Fuzzy集的表现理论及其应用

刘文奇 著

云南科技出版社

Fuzzy集的表现理论及其应用

Fuzzy Ji De Biaoxian Lilun Jiqi Yingyong

刘文奇　著

云南科技出版社

本书受云南省学术著作出版基金
云南省应用基础研究基金资助

责任编辑:单沛尧　赵　敏
封面设计:刘泓滨

Fuzzy 集的表现理论及其应用

刘文奇　著

云南科技出版社出版发行(昆明市书林街100号)
云南教育印刷厂印装

开本:850×1168　1/32　印张:5.5　字数:130千
1999年5月第1版　1999年5月第1次印刷
印数:1—1000

ISBN 7-5416-1277-4/O·50　定价:15.00元

内容提要

本书系统地总结了 Fuzzy 集表现理论研究的成果。内容由集合套表现、随机集落影表现、软代数表示和高维 Fuzzy 集的变权合成等四个方面组成，涉及了迄今为止的所有表现方法。书中相当一部分内容系作者近期的工作。高维 Fuzzy 集的变权合成系 Fuzzy 集表现理论与决策分析的交叉领域，是近期发展起来的变权分析的基本内容，本书在第六章中作了系统归纳和发展。

本书可作为数学、管理学、系统工程等专业和相关专业的研究生及研究人员的参考用书。

序

众所周知，自1985年Zadeh, L.A. 提出关于模糊集这一开创性工作之后，模糊数学的研究获得了迅速的发展，目前已经形成了一个具有广泛应用的新学科。在我国是蒲保明、刘应明两位教授于1977年率先发表论文，创造了模糊集的重于关系和模糊拓扑的有点化理论。现在我国学者已在国际模糊数学界占有重要地位，并且在模糊拓扑、模糊分析、模糊代数与模糊集的各种应用等方面于国内外出版了许多书著。

刘文奇同志的"模糊集的表现理论及其应用"一书，除相应地介绍了我国汪培庄、罗承忠、李洪兴、王国俊等教授的一些基础性相关工作外，特别是系统地综述了作者关于模糊集表现理论及应用方面的研究成果，其篇幅达全书的近一半之多。

注意到有关模糊集基础理论的书著迄今仍不多见，表现理论的专门著作更是空白。因此，本书的出版必定会引起广大同行们的兴趣，也必定有助于模糊数学研究的进一步发展。

吴从炘

1999年元月

前 言

Fuzzy集的表现理论是Fuzzy数学基础理论研究中最重要的内容之一。自Fuzzy数学诞生之日起，人们就开始研究Fuzzy集的表现问题。最早的成果是截集表现定理，它已经成为Fuzzy集论中基本定理之一。

作为截集表现定理的自然发展，1983年我国学者罗承忠首次引入了集合套概念，从而给出集合套定理。这在理论上奠定了Fuzzy集论的基础（针对Zadeh算子而言）。1991年他又引入可列集合套把这一定理进行推广。1995年，史福贵又引入L_β集合套与L_α集合套，从而获得了L-fuzzy集的集合套定理；1996年，他进一步建立了分子集合套理论。这一系列成果使集合套表现理论成为Fuzzy集理论的基本组成部分，同时也成为经典数学结构向Fuzzy数学结构过渡的主要桥梁。现在，集合套方法已是Fuzzy集论中主要的理论方法之一。

Fuzzy集的另一表现方法是把Fuzzy集视为随机集的落影。这是汪培庄和Cpodman, I. R. 于1985年前后独立提出的。它是Fuzzy统计与集值统计的基础。落影表现理论的特点是应用背景更强。可以根据二维随机变量的联合尺度分布来确定应用中Fuzzy算子的形式。它体现了Fuzzy算子选择的灵活性，也阐明了隶属函数的统计实质和客观性。

Fuzzy集表现理论的第三个发展是向抽象的格表示论延

伸，成为现代格论的重要分支。在这一领域内，我国学者刘应明、王国俊等人已经在拓扑表示上取得了突出成就，在国际上具有重要影响。近两年，裴礼文等人也在软代数表示方面取得了一些成果。

