面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for 21st Century

数学分析

上册

陈纪修 於崇华 金 路

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数学分析

上册

陈纪修　於崇华　金　路

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京) 112 号

图书在版编目(CIP)数据

数学分析　上册/陈纪修等. -北京:高等教育出版社,1999

ISBN 7-04-007742-6

Ⅰ.数…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.数学分析-高等学校-教材　Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 36966 号

数学分析　上册

陈纪修　於崇华　金路

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	北京外文印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　本	787×960　1/16	版　次	1999 年 9 月第 1 版
印　张	24.5	印　次	1999 年 9 月第 1 次印刷
字　数	450 000	定　价	25.60 元

内 容 提 要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材。本书以复旦大学数学系近20年中陆续多次出版的《数学分析》为基础，为适应数学教学面向21世纪进行改革的需要而编写的。结合了多年来教学实践的经验体会，从体系、内容、观点、方法和处理上，对教材作了有益的改革。

全书分上、下两册出版。

上册内容包括：集合与映射、数列极限、函数极限与连续函数、微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、反常积分等八章。

下册内容包括：数项级数、函数项级数、Euclid空间上的拓扑、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、含参变量积分、Fourier级数等八章。

本书可以作为高等院校数学专业数学分析课程的教科书，也可供其他有关专业选用。

序

摆在我们面前的这本书，是复旦大学数学系的几位教师根据面向21世纪教学内容和课程体系改革的要求，结合自身的教学实践，在近年内编写出来的数学分析教材。

说数学分析(或微积分)是数学系最重要的一门基础课程，恐怕并非过誉。因为它不仅是大学数学系学生进校后首先面临的一门重要课程，而且大学本科乃至研究生阶段的很多后继课程在本质上都可以看作是它的延伸、深化或应用，至于它的基本概念、思想和方法，更可以说是无处不在。正因为如此，大家把关注的目光投射到这门课程及其教材的改革上，并从不同的角度付诸实践，实在是很自然的。然而，自牛顿、莱布尼茨建立微积分，并经柯西、魏尔斯特拉斯等人为之奠定了相当严格的基础以来，二三百年中经过众多科学家的努力，微积分的基本理论框架及表达方式已历经了一个千锤百炼的过程。大厦早已建成，格局已经布就，改革谈何容易。尽管国内外已经出版的微积分教材为数颇多，但严格说来，真正能体现特色、符合改革精神的却太少。这门课程的改革既举足轻重，又颇具难度，是一个攻坚战。对这门课程的改革设想和实践，就像"每个读者心中都有自己的林妹妹"那样，也往往见仁见智，看来在相当长的一段时间内难以(也没必要)完全取得共识。

那么，不管特点如何各异，比较理想的微积分教材是否应该具有某些共性呢？我想利用这个机会，谈一些粗浅的认识，作为一家之言，就正于方家与读者。

首先，任何一门学问，就其本质来说，关键的内容、核心的概念，往往就不过那么几条；而发挥开来，就成了洋洋大观的巨著。理解了这些核心和关键，并通过严格的训练将其真正学到手，就掌握了这门课程的精髓，就能得心应手地加以应用和发挥，也就达到了学习这门课程的目的，并为培养创新人才打下了良好的基础。微积分也不例外。要让学生把主要的精力集中到那些最基本、最主要的内容上，真正学深学透，一生受用不尽。将简单的东西故弄玄虚，讲得复杂、烦琐，使学生莫测高深的，决不是一个水平高的好教师；相反，将复杂的内容，抓住实质讲得明白易懂，使学生觉得自然亲切、趣味盎然的，才是一个高水平的良师。不仅对那些无关大局、学了将来永远用不上、而且很快就会忘个精光的东西要尽量精简，而且对那些掌握了基本内容与方法之后、将来要用的时候很容易学会、甚至可以自己创造出来的东西，也要尽量精简。不突出

重点,事无巨细,面面俱到,搞烦琐哲学,看似认真负责,其实不仅加重了学生的负担,影响了学生的深入理解,而且束缚了学生的思路,这似乎是现有不少教材的一个通病。“少而精”的原则讲了好多年,看来要真正贯彻,还得花大力气。返朴归真,是一种很高的境界,也是编写教材的一个重要的原则。微积分作为最重要的一门基础课程,更应该在这方面树立一个榜样。

