NUANTONGKONGTIAO
JISUANJIYINGYONG

暖通空调计算机应用

陈在康　杨昌智　编著

湖南大学出版社

N T K T J S J Y Y

暖通空调计算机应用

陈在康　杨昌智　编著

湖南大学出版社
1999年·长沙

内 容 简 介

本书是根据高等学校建筑环境与设备工程(原供热通风与空调工程)专业《暖通空调计算机应用》课程基本要求编写的,它使学生在学习计算机基本知识和算法语言的基础上,能进一步了解计算机在暖通空调专业的主要应用领域及开拓这些应用领域的基本方法。

全书共5章,内容包括:常用计算方法,建筑热过程的计算机模拟与仿真,计算机辅助暖通空调设计,室内通风空调气流的数值解,暖通空调系统的计算机监测与控制。本书着重介绍了计算机方法的一般概念和应用,避免了过多的数学推导与论证,适当提供了一些常用的实用程序。

本书可作为高等学校该专业相应课程的教材,也可供广大暖通空调专业技术人员参考。

暖 通 空 调 计 算 机 应 用

Nuantong Kongtiao Jisuanji Yingyong

陈在康　杨昌智　编著

□责任编辑　陈灿华
□装帧设计　晓　谊
□出版发行　湖南大学出版社
社址　长沙市岳麓山　邮码　410082
电话　0731—8821691　0731—8821315
□经　　销　湖南省新华书店
□印　　装　长沙交通学院印刷厂

□开本　787×1092　16开　□印张　9.75　□字数 225千
□版次　1999年2月第1版　□1999年2月第1次印刷
□印数　1－3 000册
□书号　ISBN 7－81053－162－X/TP·8
□定价　14.00元

(湖南大学版图书凡有印装差错,请向承印厂调换)

前　言

当前，我们正面临着一场世界性新技术革命的挑战。电子计算机的应用成为这场革命的强大动力和重要标志。传统的工程技术方法正经历着深刻的变革，暖通空调技术也不例外。建筑热湿过程及空调系统工作过程的模拟与仿真，使空调系统设计过程中的最优化决策及运行中的最佳化调节和管理成为可能。空调气流组织的合理运用，可以在保证工作区环境要求的情况下，减少空调负荷，扩大进、排气温差，如高大空间的分层空调、下送上回垂直置换式气流分布以及利用气流隔断的各种局部空调等都有可能达到节能的目的。通风空调气流的数值解为实现各种气流组织方案的比较提供了必要的手段。CAD、人工智能、远程控制的运用正在改变着传统空调技术的面貌。由于计算机的应用，设计方法正在从静态的设计工况的分析转变到动态过程的研究，使过去做不到的事情成为现实可行。就拿冰蓄冷空调设计来说，不研究整个蓄冷、用冷周期的负荷变化和相应的结冰、融冰过程显然是不行的。计算机在空调技术中的应用，对空调技术的发展将产生不可估量的影响。特别是计算机和通讯技术的结合，开创了一个新的信息化时代。五花八门的工程技术问题的求解，几乎都可以描述为各种信息的处理过程。数字计算机正是以数字为各种信息的载体，可对它们实行存储、处理和传输等操作。对于各种空调技术问题的求解，只要能设法把它们描述为以数字为载体的信息处理与传输过程，就有可能借助于计算机得到解决。

电子计算机在各个专业技术领域中的应用程度，不仅有赖于计算机本身的发展速度，而且取决于各种专业人员对计算机技术掌握的深度与广度。根据中国建筑学会暖通空调委员会 1981 年在江西九江召开的全体会议的决定，作者于 1982 年和 1983 年分别在湖南大学和同济大学负责举办了两期全国暖通计算机方法讲习班，随后我国高校的供热通风与空调专业都纷纷开设了“暖通计算机方法”或“暖通空调计算机应用”课程。不少院校采用了中国建筑工业出版社出版的《暖通计算机方法》作为教材。这本书是作者和参加讲习班讲课的武建勋、施鉴若两位教授一起以讲习班的讲稿为基础共同编写的，沿用至今已有十几年了。在这期间，电子计算机在暖通空调领域的应用又有了很大的发展。为了满足当前教学的需要，我们决定在总结十多年来讲授这门课程所积累的经验的基础上，重新予以编写，定名为《暖通空调计算机应用》。

计算机在暖调空调技术领域中的应用，涉及的内容是极其广泛的。作为一本教材，

《暖通空调计算机应用》仍然只能是一本入门的书，它不能把暖通领域里所有的应用不分轻重地全面罗列，也不能包揽有关专著和手册中所介绍的每一种具体应用。通过这门课程的学习，读者能了解和掌握计算机在暖调空调技术领域里的应用方法和研究途径。全书包括绪论及第一章至第五章共6个部分，其中绪论及第二章至第五章由陈在康编写，第一章由杨昌智编写。书中所附的BASIC语言程序可供读者选用，以后将进一步提供相应的FORTRAN语言及C语言源程序，以供不同的读者使用。由于时间紧迫和条件限制，书中不尽如人意之处在所难免，希望读者予以指正，以便再版时能不断改进和提高。

编著者

1998年于湖南大学

目　次

绪　　论

0.1 暖通空调技术发展的历史

暖通空调技术和其他科学技术一样,是人类社会发展到一定阶段的产物。人类自从学会用火以后,便脱离了茹毛饮血的时代;学会了建造房屋后,便开始有了能遮风避雨不致于风餐露宿的生活空间。这就是室内环境的起源。随着生产力的发展和人们生活水平的不断提高,对室内环境提出了越来越高的要求。为了避免酷暑严寒和改善室内环境,人们学会了生火取暖和开窗换气,开创了供暖通风的历史。经过了漫长的岁月,直到20世纪,冶金和材料工业才有了很大的发展,传热和流体力学理论日臻成熟。流体机械的广泛应用,使暖通空调作为一项专门技术迅速发展起来。为了在室内创造更加舒适的环境,满足现代生产技术和科学实验对人工环境提出的要求,近年来,降低能耗和保护环境的要求又推动着暖通空调技术的发展和进步。由此可见,暖通空调技术的发展不仅由社会生产和生活的要求所推动,而且和社会的科学技术的发展水平息息相关,同时受自然资源的条件和环境保护要求的制约。

当前,我们正面临着一场世界性的新技术革命的挑战。电子计算机的应用成为这场革命的强大动力和重要标志。传统的工程技术方法正经历着深刻的变革。然而,电子计算机在各种专业技术领域中的应用程度,不仅有赖于计算机科学本身的发展速度,而且取决于各种专业人员对计算机技术掌握的深度与广度。计算机技术的发展不只是为暖通空调工程的设计、施工和运行调节提供了一种新的有力工具,更重要的是它正在不断改造着传统的暖通空调技术。

0.2 电子计算机和计算机方法

0.2.1 电子计算机的组成和功能

电子计算机可分为三大类:

(1) 数字电子计算机,它以数字的形式存储和处理信息;

(2) 模拟电子计算机,它以连续变化的模拟量表示运转量;

(3) 混合式电子计算机,它兼有上述两类计算机的特点。

本书所讲到的电子计算机,除特别指明的以外,其余都是指数字电子计算机。

电子计算机的结构框图如图0.1所示,其核心部分是中央处理机(Central Processing Unit),简称CPU.它由控制器和运算器组成,连同存储器,通常称之为计算机的主机。存

储器是存储各种数字的，在电子计算机内，采用的是二进制数，而存储在计算机内的这些二进制数代表着各种信息，如数值、文字、图形、操作指令等；运算器是对数字进行算术运

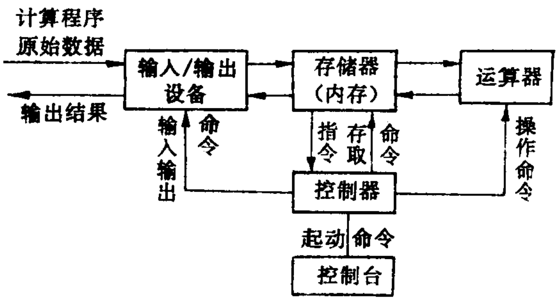

图 0.1 电子计算机结构框图

算和逻辑运算的部件；控制器是协调计算机各组成部件工作的。由于被用来运算的数字是一种信息的代码，计算机的运算过程实质上是一种信息加工和处理的过程。主机以外的设备通常统称为外围设备，其中主要有外部存储器、输入设备和输出设备。外部存储器是相对于主机内的存储器而言的，所以主机内的存储器又称内存储器，简称内存，它具有存取速度快的特点，但当电源被切断以后，所存储的信息一般不能继续保留。外存储器存取速度较慢，但其存储的信息量大，如磁带机、磁盘机、光盘机、磁鼓等。输入设备是用来将原始数据和计算程序等信息输入计算机的装置，如键盘、鼠标、光笔等；输出设备是将计算机内的信息，如运算的结果及中间结果输送出来的装置，如显示器、打印机、绘图仪等。计算机还可以通过输入/输出接口和其他计算机或信息传输系统进行数据的交换。

由此可知，电子计算机具有对信息进行传输、记忆及加工处理等功能。当然，这种加工处理是以对数字进行算术运算和逻辑运算的形式来完成的，而且它能按给定的程序自动、高速地进行运算和输入数据、输出结果。由于电子计算机具有这些突出的功能和特点，因而其应用范围迅速扩展到了国民经济和日常生活的各个方面。

0.2.2 信息和信息代码

计算机工作时都是在执行一定的计算程序。所有被处理的数据、计算程序以及计算结果等都表现为一种信息，不同的信息是按不同规则进行编码来表示的，这种编码称为信息代码。在计算机的存储器中，利用存储介质的两种不同状态分别表示二进制数码的“0”和“1”，一位二进制的数可以表达两种不同的事物，n 位二进制数序列可以构成 $2n$ 种不同的排列，也就是说 n 位二进制数可以表达 $2n$ 种不同的事物。一位二进制数为存储信息容量的最小单位，称为一个比特(bit)，英文字符的信息交换标准代码(ASCII 码)是用 8 位二进制数来表示的，通常将 8 位二进制数称为一个字节(byte)，几个字节组合在一起，称为字(word)。一个字包含的比特数称为字长。每个字或字节作为一个存储单元，每个单元都有一个相应的编号，称为地址。

数在计算机存储器内的表示通常有两种不同的方式：定点数和浮点数。所谓定点数就是指在存储单元内小数点的位置是固定的。如果将小数点定在最后，则被存储的为一整数。通常利用第一位二进制数表示正负号，其值为“0”时表示正，为“1” 时表示负。如

果存储单元为 4 个字节，即 32 个比特或称 32 位，除去一个符号位，所能表达的最大数为 $+(2^{31}-1)=+2147483647$，最小数为 -2147483647；如果存储单元为 2 个字节，则所能表达的最大数为 $+(2^{15}-1)=+32767$，最小数为 -32767。存储的数如果超出这个范围，将产生“溢出”，造成运算的结果错误。如果将存储的数表示为 $A\times10^{B}$的形式，其中 A 为一纯小数，且最高位不为零，B 为整数，那么可以将存储单元分为两部分，如图 0.2 所示。其中第一部分存储一个定点数 A，小数点定在最前面，即存储的为一纯小数，称为数码，其符号称为数符；第二部分存储定点数 B，小数点定在最后面，即存储的为一整数，称为阶码，其符号称为阶符。被存储的数 $A\times10^{B}$ 称为浮点数。对于 4 个字节的存储单元，如果用24位存储数码，8位存储阶码，则可存储的最大数为 $+0.8388607\times10^{+127}$，最小数为 $-0.8388607\times10^{+127}$。由此可见，浮点数的存储方式使可存储数的范围大大地扩大。应当指出，对于位数相同的存储单元，所能表达的不同事物的总数是相同的。浮点表示数的方式之所以能扩大表达数的范围，是以减少数的有效数字位数为代价的。

图 0.2　数的存储方式

文字信息在计算机内是以组成它的字符的代码按顺序排列存储的，每个字符占一个字节的存储空间。中文信息以一个汉字为一个字符，每个汉字代码存储空间需要两个字节。这种顺序代码的集合称为字符串。应当指出的是，它并没有包含每个字符图形的信息，每个字符图形的信息都存储在相应的数据库里；字符串的字符代码，通过软件“字符发生器”，可以从字库里检索到相应的字符图形信息。

计算机操作指令在计算机内也是以二进制代码来表示的。一条操作指令通常包括一个操作码和 1～3 个地址码，如图 0.3 所示。其中，θ 表示不同的操作，如加、减、乘、除、逻辑加、逻辑乘、存入寄存器等；D 表示操作对象所在地址，如三地址指令表示从 D_1 单元取出一个数和从 D_2 单元取出一个数进行 θ 操作，并将其结果存入 D_3 单元。二地址指令和三地址指令的不同之处在于前者将操作产生的结果存入 D_2 而不是 D_3。单地址指令的一个操作对象应先存入寄存器 L，和另一个操作对象进行操作，并将其结果存入寄存器 L。

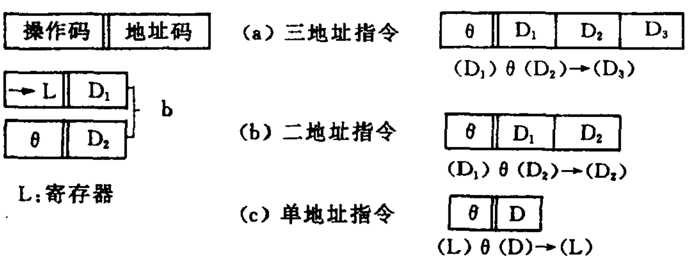

图 0.3　操作指令存储方式

图形(graph)与图象(image)的信息在计算机内也是用二进制数编码来描述的。黑白图象的画面按行和列均布网点,每个点称为一个象素,用一位二进制数的值“0”和“1”分别表示该象素点的“白”和“黑”,将所有这些二进制数按行和列的顺序排成的序列称为图象的点阵描述或位图。如果每个象素除了“白”和“黑”以外,还有不同程度的“灰”,则对一个象素点的描述,需要几位二进制数;对于彩色图象,对一个象素点的描述,需要更多位的二进制数。网点越密,则图象的描述越逼真,但所需的存储器存储空间也越大。图形通常由一些线条构成,为了减少描述图形信息所需要的存储空间,可以将构成图形的线条分解为一系列线段、圆、圆弧等图素,每一图素可以用一个图素名代码和若干个参数来描述,例如,线段的参数可以表示为起点和终点的坐标,圆的参数可以表示为圆心的坐标和半径或圆周上 3 个点坐标等。有了这些信息,通过一定的运算也可以生成相应的点阵格式的位图,当然,这种运算是通过专门软件来完成的。图形中线条的信息还可以用一系列矢量来表示。所谓矢量是指线条从一个网点到相邻网点的走向,一个网点总共有 8 个相邻的网点,线条通过一个网点的走向可以表示为 3 位二进制数,这样表示的线条实际上是一条折线,由于网点很密,所以看起来是一条光滑的线。用这种方法描述的图形通常称为矢量图。

综上所述,各种不同类型的信息是以不同的格式存储在计算机内的。如果以某种格式存入的信息,按别的格式去解释,就会面目全非而无法理解了。然而,其他各种类型的信息都可以适当的格式进行编码,以数字的形式来表示,这也正是数字电子计算机有如此广泛应用的原因之一。当然,计算机也有它本身的局限性,例如,它只能以有限存储空间来存放信息,因此,它不可能绝对精确地存储无理数,超出有效数字极限的数字位都将被舍去;它也不可能进行无限次运算,对无穷级数的运算只能截取其有限项;它只能进行算术运算与逻辑运算,所有数学求解都必须变换为只包含算术运算与逻辑运算的数学模型,如对三角函数求解实际上是将其变换为无穷级数并截取其有限项运算来实现。

0.2.3 用电子计算机解决工程技术问题的一般方法

用计算机解决工程技术问题的一般方法模式如图 0.4 所示.

工程问题 → 建立数学模型 → 数值计算方法 → 程序设计 → 上机计算

图 0.4 用计算机解决某个工程技术问题的模式

可见,要应用计算机解决某个实际工程技术问题,首先要对问题的本质进行分析,并用数学语言对问题进行描述,即建立该问题的数学模型,把一个实际工程技术问题变换成一个数学问题(例如代数方程组求解、微分方程组求解、定积分计算、最优化问题求解等);然后,还要选择适当的计算方法,使它们变成只包括算术运算和逻辑运算等计算机能够进行的一系列运算过程,再根据计算步骤进行程序设计和上机计算。当然,并不是所有计算机的应用都要由自己来进行程序设计。近年来,针对各种典型的工程技术问题已研制了大量的应用程序和程序系统,可供直接调用,这种通用的程序或程序系统称为应用软件。我们也可以从市场上选购适当的商品化软件。即使如此,作为一个工程技术人员,必须具备开发自己专用软件的能力,才能在应用计算机时真正做到得心应手。

0.3 电子计算机在暖通空调工程中的应用

0.3.1 暖通空调工程中传统技术方法的特点

暖通空调工程是要在室内创造一个舒适的以及适应生产和科学实验所需的环境，首先是室内空气的热湿环境。室内空气的热湿环境，取决于建筑物的热湿过程，包括通过建筑围护结构的传热传湿过程、室内物体产热产湿和吸热吸湿过程以及由于换气引起的热湿交换过程。暖通空调工程就是设计安装一套人工系统向室内送入或排出热和湿，参与建筑物的热湿过程，达到室内预期的稳定热湿环境的目的。主要的方法是向室内送入一定量经过处理的空气，或直接在室内设置产热产湿或吸热吸湿装置。在设计过程中，一般选定几种从不同角度考虑的最不利工况作为设计工况，如夏季设计工况、冬季设计工况、过渡季节设计工况等。对于每一种设计工况，设计参数都选为定值，用稳态计算的方法确定系统的冷、热负荷，以此作为最大负荷的依据来选择相关设备。但是，暖通空调系统是在不断变化的环境条件下运行的，同时，暖通空调系统的运行需要消耗大量的能源，在设计过程中，在满足功能要求的条件下，不仅要考虑初投资的多少，而且要考虑运行费用的多少。也就是说，在设计过程中，不仅要考虑系统运行中的最不利工况，而且要对系统运行过程进行预测，了解其运行效果和所需能耗，这样才能在设计和运行过程中作出最佳的选择。电子计算机的应用为这些问题的解决开辟了新的途径。

0.3.2 计算机方法在暖通空调工程中的应用

电子计算机在暖通空调的应用有一个明显的特点，就是把研究问题的着眼点从个别的工况分析转移到对过程的分析。电子计算机应用于暖通空调工程开始于20世纪60年代后期，是从空调负荷的动态计算开始的。特别是由于世界性的能源危机，使人们在空调设计中不能不考虑运行过程中的能耗问题，从而发展了全年能耗分析方法。近年来，其应用范围越来越广，发展也越来越快。例如建筑热、湿过程的模拟与仿真；通风空调气流的数值解；空调系统以及冷、热源设备的多工况最佳调节与集中管理；暖通空调的计算机辅助设计；计算机自动放样下料等。从这些发展还可以看出，计算机在暖通空调工程中的应用，一开始就突破了简单模拟传统方法中人工计算的界限，在改造传统技术中显示出强大的生命力。

0.4 算法与误差

应用计算机解决工程技术问题，其所得结果的精确程度究竟如何？我们必须对可能产生的误差进行分析和估计。有时，在某个环节产生一个很小的误差，经过多次运算以后，可能对计算结果产生很大的影响，所谓“差以毫厘，失之千里”，而有些误差对计算结果产生的影响较小，在容许的范围以内，可以忽略。因此，要正确估计计算结果，就要具体地分析误差。

0.4.1 误差的来源

影响计算机解题结果精度的误差，按其来源可以分为五类：模型误差、观测误差、方法

误差、舍人误差和初值误差。

0.4.1.1　*模型误差*

对于我们所要解决的实际问题，常常要进行去粗取精、去伪存真的过程，为了简化计算，常常还要忽略一些次要的影响因素，作出一些假设。也就是说，先要为需解决的实际问题构造一个模型，模型是相对于原型而言的。对于这种模型，使用数学语言进行描述，就是通常所说的建立数学模型。由模型和原型的不同所带来的误差称为模型误差或描述误差。某个因素是否可以被认为是次要因素，须根据它被忽略所造成的模型误差对计算结果的影响是否在容许范围之内来定。例如，我们在空调工程中研究气流流动规律时，在整个过程中空气的压强变化幅度很小，可把空气视为不可压缩流体，这样大大简化了计算而又不致带来不可容忍的误差。当然，在别的场合这样简化是否恰当又应另当别论。

数学模型是计算机进行数值计算的前提和依据，模型误差在上机计算之前就已经客观存在，同时，这种误差带来的影响常常只能在和原型的比较中才能加以检验，因此，在建立模型时所作的每一个假设都应当考虑由此带来的误差所造成的影响，决不可掉以轻心。

0.4.1.2　*观测误差*

在所建立的数学模型中，有一些参数或变量的值，是通过观测或实验得到的。由于种种原因，观测值与客观实际值之间有一定的差异，这种差异称为观测误差。

观测误差根据其特点的不同，又可以分成：

(1) 过失误差。它是由于观测中的错误造成的误差。例如，读错了数所造成的误差等。这种误差应当尽量避免。

(2) 系统误差。它是由于系统本身的缺陷造成的误差，其影响贯穿于整个观测过程，所以又称为常差。它又可分为：

· 仪器误查。例如仪器零点未校准等。

· 理论误差。例如由于温度、湿度、风速、磁场等外部确定性条件的影响造成的误差。

· 个人误差。例如由于个人生理缺陷或不良观测习惯造成的误差。

研究系统误差对观测结果的影响，是实验科学的任务。

(3) 偶然误差。它是由于随机因素造成的观测误差，通常服从于某些统计规律。

研究偶然误差对观测结果的影响，是误差理论的任务之一。

0.4.1.3　*方法误差与截断误差*

根据所建立的数学模型，如果不能用计算机以解析法得到精确解时，通常可用数值方法求得近似解，其结果与精确解之间的差异，称为方法误差。例如在对无穷级数求和的运算中，由于计算机只能进行有限次数的运算，以有限项运算作为近似，由此而带来的误差，又称截断误差。

例如，当 $x>0$，求 e^x 值时，e^x 可以展开成无穷级数：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{0.1}$$

若求其近似值

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \tag{0.2}$$

则在精确值 e^x 和近似值 $E(x)$ 之间存在截断误差：

$$E(x)-e^{x}=-\frac{x^{4}}{4!}e^{\xi} \tag{0.3}$$

式中，$0<\xi<x$。

又如，用积分法求圆周率 π 值时，

$$\pi=\int_{0}^{1}\frac{4}{x^{2}+1}dx=4\cdot\arctan x|_{0}^{1} \tag{0.4}$$

其中可用无穷级数表示 $\arctan x$ 之值：

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{0.5}$$

而实际上只能取上式之有限项数之和，因而带来截断误差。

0.4.1.4　*舍入误差*

应用计算机进行计算时，必须把已知数、中间值和计算结果的各种数，存放在存储器中，而每个数都只能存储在有限的存储空间内，对于无理数或数字很多的小数，在存储时，往往有一些尾数会丢失，对这些尾数尽管采取了四舍五入的办法，但还是避免不了误差，这种误差称为舍入误差。舍入误差看似很小，但有时经过多次运算，会使计算结果严重偏离真值。例如求解病态线性代数方程组时就常遇到这种情况。

舍入误差和截断误差的区别在于：截断误差取决于计算方法的选择，与计算机本身没有直接的关系；而舍入误差则和计算机存储器的存储位数有关。

0.4.1.5　*初值误差*

在进行迭代运算时，需常对某些参数给定初始值。若初始值给定得不当，有时也会影响计算的结果，由此引起的误差称为初值误差。

0.4.2　误差值及其计算

误差值的表示方法主要分为两类：绝对误差和相对误差。

0.4.2.1　*绝对误差和绝对误差限*

绝对误差——一个数的近似值 x^{*} 与其准确值得 x 之间的差值，即 $e^{*}=x^{*}-x$。

绝对误差简称为误差。

显然，绝对误差可为正值亦可为负值。在通常情况下，由于往往无法计算出准确值，因而也无法算出绝对误差的准确值。只能根据测量工具或计算情况估计出绝对误差的绝对值不超过某一正数 ϵ^{*}，即 e^{*} 值的上界，这一正数称为近似值 x^{*} 的绝对误差限，即 $|x^{*}-x|\leqslant\epsilon^{*}$。

0.4.2.2　*相对误差和相对误差限*

相对误差——绝对误差 e^{*} 和准确值 x 之比。

$$e_{\gamma}=\frac{e^{*}}{x}=\frac{x^{*}-x}{x} \tag{0.6}$$

由于在通常情况下，无法得到准确值 x，因此，相对误差可近似地写成

$$e_{\gamma}=\frac{e^{*}}{x^{*}}=\frac{x^{*}-x}{x^{*}} \tag{0.7}$$

相对误差限——相对误差绝对值的最大极限值 δ，$|e_{\gamma}|\leqslant\delta$。

例如，物理量 x、y 的准确值和近似值分别为：

$$x=0.8726\times 10^{-90},\ y=0.8726\times 10^{90}$$
$$x^*=0.8727\times 10^{-90},\ y^*=0.8727\times 10^{90}$$

则绝对误差为

$$e_x^*=0.8727\times 10^{-90}-0.8726\times 10^{-90}=0.0001\times 10^{-90}$$
$$e_y^*=0.8727\times 10^{90}-0.8726\times 10^{90}=0.0001\times 10^{90}$$

相对误差为

$$e_{rx}=\frac{0.0001\times 10^{-90}}{0.8726\times 10^{-90}}=0.0001146$$
$$e_{ry}=\frac{0.0001\times 10^{90}}{0.8726\times 10^{90}}=0.0001146$$

0.4.2.3 有效数字

有效数字是表征一个数 x 的近似值 x^* 的有效位数。若近似值 x^* 的绝对误差限是某一位的半个单位，且从该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位时，则称 x^* 有 n 位有效数字。即：

$$x=\pm 10^m\times(a_1+a_2\times 10^{-1}+a_3\times 10^{-2}+\cdots+a_n\times 10^{-(n-1)}) \tag{0.8}$$

式中：a_1 为 1～9 中的一个数；a_2、a_3、…、a_n 为 0～9 中的一个数。

$$|x-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{m-(n-1)}$$

例如，圆周率 $\pi^*=3.141592654$ 的有效数字为 10 位，准确值 $\pi=3.1415926535897\cdots$，绝对误差为

$$\pi^*-\pi=3.141592654-3.1415926535897\cdots=0.0000000004102\cdots$$

$$\pi^*=10^0\times(3+1\times 10^{-1}+4\times 10^{-2}+1\times 10^{-3}+5\times 10^{-4}+9\times 10^{-5}+2\times 10^{-6}+6\times 10^{-7}+5\times 10^{-8}+4\times 10^{-9})$$

$m=0,\ n-1=9,\ n=10$，即有效数字为 10 位。

$$|\pi-\pi^*|=0.4102\cdots\times 10^{-9}\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{0-(10-1)}$$

符合上述条件。

显然，有效数字的位数和小数点后的位数无关。有效数字的位数越多，则绝对误差限越小，相对误差限也越小。

0.4.2.4 数值计算的误差估计

进行函数计算时，需要进行一系列两数的和、差、积、商的运算，通常可用泰勒级数展开的方法估计误差。例如要计算函数值 $y=f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$，设 x_1^*、x_2^*、x_3^*、…、x_n^* 分别为 x_1、x_2、x_3、…、x_n 的近似值，则函数的近似值为 $y^*=f(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\cdots,x_n^*)$。函数值的绝对误差为：

$$\begin{aligned}e^*(y)&=y^*-y=f(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\cdots,x_n^*)-f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_k}\right)(x_k^*-x_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\cdot e^*(x_k)\end{aligned} \tag{0.9}$$

函数值 y^* 的相对误差为

$$e_r^*(y)=\frac{e^*(y)}{y^*}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\cdot\frac{x_k^* e_r^*(x_k)}{y^*} \tag{0.10}$$

0.4.3 和、差、积、商的误差估计

0.4.3.1 和、差的误差估计

设 x^*、y^* 为 x、y 的近似值，则其和与差的绝对误差为

$$(x^*-x)+(y^*-y)=(x^*+y^*)-(x+y) \tag{0.11}$$

$$(x^*-x)-(y^*-y)=(x^*-y^*)-(x-y) \tag{0.12}$$

绝对误差限为

$$|x^*-x|+|y^*-y|\geqslant|(x^*+y^*)-(x+y)| \tag{0.13}$$

$$|x^*-x|-|y^*-y|\geqslant|(x^*-y^*)-(x-y)| \tag{0.14}$$

即两数和或差的绝对误差限，不超过各绝对误差限之和。这一结论还可以推广应用于任意多个数求和的运算过程。

至于相对误差，两数求和与求差时的表达方法有所不同。设 $x^*>0$，$y^*>0$，则其和之相对误差估计为：

$$\frac{(x^*+y^*)-(x+y)}{x^*+y^*}=\frac{x^*-x}{x^*}\times\frac{x^*}{x^*+y^*}+\frac{y^*-y}{y^*}\times\frac{y^*}{x^*+y^*} \tag{0.15}$$

若 x^* 为相加两项中具有较大相对误差的一项，则

$$\left|\frac{(x^*+y^*)-(x+y)}{x^*+y^*}\right|\leqslant\left|\frac{x^*-x}{x^*}\right|\times\left(\frac{x^*}{x^*+y^*}+\frac{y^*}{x^*+y^*}\right)=\left|\frac{x^*-x}{x^*}\right| \tag{0.16}$$

即两数和的相对误差限，不超过相加各项中最不准确的一项的相对误差。这一结论同样适用于任意多个数之和的相对误差估计。

两数差的相对误差为：

$$\frac{(x^*-y^*)-(x-y)}{x^*-y^*}=\frac{x^*-x}{x^*}\times\frac{x^*}{x^*-y^*}+\frac{y^*-y}{y^*}\times\frac{y^*}{x^*-y^*} \tag{0.17}$$

当 $x^*\gg y^*$ 时，$\dfrac{y^*}{x^*-y^*}$ 值很小，上式右边第二项可忽略不计。此时有

$$\left|\frac{(x^*-y^*)-(x-y)}{x^*-y^*}\right|=\left|\frac{x^*-x}{x^*}\right| \tag{0.18}$$

即当减数与被减数相差很大时，其中大数的相对误差起决定性作用；而当两者相差不大时，(x^*-y^*) 的相对误差可能很大，有效数字的位数将大大减少。例如，$8.3746-8.3739=0.0007$，减数和被减数的相对误差 $e_r\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-5}$，而它们之差的相对误差也可能不小于 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$。这样，对这个差数来说，可能连一位有效数字都没有。因此，在计算时应尽量避免两个相差很小的数相减，在建立数学模型时，也应充分考虑这一点。

0.4.3.2 积、商的误差估计

若 x、y 的近似值 $x^*>0$，$y^*>0$，绝对误差为 $dx^*=x^*-x$，$dy^*=y^*-y$；相对误

差为：$\frac{x^*-x}{x^*}=\frac{dx^*}{x^*}=d(\ln x^*)$，$\frac{y^*-y}{y^*}=\frac{dy^*}{y^*}=d(\ln y^*)$，则积与商的绝对误差分别为：

$$d(x^*y^*)=x^*dy^*+y^*dx^* \tag{0.19}$$

和

$$d\left(\frac{x^*}{y^*}\right)=\frac{y^*dx^*-x^*dy^*}{y^{*2}} \tag{0.20}$$

积与商的相对误差分别为：

$$d(\ln(x^*y^*))=d(\ln x^*+\ln y^*)=\frac{dx^*}{x^*}+\frac{dy^*}{y^*} \tag{0.21}$$

和

$$d\left(\ln\left(\frac{x^*}{y^*}\right)\right)=d(\ln x^*-\ln y^*)=\frac{dx^*}{x^*}-\frac{dy^*}{y^*} \tag{0.22}$$

由此可见，积或商的相对误差限，不超过参与运算的两数的相对误差限之和。当近似值 y^* 很小时，商的绝对误差限就会很大。在计算时，应尽量避免出现这种情况。

以上所述有关和、差、积、商的误差估计计算，还是比较麻烦的。有时为了避免出现不测的情况，须采用多取几位有效数字的办法。当然，这种方法并不能代替对误差进行必要的估计。

0.4.4 数值计算中减少误差的若干方法

在数值计算中，虽然各种误差难以完全避免，但应该尽可能减少，使最终计算结果的误差限制在可以容许的精度范围之内。通常减少计算误差的一些主要方法有：

(1) 使用数值稳定的数学模型。

所谓数值稳定的数学模型，系指在运算过程中，舍入误差不会增加的计算公式。显然，在这种情况下，不必去具体地估计舍入误差。对于数值不稳定的数学模型，经过多次运算，就有可能出现错误的计算结果。

(2) 简化计算步骤，减少运算次数。

对于同一个问题，如果能够做到尽可能减少运算次数，则不仅可以节约计算机运行时间，还能减少舍入误差。例如，要计算 $y=x^{127}$ 的值，最简单的方法是把 x 连乘 127 次。为了减少运算次数，可以将计算式改写成

$$\begin{aligned} y&=x\times x^2\times x^4\times x^8\times x^{16}\times x^{32}\times x^{64}\\ &=x\times(x)^2\times(x^2)^2\times(x^4)^2\times(x^8)^2\times(x^{16})^2\times(x^{32})^2 \end{aligned} \tag{0.23}$$

又如，计算以下多项式的值

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{0.24}$$

共有 $n+1$ 项，需作 n 次加法运算和 $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=n(n+1)/2$ 次乘法运算。如果把上式改写成

$$P_n(x)=(((a_nx+a_{n-1})x+x_{n-2})x+\cdots+a_1)x+a_0 \tag{0.25}$$

则只需作 n 次加法运算和 n 次乘法运算。这样，不仅加快了运算速度，而且减少了舍入误差。

(3) 避免两个相近的数作减法运算。

在数值计算中，将两个相近的数作减法运算时，会使计算结果的有效数字的位数大大减少，应当尽量避免。例如，一元二次方程 $x^2-18x+1=0$ 的两个根为：$x_1=9+\sqrt{80}$，