Fuzzy集表现理论的第四个发展是高维Fuzzy集的合成理论。这也是Fuzzy数学与决策分析的交叉领域。我国学者汪培庄于1985年首次提出了变权的思想。1995年李洪兴给出了惩罚型变权的公理化描述使变权研究走上了数学轨道。1996年，李洪兴又给出了混合型变权，从而使变权综合更具一般性。

综上所述，我国学者在Fuzzy集表现理论研究中处于国际领先水平。同时这些成果也显示了这一领域丰富的研究内容，体现了这一理论在整个Fuzzy数学中的重要地位。

我从1994年起师从罗承忠教授学习Fuzzy集表现理论，同时也受到李洪兴教授的直接指导。经过几年的学习和研究，获得了一些体会和成果。本书便是我对Fuzzy集表现理论的学习体会和研究成果的总结。

本书的结构大致是：第一章为全书的预备知识；第二章为集合套表现理论（其中第三、四、五节为本人的工作）；第三章为Fuzzy集的落影表现理论；第四章讨论软代数表示问题（其中第二、四节为本人工作）；第五章为本人在软代数上的可测结构方面的工作；第六章介绍高维Fuzzy集的合成与综合决策（其中第五、六节为本人工作）。

本书的写作基本上是以作者近年来的研究成果为主要内容。为了展现Fuzzy集表现理论的基本框架，书中也引用了前人的一些基础性工作，其中主要是汪培庄、罗承忠、李洪兴、王国俊等先生的工作。因此，本书还远不是全面介绍Fuzzy集表现理论的著作，特别是在抽象的格表示论方面还比较薄

弱。但由于目前条件所限，只有争取在今后修订版中有所作为，也期待着同仁们更权威的著作来解决这一问题。

即便是这样一本小册子，也绝非我个人的功劳。我要感谢罗承忠教授、李洪兴教授、张振良教授对我多年的指导。感谢汪培庄教授、王国俊教授等人，他们丰富的成果成为本书的基础。同时，对李继彬教授、何湘藩教授对本人的关心和对本书的热情推荐，以及吴从炘教授在眼科手术后不久还不允许长时间阅读的情况下仍热情地为本书作序深表谢意。

本书的顺利出版有赖于云南省学术著作出版基金会的资助和云南省自然科学学术著作评审委员会专家们的厚爱。同时，书中的主要成果曾获云南省自然科学基金的长期资助。在出版过程中，云南科技出版社提供了很大帮助，云南省新闻出版局法规处吴仕龙处长也给予了作者很多帮助。在此，向上述机构和个人致谢。

最后，我还要感谢的是我的夫人黄桃林女士，是她做了许多与本书内容无关但对本书形成非常重要的日常工作。

刘文奇 谨识

1998年12月于昆明

目　录

Contents

第一章　Fuzzy集与格论概要

§1　经典集合及其运算

集合论是现代数学的基础。集合是现代数学的最基本的概念之一，它之所以重要是由于它可以表现概念，即表示概念的外延。

与早期的集合论不同，现代数学中的集合是就某个更大的集合(即论域)而论的。换言之，现代数学中的任一个集合都是某个更大的集合的子集。

设 X 为论域，X 中的一部分称为 X 的子集，常以 A、B、C、……记之。称 X 中的个体(对象)为元素，以 x、y、z、……记之。如果 x 属于 A，则记为 $x \in A$；否则，记为 $x \notin A$。用 $\emptyset$ 表示空集，X 作为自身的子集仍以 X 记之。$\emptyset$ 和 X 是 X 的两个特殊的子集，也称作平凡子集。我们把 X 的全体子集记为 $\mathscr{P}(X)$，称之为 X 的幂集，有时也记作 2^X。若 X 为具有 n 个元素的有限集，则易知 X 的子集有 2^n 个。