其次,任何一门学科的产生与发展,都离不开外部世界的推动,数学也是如此。牛顿、莱布尼茨当年发明微积分,就是和解决力学与几何学中的问题紧密联系着的。直到今天,微积分这个威力无比的武器仍在各方面不断发挥着重要的作用。这不仅为微积分增添了光采,而且实际上也为编写微积分教材提供了丰富的原材料。可惜的是,以往的很多微积分教材往往过分地追求“数学上的完美”,板着面孔讲理论,割裂了微积分与外部世界的生动活泼的联系,也显示不出微积分的巨大生命力和应用价值。学生学了一大堆定义、定理和公式,可能还是没搞清楚为什么要学习微积分,不知道学了微积分究竟有什么用。现在大家强调要加强对学生数学建模的训练,不少学校开设了种种有关数学模型的课程,固然是一件很好的举措,但如果能在基础课的教学中充分体现数学建模的思想,在讲述有关内容时与相应的数学模型有机结合,在看来枯燥的数学内容与丰富多彩的外部世界之间架设起桥梁,而不是额外添加课程,岂不是可以收到事半功倍的效果?! 作为一门基础课,微积分是最有条件也最应该体现这一原则的。这样做,不应该视为对其他课程的支持和援助,而是微积分课程自身合理建设的需要。否则,不关注模型,不重视应用,割断了来龙去脉,抽去了数学思想发展的线索,微积分就成了无源之水,无本之木,也就失去了生命力。重视并兼顾模型和应用,应是微积分这门课程的应有之义,也是体现返朴归真原则的一个重要的内涵。

第三,任何一门课程的内容,都不应该固步自封,一成不变,而应该顺应时代的发展和科技的进步,及时地弃旧图新,在概念及方法的引进上,在教材内容的取舍上,体现现代化的精神。从这个意义上说,在微积分课程中汲取一些现代数学思想和概念,对内容进行增删和调整,都是完全可能且必要的,并要下大力气去做。但是,每门课程都应有自己明确的内涵和范围,决不能“抢跑道”,通过把后继课程内容下放的办法来提高本门课程的档次和水平,从而打乱整个课程有机体系的阵脚。微积分这门大学低年级的基础课程,讲的是具有良好性质的函数(“好”的函数)的微积分。这是朴素的微积分,是学习中的的一个阶段性标志。将研究相应于“坏”的函数的微积分的一些后继课程的内容提前到微积分中来讲授,看来是不相宜的。应该提倡教一样,像一样;学一样,精一样,一步一个脚印地打好必要的基础。至于计算机的出现和飞速发展,不仅使数学的应用在广度和深度两方面都达到前所未有的程度,而且深刻

地影响了数学的发展进程和思维模式。微积分的课程内容应该反映这一重要的趋势。如果画地为牢，囿于微积分的传统框架不敢越雷池一步，在实际计算或应用时就会感到力不从心，甚至束手无策；而借助于数值计算及相应的软件，却往往可以使问题迎刃而解。此外，微积分本身又正是有关计算方法的理论基础，在微积分课程中介绍有关数值计算的基本思想和方法，是顺理成章的。这一有机的结合，可以使学人如虎添翼，也将会对数学课程体系的改革提供有益的启示。

第四，学习的目的在于应用。如前所述，微积分的基本原理和公式并不多，但如能得心应手地加以运用，却可以发挥出神奇的威力。要做到这一点，关键在于要使学生接受严格而充分的训练，单靠课堂上的讲授是绝对不够的。现在往往老师讲得多，同学练得少。其实，熟能生巧，多讲不如多练。只有通过严格而充分地训练，才能使学生达到学好数学的两个基本要求——理解与熟练。苏步青老师说他自己曾做过一万道微积分题，他在数学上的深厚功底和卓越成就，由此也可见端倪。事实上，做一千道题有一千道题的体会，做一万道题有一万道题的体会。如果每种题型只蜻蜓点水地做上那么一二道题，加起来总共不过二三百道题，又怎么谈得上牢固掌握、并在需要时能做到“运用之妙，存乎一心”呢?！只有在编写教材时在量和质两方面认真兼顾到习题(包括借助于计算机求解的习题)的配置，使课堂教学与课后训练有机配合、相得益彰，提高微积分课程的教学质量才会有一个可靠的保障。

我高兴地看到，正是在以上四个方面，这本教材作了有益的尝试及认真的实践。其中，有将微分与不定积分视为一对矛盾来展开后继内容的精采段落，有将微积分与数值数学综合处理、有别于传统教材的章节，有从模型出发引入概念、深化主题和体现应用的众多实例，同时，也可看到对传统教材内容删繁就简、精雕细凿的种种努力。尽管有些地方还略嫌粗糙，一些内容还有加工和改进的余地，但总的来说，这是一本颇具特色的教材。它的出版，实在是一件令人高兴的事，特为之序。

李大潜

1999年6月27日

于上海

前　　言

数学分析是数学系最重要的一门基础课，是几乎所有后继课程的基础，在培养具有良好素养的数学及其应用人才方面起着特别重要的作用。因此，数学分析教材改革成为理科大学数学系教改的一个重要环节，受到数学界的普遍关注。但究竟如何具体着手，则见仁见智，众说纷纭，目前尚难有比较一致的意见。

