SPT 高等院校选用教材 理工类

数学基础

中国科学技术大学
汪芳庭 编著

科学出版社

高等院校选用教材(理工类)

数　学　基　础

中国科学技术大学

汪芳庭　编著

科　学　出　版　社

2001

内 容 简 介

本书全面介绍数学基础的历史，阐述现代数学主体的基础——ZFC集论，重点讲述四种数（自然数、实数、序数和基数）的理论．书中采用一种特殊的构造实数的新方法——非Archimedes序域法，它与传统的Dedkind分割和Cantor基本序列等方法不同，是一种有益的新的尝试．

本书适合数学系本科生、研究生作为教材，也可供理工科其他专业作为教学参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

数学基础/汪芳庭编著.-北京:科学出版社,2001

(高等院校选用教材(理工类))

ISBN 7-03-009273-2

Ⅰ.数… Ⅱ.汪… Ⅲ.数学基础-高等学校-教材Ⅳ.O143

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第13749号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年7月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2001年7月第一次印刷 印张:16 1/2

印数:1—3 000 字数:295 000

定价:25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈杨中〉)

前　言

自 1995 年秋,中国科学技术大学数学系为数学系一年级学生试开数学基础课,至今已有六届.对这项试验课程,学生们热情很高,不断地提出宝贵的意见和建议,给了作者很大帮助. 本书是在本课程所用讲义的基础上形成的,是课程试验的总结,其中包括学习研究的心得.感谢冯克勤、程艺、李尚志等校、系领导的大力支持,供作者有幸做了这件有意义的事情.

本书在概述数学基础的历史之后,主要介绍了现代数学主体的基础——ZFC 集论,重点讲述四种数的理论,这四种数是自然数、实数、序数与基数.在这四种数中,自然数被放在中心位置,贯穿始终. 关于实数,书中采用特殊的非 Archimedes 序域来构造,这不同于传统的 Dedkind 分割与 Cantor 基本序列等方法,是一种有意义的尝试. 书中 * 号仅供选学.

北京师范大学数学系王世强先生长期以来给予很多支持和鼓励,在此深表谢意.

感谢张卜天同学,他认真阅读了本书部分初稿,提出了很好的改进建议,有不少已被采纳.

特别感谢科学出版社杨波编辑,由于他的热情支持,本书才迅速出版.

最后向有兴趣的读者建议:书中的练习可不必全做,但应尽量动手多做;在尚无自己的解法前,尽量先不看书后的解答;书中定理或命题的证明,最好也先自己动手试证,再看书上的证明,这样效果会更好. 读者们在学习数学知识的过程中,应注意加强对数学科学的思想和意义的理解,希望本书在这一点上也能起到一定的作用.

作　者

2000.12.16

目　录

第一章　历史概述

数学基础是研究什么的？特别，它是否仅为应付“数学危机”而存在？我们想先通过对它的历史的简要考察来回答上述问题.

本章要点：

1．在数学基础方面，人类有过什么样的研究与成就？

2．关于数学基础，历史上出现过哪些矛盾？

3．数学基础的理论成就意义何在？

§ 1.1　欧几里得几何

人类古代数学经历了漫长的积累过程. 在巴比伦与古埃及数学的基础之上，公元前 6 世纪起，出现了灿烂的古希腊数学，其前期的精华积淀浓缩在公元前 3 世纪的光辉著作——欧几里得的《几何原本》之中. 该著作一问世，古希腊其他前期数学著作几乎被逐渐废弃.

《几何原本》这部巨著“雄视数学界两千余年，其主要内容几乎原封不动地保留在现代的中等数学教育中”[1]，至今已出现过一千多种版本. 它对数学、一般科学及科学思想所产生的巨大影响是其他数学著作难以比拟的.

1.1.1　《几何原本》的学术背景

欧几里得(Euclid，约公元前 330～前 275)是亚历山大大学数学教师. 对他本人，公元 3 世纪末的古希腊数学家帕普斯(Pappus)留下的赞许是：“谦虚谨慎和关怀他人”[2]. 此外，生平不详.

从公元前 6 世纪至欧几里得时代，古希腊的经济、政治、文化、历史及地理环境等社会条件造就了一大批著名学者与思想巨人，为了理解《几何原本》的渊源及意义，现按历史顺序列出其中有关的最重要的几位，他们是众多学派中最著名学派的首领.