对 $\forall A,\ B \in \mathscr{P}(X)$，定义

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

$$A^c = \{x | x \notin A\}$$

称 $A \cup B$ 为 A 与 B 的并集，$A \cap B$ 为 A 与 B 的交集，A^c 为 A 的补集。

设 A、B 是 X 的子集，在 $\mathscr{P}(X)$ 中定义二元关系“$\subseteq$”

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow x \in A \text{ 时必有 } x \in B$$

很容易证明，“$\subseteq$”具有下列性质:

(1) **自反性**: $A\subseteq A$;

(2) **对称性**: $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Rightarrow A=B$;

(3) **传递性**: $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$;

(4) $A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cup B=B$;

(5) $A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cap B=A$;

(6) $A\subseteq B\Longleftrightarrow B^c\subseteq A^c$;

(7) $\varnothing\subseteq A$, $A\subseteq X$ $(\forall A\in\mathscr{P}(X))$;

(8) $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$;

(9) $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$。

代数系统$(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,{}^c)$具有以下性质:

(1) 最大元 X 和最小元$\varnothing$，即$A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing, X\cup A=X$, $X\cap A=A$;

(2) **交换律**: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(3) **结合律**: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(4) **分配律**: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(5) **补余律**: $A\cup A^c=X$, $A\cap A^c=\varnothing$;

(6) **复原律(或对合律)**: $(A^c)^c=A$;

(7) **逆序律**: $A\subseteq B\Longleftrightarrow B^c\subseteq A^c$;

(8) **幂等律**: $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(9) **吸收律**: $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

(10) **对偶律**: $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$;

(11) **完全分配律**: I, J_i 均为指标集，有

$$\bigcap_{i\in I}\Big(\bigcup_{j\in J_i}A_{ij}\Big)=\bigcup_{f\in\prod\limits_{i\in I}J_i}\Big(\bigcap_{i\in I}A_{if(i)}\Big),\quad \bigcup_{i\in I}\Big(\bigcap_{j\in J_i}A_{ij}\Big)=\bigcap_{f\in\prod\limits_{i}J_i}\Big(\bigcup_{i\in I}A_{if(i)}\Big);$$

(12) **无限对偶律**: $\big(\bigcup\limits_{t\in T}A_t\big)^c=\bigcap\limits_{t\in T}A_t^c$, $\big(\bigcap\limits_{t\in T}A_t\big)^c=\bigcup\limits_{t\in T}A_t^c$ (T为指

标集)。

设 2^X 为 X 到 $\{0, 1\}$ 的映射的全体，在 2^X 中记 $A(x)$ 为子集 A 的特征函数，即视 A 为映射

$$A: X \to \{0, 1\}$$

$$x \to A(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\in A\\ 0 & 当\ x\notin A\end{cases}$$

(其中 A 为 X 的子集)。记 $\vee=\sup$, $\wedge=\inf$, 并且在 2^X 中定义

$$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)$$

$$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)$$

$$A^c(x)=1-A(x)$$

则我们有

定理 1.1.1. $(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,{}^c)$ 与 $(2^X,\cup,\cap,{}^c)$ **同构。**

也就是说，一个 X 的子集可视为一个 X 到 $\{0, 1\}$ 的映射，反之亦然。

§2 Fuzzy 子集及其运算

设 X 为经典集合，为论域。其经典子集 A 的特征函数 $A(x)$ 唯一确定，它指明了 $\forall x\in X$ 对 A 的隶属程度。这种程度只有两个状态，即 0 和 1。因此，它只能表现出"非此即彼"的精确概念的外延。如果打破隶属程度只取 0 和 1 的限制而允许取 $[0, 1]$ 中的任意值，则这样的隶属度就可以表现出"亦此亦彼"的模糊概念。出于这样的考虑，Zadeh, L. A. 于 1965 年提出了"Fuzzy子集"这一概念。这里"Fuzzy"一词意为模糊、不分明、弗晰等。

