10}^{4}$；排成偶数时，最后一位数（个位数）有5种取法：0，2，4，6，8，当它取定之后，前面三位数可以从其余9个数字中取3个来排列，于是排列的种数为$M_1=5A_9^3$；但四位有效数字不能以0开头，故应把首位数字是0的情况除掉，而首位数是0时，最后一位数字只有4种取法，中间的两位数字从余下的8个数字中取2个来排列，故排列的种数为$M_2=4A_8^2$。

故

$$P=\frac{M_1-M_2}{N}=\frac{5A_9^3-4A_8^2}{A_{10}^4}=\frac{5\cdot9\cdot8\cdot7-4\cdot8\cdot7}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{41}{90}.$$

习题1.12 袋内有5个白球与3个黑球。从其中任取两个球，求取出的两个球都是白球的概率。

【解】 基本事件的总数$N=C_8^2$；有利的基本事件数$M=C_5^2$。故所求的概率

$$P=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}{\dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1}}=\frac{5}{14}=0.375.$$

习题1.13 从一付扑克牌(52张)中任取四张，求四张牌的花色各不相同的概率。

【解】 基本事件的总数 $N=C_{52}^4$; 有利的情况是四种花色中各取一张，其基本事件数$M=(C_{13}^1)^4$. 所求的概率

$$P=\frac{(C_{13}^1)^4}{C_{52}^4}=\frac{13^4}{\dfrac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{2197}{20825}\approx 0.1054.$$

习题1.14 在 6 位随机数字中，求数字 5 恰好出现 3 次的概率（设这种随机数字包括以 0 开头的数字）。

【解】 6 位随机数字，相当于从 0 — 9 这十个数字中允许重复地抽取 6 个来进行排列，故基本事件的总数$N=10^6$; 数字 5 出现在哪三个位置，有C_6^3种选择，余下三个位置选数的方法有9^3种. 则有利的基本事件数 $M=C_6^3\cdot 9^3$. 故

$$P=\frac{C_6^3\cdot 9^3}{10^6}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{9^3}{10^6}=\frac{2\cdot 9^3}{10^5}=0.0146.$$

习题1.15 在一批（N个）产品中有M个是次品. 从这批产品中任取 n 个产品，求其中恰有m个次品的概率.

【解】 从N个产品中抽取 n 个产品，基本事件的总数为C_N^n; 有利的情况是从M个次品中恰好取得m个，同时要在$N-M$个正品中取得余下的$n-m$个产品，则有利的基本事件数是$C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}$.