(1) *泰勒斯*(Thales，*约公元前* 624～*前* 547)

他曾在埃及、巴比伦从事商业与学术活动，后回到米利都创立了他的学派. 他被称为古希腊第一位哲学家，在数学、天文学、气象学等方面皆有贡献. 他还被称为“希腊几何学的先驱”[3].

(2) 毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前580～前500)

曾游学埃及、巴比伦等地,后回家乡办学,建立学派. 该学派证明了勾股定理,发现了不可通约线段存在(因而发现了无理数),并被称为数论的先驱. 他们还运用数学来研究天文与乐律. 与古代传统一致,在他们那里,算术与代数的研究以几何形式进行. 该学派的哲学思想以"数"为中心,认为整数是万物的起因(常被简称"万物皆数").

(3) 柏拉图(Plato,公元前427～前347)

曾拜哲学家苏格拉底(Socrates,公元前469～前399)为师. 他所创立的学园是公元前4世纪古希腊的思想中心,是毕达哥拉斯学派与欧几里得学派联系的纽带. 他建立了以理念论为核心的哲学体系,形成一种数学化哲学,对后世影响很大. 他十分重视教育,在学园内培养了大批著名学者,包括一些百科全书式的人物,其中最有名的一位是亚里士多德(见下面(5)). 该学派数学上的成就大多融入《几何原本》.

(4) 欧多克斯(Eudotus,约公元前400～前347)

曾向毕达哥拉斯学派学习,也曾就读于柏拉图学园,后在学园任教. 他与学园其他数学家修迪乌斯(Theudius)等的著作是《几何原本》的直接先驱. 他的天文学成果被后世托勒玫(Ptolemy,约90～168)继承. 他建立了关于比例的理论,提出了计算面积等几何量的穷竭法.

(5) 亚里士多德(Aristotle,公元前384～前322)

柏拉图的学生,在柏拉图学园学习和从事学术活动20余年. 柏拉图曾称赞他是"学园精英". 他被称为"古代最大的思想家"[4],古希腊哲学家中"最博学的人物"[5]. 他总结以往科学与哲学成就,历史上第一次全面系统地研究了逻辑,是形式逻辑(即传统逻辑)的奠基人. 他的业绩在量上和质上都压倒先人,其逻辑著作雄视逻辑界约2000年. 他对欧几里得有重要影响,这种影响主要是逻辑上的(只有少量属于他的定理进入《几何原本》). 从他所建立的演绎法体系可清晰看见《几何原本》的逻辑背景.

以上可以看出,古希腊学者对数学的思考是与对自然科学、逻辑学和哲学等的思考紧密结合在一起的,这一点可以帮助我们理解古希腊人何以能在那样长的历史时期内始终站在世界科学发展的最前列.

就在亚里士多德离开历史舞台的前后,欧几里得登上了该舞台的同一点. 可以说,《几何原本》不是欧几里得孤立一人的成就,而是时代的产物. 从逻辑上看,《几何原本》事实上是亚里士多德逻辑演绎体系的几何表现;从数学上看,《几何原本》是欧几里得对古希腊前期为数众多的数学著作极其成就的系统编纂(当然也包含他本人的重大贡献).

一句话,《几何原本》是含有欧几里得本人智慧在内的时代智慧的结晶.

1.1.2 几何学——古希腊数学的主体

毕达哥拉斯学派发现,正方形对角线与一边之比($\sqrt{2}$)不是整数对整数之比,即:对角线与一边是不可通约(或不可公度)的.(反设$\sqrt{2}=p/q$,其中 p 与 q 是两个无公因子整数,而由 $p^2=2q^2$ 即可推出 2 是 p 与 q 的公因子.)这一事实的发现本是该学派的最大成就之一,但反倒让他们感到震惊,因为违背了该学派万物皆依赖于整数的信条.据说发现这一事实的希帕苏斯(Hippasus)被他们扔进海里(另一说法是希帕苏斯因泄密而受严惩).他们是不愿意放弃"万物皆数"信条的.对此,莫绍揆先生曾有一段很恰当的描述:

"任何量,在任何精确度的范围内都可以表示成有理数,这不但在希腊时代是人们普遍接受的信条,就是在测量技术已经高度发达,可以测量高度精密的今天,这个断言,似乎也是毫无例外的正确!可是居然发现了不可公度的两个线段;……这该是多么违反常识的事,表面看来,也是多么荒谬的事.要把这种'荒谬'的事承认下来是多么困难呵!它简直把以前所知道的事情根本推翻了."[6]

正整数是人类最先得到的抽象数学概念,其现实原型无处不在.除此之外,数学中再难有更简单且更重要的基本概念了.古代,人们产生对整数的崇拜,是很自然的.

很长一段时期内,"万物皆数"信条所遇见的上述危机(常被叫做"第一次数学危机")成了希腊学者关注的焦点.柏拉图在他的著作中提出问题,"呼吁关于不可公度数的知识"[7].

欧多克斯用几何方法来解决这一难题.首先,把数的概念与量的概念分开,不谈无理数,可以谈线段长度(或面积、体积等量)之比.他建立了精巧的关于量的比例理论,这一理论在《几何原本》第五卷中得到阐述.与其说欧多克斯解决了问题,不如说他回避了问题:用"量的比"来回避无理数.

没有无理数,怎样解形如 $x^2-2=0$ 这样的方程?古希腊人从几何上考虑,把方程的解看作是一线段的长度.这样,几何地"解方程"变得可以进行.当然,方程本身也要几何化.古希腊数学于是形成了一大特点:算术与代数长期依附于几何.数学量常依其几何意义来命名(如说"平方"、"立方"而不说"二次方"、"三次方"),数学结论常用几何方式来表述(如恒等式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$被表示成几何图形:边长为 $a+b$ 的正方形被剖分成四块——边长分别为 a 和 b 的两个正方形及两个以 a,b 为邻边的矩形).人们渐渐形成了一种习惯认识:只有几何才严格;即使从算术上或代数上得到一个结论,也

总想去另找一个几何证明.

几何长期占统治地位与几何本身特点有关. 几何中,图形直观便于想象,概念清晰易于定义,结论明确使人相信. 几何学自然变成了逻辑首先占领的地盘. 相比之下,数系理论的建立要复杂得多. 任何一种严密的数系理论的建立,都基于对无限及无限过程的深入认识,这在古希腊是无法达到的. 受历史条件的限制,他们无法给数的知识建立起类似于几何的理论,尽管当时他们已经知道了大量关于数的经验事实.

就这样,古希腊对数学的理论思维从数转向形,从算术、代数转向几何. 几何学成了数学的主体. 几何基础便成了当时数学的基础. 当时人们对"数学危机"的思考与回答在很大程度上决定了《几何原本》的最终形式,但远不是形成《几何原本》的惟一动因.

从较窄的意义理解,数学基础的任务是:研究数学的主体是在哪些基本概念与基本事实之上用何种方式建立起来的. 从这个意义上理解,欧几里得的《几何原本》是人类第一部数学基础的理论著作.

1.1.3　演绎证明的范本

从现代观点看,《几何原本》逻辑上的漏洞很多,历史上也曾不断有人指出它的不足. 但这并未影响它的历史功绩,并未妨碍人们长期把它当作演绎证明的范本. 欧几里得本人除了《几何原本》,还另有至少八部专著. 有的已经失传(如《二次曲线》、《曲面轨迹》等),有的虽已流传至今(如《数据》、《论剖分》等),但并未被人重视. 显然,欧几里得掌握的数学知识比他选入《几何原本》中的要多得多. 面对浩瀚的原始数学资料,他精心选择,并对所选材料作了高明的编排.《几何原本》所包含的丰富内容固然重要,但更重要的不是这些材料本身,而是由这些材料有机结合而成的著作在整体结构上所具有的生命力. 作为一本数学基础书,《几何原本》呈现在人们面前的不是事实的简单堆砌,而是一幅逻辑演绎体系的精彩画卷.

《几何原本》第一卷是这样开始的:对点、线、面、直线与平面等基本概念作了描述性定义(如"点是没有部分的","线是没有宽度的"等),继而定义了角、圆、平行线等一批概念. 作为推理的出发点,欧几里得列出了如下公理与公设[8].

公理 1. 等于同量的量相等.

公理 2. 等量加等量,其和相等.

公理 3. 等量减等量,其差相等.

公理 4. 互相重合的一定相等.

公理 5. 整体大于部分.

公设 1. 从每一点到另一点可引直线.

公设 2. 每条直线都可以无限延长.

公设 3. 以任意点为中心可作半径等于任意长的圆.

公设 4. 凡直角都相等.

公设 5. 同平面两直线与第三直线相交,若其中一侧的两个内角之和小于二直角,则该两直线必在这一侧相交.

从上述公理与公设的内容可以看出,公理与公设二词在稍有不同的意义下被使用:公理被认为对一般学科皆真;公设则是当时被认为正确的几何学假设. 就在这样的基底上,构筑起宏伟大厦. 从这寥寥 10 条似乎不证自明的公理与公设出发,欧几里得一个接一个地顺着有序的链条证明了 465 个不容怀疑的基本命题. 靠着环环相扣的推理,命题与命题之间内在的有机联系被清楚地揭示出来. 那些被证出的命题并不都能一眼看出是显然成立的,例如:三角形内角和为 180°,正多面体只有 5 种,等等,并不都显然成立,但都不容置疑! 问题就在于,欧几里得证明这些命题所使用的推理方法正是亚里士多德先已系统建立起来并已被当时学者们普遍接受的演绎法,其规则保证能够从已知正确的前提出发推出一定是正确的新的结论. 只要愿意,任何人都可以去实测成千上万个不同三角形的内角,并得出结论:三角形内角和为 180°. 但这种由实测得出的结论不会被当作数学定理认可. 数学上只认可演绎证明出来的结论,那才是不容置疑的.《几何原本》把理论思维的力量、逻辑的力量,光彩夺目地表现出来. 从此,"演绎证明"便成了人类数学王国的宪法.

至今人们仍在猜测《几何原本》的写作目的. 有人估计这部著作是为学生课本编写的[9]. 不管怎样,《几何原本》的教育学意义难以估量. 长时期以来,它事实上是全人类共同的教科书.

爱因斯坦(A. Einstein,1879~1955)曾回忆:

"12 岁那年,我经历了性质截然不同的另一个'奇迹':新学年开始时,我得到一本关于欧几里得平面几何学的小册子. 书中的断言比比皆是,举例说,三角形的三条顶垂线交于一点——这固然不是显见的,却可以非常明确地把它证明出来,绝不会产生任何疑问. 这种明确的不容动摇的说法,给我一种难以形容的印象."[10]

爱因斯坦对欧几里得的成就还在下一段话里作过高度评价:

"西方科学的发展以两个伟大成就为基础,那就是:希腊哲学家发明形式逻辑体系(在欧几里得几何学中)以及通过系统的实验发现有可能找到因果关系(在文艺复兴时期)."[11]

§1.2 皮亚诺自然数理论

古希腊学者为人类早期数学建立的几何形式的基础，随着数学的发展显得太狭小、太不适宜了．经历漫长的过程，几何在数学中的统治地位终于被动摇．从17世纪开始，数学进入了蓬勃发展的革命时期——分析数学大发展时期．期间，几何本身也发生了重大变革．19世纪末，人们发现：数学在一定意义上向毕达哥拉斯"万物皆依赖于整数"的思想回归——当时已十分庞大的数学王国竟可以在自然数理论的基础之上建立起来．德国数学家克罗内克(L.Kronecker，1823～1891)曾风趣地说："上帝创造了整数，其他一切都是人造的．"[12]

1.2.1 分析数学——数学的新阶段

(一) 代数缓慢崛起

代数，从古希腊时期依赖于几何到摆脱几何的束缚走向独立强大，是在长时间内逐渐实现的，其中有一系列重要步骤，如：十进制记数法的普遍使用，用符号代替文字叙述，对无理数与负数的承认，对于数的运算规则的熟悉，解方程知识的大量积累，等等．解决实际问题的需要，把算术与代数一步步推上了数学的前台．到了欧洲的文艺复兴时期，这一进程突然加速，主要表现为：趋于定型的代数符号的大量使用，三次、四次代数方程有了解法，对数的发现与应用，等等．

代数方法的丰富、灵活与精确使代数在应用中越来越充分地显示出优越性．到这时，解析几何建立的条件成熟了．

(二) 解析几何——数学的转折点

坐标的概念在古希腊时代(甚至更早)就曾出现过，当时被用来测量与绘图．古希腊数学家阿波罗尼斯(Apollonius，公元前262～前190)在系统研究圆锥曲线时已用几何方式给出了圆锥曲线的方程．14世纪法国数学家奥雷斯姆(Oresme，约1323～1382)用坐标确定点的位置，并明确引进了直线方程，但尚不能说解析几何已经建立．这一学科的建立，一方面要依赖于代数符号的发展与代数方法的成熟；另一方面则决定于17世纪天文、力学等科学技术对曲线研究的迫切需求．现在人们一般认为解析几何的建立首先应归功于法国数学家、物理学家、哲学家笛卡儿(R.Descartes，1596～1650)，也归功于同时代的法国数学家费马(P.de Fermat，1601～1665)．

解析几何的思想是：采用坐标法把曲线等几何对象转换成代数方程，从而

可用代数方法对这些几何对象进行研究. 有了解析几何之后,代数的地位发生了根本变化. 代数非但不再像古代那样依附于几何,相反,它把几何当作应用自己方法的领地.

16 世纪,人类的社会实践使自然科学与数学研究的中心课题转向运动,转向各种变量之间的关系. 解析几何里,方程的未知数已转化为变量,这样,解析几何就为研究变量之间关系的微积分适时提供了几何舞台. 恩格斯(F.Engels,1820~1895)曾说:

“数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数、运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了. ”[13]

(三) 微积分诞生

17 世纪后半叶诞生的微积分,主要起源于几何与力学.

几何上有两类传统问题:第一类问题是求曲线的切线,第二类问题是求图形的面积. 从古希腊的阿基米德(Archimedes,约公元前 287~前 212)起就有大量学者进行过有成效的研究.

力学上有两类问题:第一类是求运动速度,第二类是求路程.

几何第一类问题与力学第一类问题密切相关,是微分学解决的典型问题;几何第二类问题与力学第二类问题也密切相关,是由积分学解决的. 重要的是,第一类问题与第二类问题之间存在着内在的联系,这种内在联系事实上就是微分与积分之间的互逆关系. 揭示出这种关系是微积分理论成熟的标志. 这件事主要归功于英国物理学家、数学家牛顿(I.Newton,1642~1727)与德国数学家、哲学家莱布尼兹(G.W.Leibniz,1646~1716). 微分与积分之间联系的一个重要公式被称作牛顿-莱布尼兹公式,它是微积分的精华. 正是牛顿、莱布尼兹,把众多学者曾贡献过的重大工程终于完成了. 在这众多学者中,牛顿的老师巴罗(I.Barrow,1630~1677)的工作最为杰出,他是认识微分是积分的逆运算的第一人.

(四) 分析数学大发展

微积分的诞生,开创了数学的新时期——分析数学大发展时期.若把初等数学简单地说成是常量数学,则分析数学便可说成是变量的数学. 分析数学的研究对象——函数,或变量与变量之间的关系,是从几何、力学及其他自然科学中抽象出来的,其研究成果有广泛的应用.

从微积分诞生起的两个多世纪里,分析数学在应用中发展壮大,逐渐成为数学的主体. 它的一个个分支相继(或与微积分同时)建立:无穷级数,常微分方程,偏微分方程,微分几何,变分学,复变函数和解析数论,等等.

从诞生之日起分析数学就在自然科学中显示出巨大威力. 各种物理规律

一个接着一个得到了精确的表述,精确的程度令人折服.借助于分析数学,人们越来越清晰地看见了一个量化的世界.

1.2.2　分析数学的基础危机

微积分以无穷小概念作为工具,故有时被叫做无穷小分析.在微积分诞生之初,无穷小被直观地随意使用.微商概念的典型现实原型——瞬时速度,被理解为无穷小时间间隔内的平均速度.研究非均匀的变化,用无穷小方法是很自然的,但无穷小是什么?并不十分清楚.谈到无穷小(及相关的无穷大)的合法性,莱布尼兹在 1687 年的一封信中说:“目前,我承认这可能尚未解决.”[14]

英国大主教贝克莱(G.Berkeley,1684～1753)在 1734 年的《分析学者》一书中嘲笑无穷小为“消失了的量的鬼魂”.他说:“在进行微分运算时,竟从不脸红地首先承认,然后又舍弃无穷小量.依靠双重错误你得到了虽然不科学却是正确的结果.”[15]

贝克莱的种种非难切中问题的要害.有人对贝克莱的非难给予回击,但都软弱无力.

分析数学在微积分诞生之后很长时间内,并没有严密可靠的基础,这一事情常被说成是“第二次数学危机”.事实上,这只是当时数学基础的危机.大多数数学家对此或不太在意,或无暇顾及.许多人也想解决危机,但不成功.“解释和评价牛顿、莱布尼兹的方法的书卷帙浩繁且谬误连篇”[16].

微积分诞生之后的 200 年,数学上是英雄辈出的革命时期.分析数学尽管缺少逻辑支持,但能通过自然科学的胜利为自己开辟前进的路.人们能预言哈雷彗星的回归,能以万分之一的精度观测到由数学计算所预言的神秘的海王星确实存在,谁又能怀疑数学的真实性?

革命顾不上现存法律,需要的是冲锋陷阵.法国数学家皮卡(C.E.Picard,1856～1941)在 1905 年说过:“如果牛顿和莱布尼兹知道了连续函数不一定可导,微分学将无以产生.”[17]

这是数学历史上特定时期出现的矛盾现象:一方面,成果辉煌;一方面,逻辑混乱.除了无穷小引起的矛盾,还存在着无穷级数使用上的混乱.例如,下面的级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

是什么?是 1,是 0,还是 1/2?各有说法.又如,有人常把幂级数当作多项式来运算.不正确地使用无穷级数引出许多错误的证明和错误的结论.分析数学的成果越多,需要澄清的困惑与矛盾也越多.越来越多的人开始关注分析

数学的基础,渴望重建数学王国的“法律秩序”.

寻找基础的困难超出了人们的想象.问题在哪里?原来,问题是由分析数学所承担的任务引起的,这个任务是:精确地表现运动与变化.为了精确表现运动与变化,必须跟无限打交道;而在有限与无限之间,不能照常规随意通行.习惯于有限思维的人类面对无限,困难可想而知.

整个18世纪,许多人,包括最伟大的数学家——瑞士的欧拉(L.Euler,1707~1783)与法国的拉格朗日(J.L.Lagrange,1736~1813)在内,都去努力克服危机,但都未成功.

在拉格朗日提议下,由拉格朗日任主任的柏林科学院数学分部于1786年特地设立一个奖项.竞赛宣言中说[18]:

“数学的功用,它所受到的尊敬,‘精确科学’这一极为贴切的桂冠,源于其原理的清晰、证明的严密及定理的精确.……一些当代著名分析学者则承认无穷量的术语是矛盾的.

因此,科学院期望有一个解释来说明为什么一个矛盾的假设却推出了那么多正确的理论,还希望有一个确切、清晰的描述,简而言之,一个真正的数学原理,它也许可以完全代替无穷……”

竞赛结果是:问题没有得到满意的答复.尽管如此,在23位应征者中,瑞士的惠利尔(S.L.Huillier)获了奖.他题写的一句话是:“无穷,是吞没我们思想的深渊.”

1.2.3 分析算术化

经历无数失败与挫折之后,为分析数学寻找基础的工作渐渐有了眉目,“法律秩序”随之渐渐恢复.这个过程就是19世纪的分析算术化过程,于19世纪末期完成.过程大体包括三个阶段:

第一阶段——极限论建立,主要以法国数学家柯西(A.L.Cauchy,1789~1857)与德国数学家魏尔斯特拉斯(K.T.W.Weierstrass,1815~1897)的工作为标志;

第二阶段——实数理论建立,主要以德国数学家戴德金(J.W.R.Dedkind,1831~1916)、康托尔(G.Cantor,1845~1918)与魏尔斯特拉斯等人的实数构造理论为标志;

第三阶段——算术化过程完成,以意大利数学家、逻辑学家皮亚诺(G.Peano,1858~1932)的自然数理论为标志.

在这过程中,数学家们艰难但开始卓有成效地跟无限打交道,从而在达到分析算术化的目的同时,也将人类数学的理论思维能力提高到了一个新高度.