从 60 年代初开始，我校数学类系科一直沿用由陈传璋教授等编著的《数学分析》及以此为基础的几种修订版本。这套书曾获得“国家教委优秀教材一等奖”，并在兄弟院校中有较广的使用面。近年来，随着改革的深入，人们对教育不断提出新的要求，教材也应当推陈出新，跟上时代发展的步伐。1997 年，复旦大学将数学分析课程立为“面向 21 世纪教学内容与课程体系改革”项目，并要求重新编写适应新世纪的教材。在老一代数学家和数学系领导的关心和支持下，我们依靠数学系的整体力量，集思广益，进行了总体构思，并逐渐形成以下的编写指导思想：

1. 对“数学分析”基本理论体系与阐述方式进行再思考，改革旧的体系，吸收先进的处理方法，反映当代数学的发展趋势。

诚然，从近代微积分思想的产生、发展到形成比较系统、成熟的“数学分析”课程用了大约 300 年，经过几代杰出数学家持续不懈的努力，精雕细凿，千锤百炼，已为其建立了严格的理论基础和逻辑体系。但是，当代科学技术（包括数学本身）发展也不断为数学的基础部分注入新的活力。所以数学分析的讲授方式也应推陈出新，同时，要注意采用现代数学的思想观点与方法，反映数学的发展趋势。

例如，在传统数学分析课程中，以导数作为“微分学”主线的做法不利于学生今后理解微分在数学分析乃至整个数学学科中的重要作用。我们重点突出了微分的地位，在导数和微分两者关系上，采取了先定义微分再引出导数的顺序。这不仅符合数学的发展历史（从而符合人类的认识规律），也使学生先入为主，对微分的重要性有较深的印象。而在导出计算法则时，则求微分和求导数并重。以微分为工具的推导过程可使得有些概念（如高阶无穷小量、中间变量的高阶微分形式等）更易于理解和应用。

特别是在微分与积分之间关系的阐述中，我们定义求不定积分是求微分

(而不是求导数!)的逆运算,即: $F(x)(+C) \underset{\int}{\overset{\mathrm{d}}{\rightleftarrows}} F'(x)\mathrm{d}x$ 。这个观念上的改变为后续内容的展开带来了极大的方便。过去将求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 定义为求导数的逆运算,其中的 $\mathrm{d}x$ 就很难解释得贴切;而将其视为求微分的逆运算,许多麻烦就会迎刃而解。这时,$\mathrm{d}x$ 是自变量的微分,因此,关于微分的所有计算法则都可以畅通无阻,从而使不定积分和定积分(包括重积分、曲线曲面积分等)中的许多概念、公式的导出和理解变得简便而自然。此外,它还使得引入微分形式的外积和外微分运算,进而导出 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式的统一形式成为一件顺理成章的事,为学生日后学习流形上的微积分打下基础。

由于当代数学科学(实际上整个科学技术领域)相互交叉融合的大趋势,从其它课程选取合适材料来充实和加强本课程,对于培养新型的通用数学人才是绝对必要的,但引入新思想和新观点并不意味着在理论上故意拔高。我们严格掌握了以下原则:*所选视角必须有助于理解数学分析本身的理论和应用问题;有利于展开数学分析本身的内容;仅限于用数学分析的基本方法和技巧来处理。*

2. 在回溯数学发展历史、强调数学与相邻学科联系的同时,加强建立数学模型的思想和训练,增加实际应用的内容,提高学生的数学素养和创新能力,使学生适应新世纪对数学人才的要求。

微积分的形成和发展直接得益于物理学、天文学、几何学等研究领域的进展和突破。在数学分析教学中,应适度回溯数学与其它学科相辅相成的发展历史和数学史上一些关键人物作出重大发现的思维轨迹,提高学生学习数学的兴趣,引导学生逐步理解数学的本质及数学研究的一般途径和规律。教材中适量介绍了微积分发展历史中与其它相关学科之间联系的一些重要背景材料,如从 Kepler 的行星运动三大定律到 Newton 的万有引力、从 Kepler 发现行星运动中切向加速度为零的现象到 Fermat 对极值的研究再到微分中值定理的形成、宇宙速度和火箭运动方程的微分导出等等。

同时,微积分是一门极具应用活力的科学。为了造就大批具有良好基础、能用数学思想、方法和工具解决各个领域中实际问题的数学工作者和其他专门人才,数学分析教学应在传授基础理论和基本技能的同时,加强学生在分析实际问题、归结实际问题为数学问题、用微积分这一有力工具去解决实际问题等方面的能力。

我们在教材中努力加强了从微积分途径建立数学模型的思想,除了单列一节“微积分实际应用举例”外,建立和求解数学模型的例子散见于全书。通

过对物理学、生物学、社会学、经济学与自然现象中许多数量变化关系的分析，建立简单的行星运动模型、引力场模型、人口模型、公共资源模型、经济问题模型等等，再配以较多的习题，力图使学生拓宽知识面，初步具有数学来自实践、用于实践的认识和实际运作的本领。

3.数学分析教学与高速发展的计算机技术相结合。

近一二十年来，计算机的软硬件技术突飞猛进，极大地改变了人们的生活方式、思维方式和科学研究的方式。数学分析教学应当顺应潮流，反映这一发展趋势。在教材的编写中，我们对一些随着计算机和软件技术的进步而失去了往日重要性的内容(如函数作图、某些复杂的积分技巧等)作了适度删削；而对日趋重要的内容则加以强化(如近似求根、数值积分等)或增加(如插值公式、外推方法、快速 Fourier 变换等)。同时，为了真正提高学生用数学和计算机解决实际问题的综合能力，我们在与数值计算有关的章节后面设计了“计算实习题”，题目的难度适中，但不用计算机却难以解答，要求学生在教师指导下独立完成。这对提高学生的数学素养、应变能力和社会竞争力(从而提高数学本身在社会上的地位)应当大有益处。

我们还在尝试利用电子计算机和较成熟的数学软件，对数学分析的某些内容采用多媒体技术辅助教学。

4.使内容安排趋于更合理，更简洁，更适合学生的认识规律，在保证基本教学要求的前提下，尽可能减轻学生的负担。

改革的结果应使得课程和教材更加紧凑、更加简洁而不是相反。我们对原教材中保留的内容进行了认真细致的再处理，所有的陈述和证明都力求改写得更加简洁和完美，有些证明是我们自己给出的。对于原处理方法已显陈旧与落后的部分则推倒重写，新的处理方法必须观点新、立足点高，能承上启下，有助于学生的深入理解。

为符合人的认识规律和教材编写的特殊需要，我们对某些重要或涉及范围较广的内容，采用了在后续部分(包括一些结论的证明、例题)有意识地多次重复和应用，逐步深入的处理方法，以期收到较好的教学效果。如用微分导出不同人口模型的思想和方法前后出现于三处；用途极广的 Legendre 多项式也先后出现了三次，等等。

又如，我们对 Cauchy 中值定理给出了不同于 Lagrange 中值定理证明思路的新证明，通过这一证明让学生将有关反函数的结论(反函数的定义及存在定理、连续定理、求导定理)系统地复习了一遍。

富于启迪而精到的例题与习题是一本好教材不可缺少的有机部分。我们精选了全部例题，力求使例题不仅配合所讲授的理论，更使学生从中学到分析和解决问题的方法。教材中更新了大量习题，特别是增加了许多与应用有关

的习题，力求让学生获得足够的训练。

本书的总体框架与编写大纲由编者反复讨论后确定。第 1、2、3、9、10 章由陈纪修执笔，第 4、5、6、7、8、16 章由於崇华执笔，第 11、12、13、14、15 章由金路执笔。初稿完成后，本书以讲义形式在复旦大学数学系本科生和理科基地班试用了两轮，同时在较大范围内听取了意见，再经集体多次推敲修改最后定稿。付梓前，由於崇华对教材的整体格式和行文作了统一处理，并对全书的文字进行了润色。

本教材可供全日制高等院校数学分析课程三学期使用。为了适应不同需要，我们将一些难度较大的或非基本的内容用小字排印，供教师选用。

中国科学院院士李大潜教授、复旦大学数学系学术委员会主任李训经教授自始至终关心和鼓励本书的编写工作并给予了指导性的意见；复旦大学数学系主任童裕孙教授多次参与了编者从构筑总体框架直到修改定稿过程中的讨论，提出不少建设性的意见和建议，并从行政方面为编写工作提供了切实的保障；姚允龙教授在复旦大学理科基地班试用了本教材，并提出大量有价值的意见；曹家鼎教授提供了 Korovkin 关于连续函数的多项式逼近的 Weierstrass 定理的漂亮证明；苏仰锋副教授与王彦博老师演算了本书中大部分的习题。此外，在本书的形成、定稿和出版过程中，复旦大学教务处孙莱祥研究员和方家驹研究员一直给我们以热情鼓励和帮助；复旦大学与兄弟院校的许多教师曾以各种形式向我们提出过许多颇有见地的修改意见；高等教育出版社也一如既往地支持我们的教材改革计划的最终落实。编者借本书出版之机，在此一并向他们表示衷心的谢意。

囿于学识，本书虽经实际授课试用和多次修改，错误和缺陷仍在所难免，恳请广大读者提出宝贵的批评和建议，以便今后再版时改进。

编　者

1999 年 5 月于复旦园

责任编辑　郭思旭
封面设计　张　楠
责任绘图　陈淑芳
版式设计　於崇华
责任校对　高尚华
责任印制　陈伟光

目　　录