定义 1.2.1 给出映射 $A: X\to[0, 1]$, $x\to A(x)$, 则称 $A(x)$ 确定一个 X 的 **Fuzzy 子集**，$A(x)$ 称为 A 的**隶属度函数**，对具体的 $x_0\in X$, 称 $A(x_0)$ 为 x_0 对 A 的**隶属度**。

以后我们对 Fuzzy 子集与定义在 X 上取值于 $[0, 1]$ 的函数不

加区分地使用。

全体 X 的 Fuzzy 子集构成的集合记为 $\mathscr{F}(X)$，称为 X 的 Fuzzy 幂集。显然 $\mathscr{F}(X)=[0,\ 1]^X$(即 X 到 $[0,\ 1]$ 映射的全体。特别当 $A(x)\in\{0,\ 1\}$ 时，A 退化为 X 的经典子集，所以经典子集可视为特殊的 Fuzzy 子集。换言之，$\mathscr{F}(X)$ 可视为 $\mathscr{P}(X)$ 的函数式扩张。

例 1.2.1 以人的年龄作为论域 X, Zadeh, L. A. 给出了"年老" O 与"年轻" Y 两个 Fuzzy 子集，它们的隶属度函数分别为

$$O(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & x>50\end{cases}$$

$$Y(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & x>25\end{cases}$$

图像如图 1.2.1。

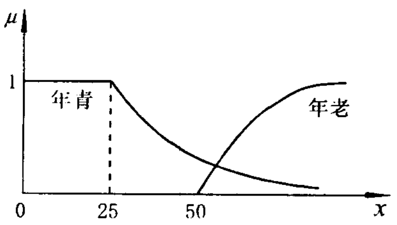


图 1.2.1

Fuzzy 集有各种表达方式，如图式

$$A=\{(x,\ A(x))\mid x\in X\}$$

有限论域上的分数式

$$A=\sum_{i=1}^{m}A(x_i)/x_i$$

(其中 $X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m\}$)

以及无限论域上的积分式

$$A=\int_X A(x)/x$$

常用下面三种标准函数表示 Fuzzy 集的隶属度函数，依它们的图形形状分别称为 S 型、Z 型和 π 型。

(1) S 型

$$S(x;\ a,\ b)=\begin{cases} 0 & x\leqslant a \\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2 & a<x\leqslant \dfrac{a+b}{2} \\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & \dfrac{a+b}{2}<x\leqslant b \\ 1 & x>b \end{cases}$$

其图像如图 1.2.2(a).

(2) Z 型

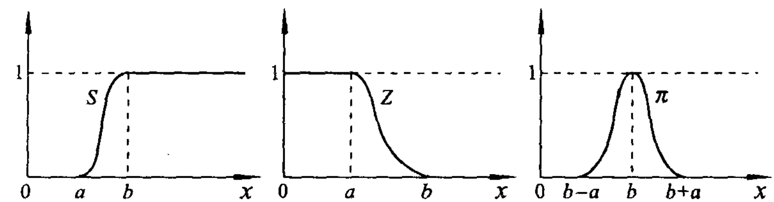
$$Z(x;\ a,\ b)=1-S(x;\ a,\ b)$$

其图像如图 1.2.2(b).

(3) π 型

$$\pi(x;\ a,\ b)=\begin{cases} S(x;\ b-a,\ b) & x\leqslant b \\ Z(x;\ b,\ b+a) & x>b \end{cases}$$

其图像如图 1.2.2.(c).



(a) (b) (c)

图 1.2.2

定义 1.2.2 设 A、$B\in\mathscr{F}(X)$，若 $\forall\, x\in X$ 有 $A(x)\leqslant B(x)$，则称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记作 $A\subseteq B$. 若 $\forall\, x\in X$, $A(x)=B(x)$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 真包含于 B，记作 $A\subset B$. 隶属度函数恒为零的 Fuzzy 集称为空集，记为 $\varnothing$. 隶属度函数恒为 1 的 Fuzzy 集称为全集，仍记为 X.

$\mathscr{F}(X)$ 中的二元关系有如下性质: