高等学校财经类专业核心课程
《经济数学基础》教学参考丛书

第三分册

# 概率统计学习指导

主　编　周概容
副主编　单立波

南开大学出版社

高等学校财经类专业核心课程
《经济数学基础》教学参考丛书

第三分册

# 概率统计学习指导

主　编　周概容
副主编　单立波

南开大学出版社

## 内 容 提 要

本书是受国家教委委托编写的高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》教学参考丛书之一。按照全国统一教学大纲和指定教材编写。内容包括随机事件与概率、随机变量的分布和数字特征、随机向量、抽样分布、统计估计、假设检验和回归分析共七章。每章又包括内容提要、典型例题分析、教材习题选解或提示、自我检测题和自检题答案。全书选材针对性较强，能起到指导学生学习《经济数学基础》的作用。

本书可供高等学校财经类专业本、专科师生及自学考试考生使用。

**图书在版编目(C I P)数据**

概率统计学习指导. 第3分册/周概容主编. —天津：南开大学出版，1997.9(2000.9 重印)
(高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》教学参考丛书)
ISBN 7-310-00993-2

Ⅰ. 概... Ⅱ. 周... Ⅲ. ①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 34059 号

**出版发行** 南开大学出版社
地址：天津市南开区卫津路 94 号
邮编：300071 电话：(022)23508542
**出版人** 张世甲
**承　印** 天津宝坻第二印刷厂印刷
**经　销** 全国各地新华书店
**版　次** 1997 年 9 月第 1 版
**印　次** 2000 年 9 月第 3 次印刷
**开　本** 850mm×1168mm 1/32
**印　张** 13.375
**字　数** 333 千字
**印　数** 8001—11000
**定　价** 16.80 元

# 《经济数学基础》教学参考丛书编委会

**主　编**　龚德恩

**副主编**　范培华　胡显佑

　　　　　周概容　朱幼文

**编　委**（以姓氏笔画为序）

朱幼文　刘序球　张广梵

单立波　范培华　周概容

胡显佑　龚德恩　彭勇行

熊　烈

# 出版说明

受国家教委委托，中国人民大学和北京大学曾共同承担“高等学校财经类专业核心课程”之一的“经济数学基础”的“教学大纲”和“教材”的编写工作。经国家教委高等教育司审定后，“教学大纲”和“教材”分别于1990年和1992年由四川人民出版社正式出版。为了保证“教学大纲”的顺利实施和有利于“教材”的教与学，为了提高“经济数学基础”这门核心课程的教学质量，国家教委继续委托中国人民大学和北京大学，组织全国部分财经院校的数学教师，编写《经济数学基础》教学参考丛书（以下简称《丛书》）。经两校与部分财经院校协商，并经国家教委高等教育司批准，成立了以龚德恩为主编，范培华、胡显佑、周概容、朱幼文为副主编的《丛书》编委会。编委会于1992年底提出了编写《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率统计学习指导》、《经济数学基础习题课讲义》、《经济数学基础习题集》和《经济数学基础教学参考文选》等六本参考书的《丛书》编写计划，并将编写任务分配给全国二十余所院校。经过承担《丛书》编写任务的各院校数学教师的共同努力，“学习指导”三本书已经顺利完稿，即将由南开大学出版社出版。“习题课讲义”和“习题集”的书稿已基本完成，正在统稿过程之中，而“教学参考文选”则因各种原因，未能编写，只好有待将来再行补救了。

参加编写《微积分学习指导》的教师是：刘祖估（第一、二章），郑万伏、周长菊（第三、四章），周道林（第五、六章），罗先照、王稳遐（第七章），童丽珍（第八章），周继高（第九、十章）。由龚德恩任主编，刘序球、张广梵任副主编。书稿收齐后，由龚德恩进行初审、初

纂，再由刘序球、周道林进行二审、二纂，最后由张广梵、龚德恩进行三审、三纂，并定稿。

参加编写《线性代数学习指导》的教师是：刘文龙（第一、二章），王隽（第三章），王新民（第四章），胡显佑（第五章），徐智政（第六章）。由胡显佑任主编、王新民任副主编。书稿由胡显佑、王新民总纂、定稿。

参加编写《概率统计学习指导》的教师是：王好民（第一章），单立波（第二章），张建华和周概容（第三—七章）。周概容任主编，单立波任副主编，负责书稿的总纂和定稿。

三本《学习指导》均按“教学大纲”的要求和“教材”的体例进行编写。为了使《学习指导》真正起到指导学生学习《经济数学基础》的作用，收到应有效果，各参编教师均作了很大努力。他们在编写过程中除参阅了部分国内有关书籍外，主要是总结个人和其他教师在教学过程中的实践经验，针对性比较强。我们希望这三本《学习指导》的先行出版，对提高《经济数学基础》这门核心课程的教学质量，能起到应有的作用。

由于我们缺乏组织编写教学参考丛书的经验，也由于参编教师人数较多，又分散在全国各地，给统稿、定稿带来不少困难。各书主编和副主编在总纂、定稿时，尽了最大努力，但书中出现不当或错误之处，仍然在所难免，热忱欢迎广大读者不吝指正。

《经济数学基础》教学参考丛书编委会

# 目　录

# 第一章　随机事件与概率

这一章讲概率统计的基本概念——事件及其概率和事件概率的计算，其基本内容可以归纳为：(1)事件及其关系和运算；(2)事件概率的概念；(3)事件概率的计算.

## 一　内容提要

### 1. 事件及其关系和运算

随机现象的表现或状态、随机试验的结果，统称为事件，分为必然事件、不可能事件和随机事件；事件之间可以定义与集合之间类似的关系和运算.

(1)**随机试验**. 现象分为可以确切预测的**必然现象**，和不能确切预测的**随机现象**. 试验分为事先可以确知其结果的确定性试验，和不能确切预言其结果的**随机试验**. 对随机现象的观测可以视为随机试验，简称“试验”(〔1〕§1.1；〔3〕第二章§1.2).

(2)**事件**. 随机试验的结果称做**事件**，分为：**必然事件**——每次试验都一定出现的结果，记作$\Omega$；**不可能事件**——任何一次试验都不会出现的结果，记作$\varnothing$；**随机事件**——在每次试验中既可能出现也可能不出现的结果，简称事件，通常用前几个拉丁字母$A,B,C$…或{……}表示，其中大括号中用文字或式子说明事件的内容.

试验最基本的结局 $\omega$ 称**基本事件**或**样本点**；一切 $\omega$ 的集合 $\Omega=\{\omega\}$ 称做**基本事件空间**或**样本空间**. 全集 $\Omega$ 可视为必然事件，任一事件 $A$ 可以视为 $\Omega$ 的子集；空集 $\varnothing$ 可视为不可能事件. 假如试验出现结局 $\omega$，则当 $\omega\in A$ 时认为事件 $A$ 出现.

(3)**事件关系和运算**. 事件的关系：包含、相等和不相容性；事件的运算：和(并)、差、交(积)、逆；事件运算的性质：交换律、结合律、分配律、对偶律.

1)**包含**. $A\subset B$ 表示"若 $A$ 出现，则 $B$ 也出现"，称做"$B$ 包含 $A$"或"$A$ 导致 $B$".

2)**相等**. $A=B$ 表示二事件 $A$ 和 $B$ 要么同时出现，要么同时不出现.

3)**和(并)**. $A+B$ 或 $A\cup B$，读做"$A$ 加 $B$"或"$A$ 与 $B$ 的和(并)"，表示事件"$A$ 和 $B$ 至少出现一个".

$\sum\limits_i A_i$ 或 $\bigcup\limits_i A_i$ 表示事件"诸事件 $A_i$ 中至少出现一个".

4)**差**. $A-B$ 或 $A\backslash B$，读做"$A$ 减 $B$"或"$A$ 与 $B$ 的差"，表示事件"$A$ 出现但 $B$ 不出现".

5)**交(积)**. $AB$ 或 $A\cap B$，读做"$A$ 与 $B$ 的交"，表示事件"$A$ 和 $B$ 同时出现".

$A_1A_2\cdots$ 或 $\bigcap\limits_i A_i$ 表示事件"诸事件 $A_i$ 同时出现".

6)**逆**. $\overline{A}=\{A$ 不出现$\}$ 称做 $A$ 的**对立事件**或**逆事件**. 显然，$A$ 和 $\overline{A}$ 互为对立事件，$A+\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$\overline{A}=\Omega-A$.

7)**不相容**. 称 $A$ 和 $B$ 不相容，若 $AB=\varnothing$.

(4)**事件运算的性质**. 事件的运算与集合运算完全类似，并且满足交换律、结合律、分配律和对偶律.

1)**交换律**. $A+B=B+A$，$AB=BA$.

2)**结合律**. $(A+B)+C=A+(B+C)$；$(AB)C=A(BC)$.

3)**分配律**. $A(B\pm C)=AB\pm AC$.

4)**对偶律.** $\overline{A+B}=\overline{A}\ \overline{B}$; $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A}_i;\ \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A}_i.$$

(5)**文氏图.** 亦称做维恩(Venn)图，一种示意图，可以很直观地表示事件的关系和运算.(〔1〕图 1-1;〔2〕图 1-2;〔3〕图 2-1).

**2. 事件的概率**

概率是事件在试验中出现的可能性的数值度量.用概率度量事件在试验中出现的可能性，与用长度度量线段、用面积度量平面图形、用质量度量物质的多少……是类似的，我们以 $\mathbf{P}(A)$表示事件 $A$ 的概率.

(1)**频率的稳定性.** 一种由经验证明了的，随机现象的统计规律性，事件在试验中出现可能性可用数值度量的依据.

**事件频率** 事件在重复试验中出现的次数与试验重复次数的比率.在一轮 $n$ 次重复试验中，某一事件 $A$ 出现的频率事先是无法确定的，这是随机性的表现.

**频率的稳定性** 随着试验重复次数无限增大，频率趋于稳定在某个数值附近.这种性质称做频率的稳定性，相应的数值(一般是未知的)称做频率的稳定值.频率的稳定性，说明事件在试验中出现的可能性可以度量，即说明概率的存在性.

(2)**概率的公理.** 由实践总结而来无须逻辑证明的，概率所应满足的基本条件，以公理形式提出.一方面，由公理可以给出概率的数学定义(〔1〕定义 1.1;〔3〕定义 2.1;〔6〕第 28 页;〔7〕定义 1.7);另一方面，由此导出概率的其他性质.

**公理一** 非负性:对于任一事件 $A$，有 $0\leqslant\mathbf{P}(A)\leqslant 1$;

**公理二** 规范性:必然事件 $\Omega$ 的概率等于 1，$\mathbf{P}(\Omega)=1$，(或不可能事件$\varnothing$的概率等于 0，$\mathbf{P}(\varnothing)=0$);

**公理三** 可加性:对于任意有限或可数个事件$\{A_i\}$，只要 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$\mathbf{P}(\bigcup_i A_i)=\sum_i \mathbf{P}(A_i). \tag{1.1}$$

长度、面积、体积、质量等一类度量都是非负的和可加的，只是不满足规范性. 对于概率要求规范性，显然是合理的.

(3)**条件概率和独立性**. 概率论的基本概念；借助条件概率计算的一些基本公式；独立性——许多概率统计模型的重要前提条件.

1)**条件概率**. 设 $\mathbf{P}(A)>0$，则称

$$\mathbf{P}(B|A)=\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \tag{1.2}$$

为“事件 $B$ 在事件 $A$ 出现条件下的条件概率”，简称“$B$ 关于 $A$ 的条件概率”.

对于给定的 $A$，条件概率满足概率的三条公理，从而具有“无条件”概率的一切性质(〔1〕定义 1.2；〔2〕第 24 页(5.1)式；〔3〕定义 2.2).

2)**独立事件**. 事件相互独立，指的是其中一个(或一些)事件的出现不改变(不影响)其他事件的统计规律性.

**二事件独立** 称事件 $A$ 和 $B$ 独立，如果

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B). \tag{1.3}$$

**多个事件独立** 称事件 $A_1,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，如果对于其中任意 $r(2\leqslant r\leqslant n)$ 个事件 $A_{j_1},\cdots,A_{j_r}$，有

$$\mathbf{P}(A_{j_1}\cdots A_{j_r})=\mathbf{P}(A_{j_1})\cdots\mathbf{P}(A_{j_r}). \tag{1.4}$$

**事件两两独立** 称事件 $A_1,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 两两独立，如果对于任意 $i\neq j(1\leqslant i,j\leqslant n)$，有

$$\mathbf{P}(A_iA_j)=\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j), \tag{1.5}$$

即任何两个事件都独立.

**独立事件性质**

1°. 当 $\mathbf{P}(A)>0$ 时，若 $A$ 和 $B$ 独立，则 $\mathbf{P}(B|A)=\mathbf{P}(B)$，反之亦然；

2°. 若 $A$ 和 $B$ 独立，则 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 和 $B$，$A$ 和 $\overline{B}$ 都相应地独立，反之亦然；

3°. 若 $A_1,\cdots,A_n$ 独立，则将其中任意 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 个事件换成其对立事件所得 $n$ 个事件仍独立.

4°. 若 $A_1,\cdots,A_n$ 独立，则其中任意 $r(r\geqslant 2)$ 个事件也独立.

(4)**概率的性质**. 概率的公理是实践证明无须逻辑证明的基本性质. 由概率的三条公理可以导出概率的其他性质.

1°. 不可能事件$\varnothing$的概率 $\mathbf{P}(\varnothing)=0$.

2°. 对立事件的概率

$$\mathbf{P}(\overline{A})=1-\mathbf{P}(A). \tag{1.6}$$

3°. **加法公式**. 对于任意事件 $A,B,C,\cdots$，有

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB); \tag{1.7a}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A+B+C)=&\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)\\&-\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(AC)-\mathbf{P}(BC)\\&+\mathbf{P}(ABC).\end{aligned} \tag{1.7b}$$

4°. **减法公式**. 对于任意 $A$ 和 $B$，有

$$\mathbf{P}(A-B)=\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(AB); \tag{1.8a}$$

特别，若 $A\supset B$，则 $\mathbf{P}(A)\geqslant\mathbf{P}(B)$，且

$$\mathbf{P}(A-B)=\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(B). \tag{1.8b}$$

5°. **乘法公式**. 设 $\mathbf{P}(A)>0$，则

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A); \tag{1.9a}$$

设 $\mathbf{P}(A_1\cdots A_{n-1})>0$,则

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)\\&=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\cdots\mathbf{P}(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).\end{aligned} \tag{1.9b}$$

**6°. 全概率公式.** 设事件组 $H_1,H_2,\cdots$ 满足条件[①]:1)$H_iH_j=\varnothing(i\neq j)$;2)$\bigcup\limits_i H_i=\Omega$,则对于任一事件 $A$,有

$$\mathbf{P}(A)=\sum_i\mathbf{P}(AH_i)=\sum_i\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i), \tag{1.10}$$

其中第二个和式要求 $\mathbf{P}(H_i)>0$.

**7°. 贝叶斯公式.** 在 6°的条件下,有

$$\mathbf{P}(H_k|A)=\frac{\mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A|H_k)}{\sum\limits_i\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)}. \tag{1.11}$$

贝叶斯公式又称做**验后**(或**后验**)**概率公式**、**逆概率公式**(〔1〕定理 1.2;〔2〕第 33 页;〔3〕(2.23)式).

**3. 事件概率的计算**

确定事件概率的方法有,(1)直接计算(包括古典型和几何型概率);(2)用频率估计概率;(3)利用概率的性质和基本公式进行推算.

**(1)概率的直接计算.** 在两种特别的情形下,利用试验结局的等可能性和均衡性,可以直接计算概率,即古典型和几何型概率.

**1)古典型概率.** 这是历史上出现最早的一种求概率的模型,故称古典型.

**1°. 计算公式.** 假设满足条件:(a)试验总共有 $N$ 个基本事件(结局);(b)各基本事件(结局)是等可能的. 那么,

---

① 满足此条件的(有限或可数个事件的)事件组,称做完全事件组.

$$\mathbf{P}(A)=\frac{A\text{ 所含基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{M}{N}, \tag{1.12}$$

其中 $M$ 又称做有利于(导致)事件 $A$ 的基本事件个数(〔1〕(1.10)式;〔2〕第 6 页定义;〔3〕(2.8)式).

**2°. 排列组合的基本公式.** 利用(1.12)式求 $M$ 和 $N$ 时常要用到排列组合的一些基本公式(详见〔3〕第二章 § 5.1). 假设 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_N\}$ 含 $N$ 个元素.

**排列** a)全排列:将 $N$ 个元素按一定顺序排列,共有 $N!$ 种不同排法;b)选排列:从 $N$ 个元素中任选 $n$ 个进行排列,共有

$$P_N^n=N(N-1)\cdots(N-n+1) \tag{1.13}$$

种不同的排法.

**组合** a)分两组:将 $N$ 个元素分为两组,使其中一组含 $n$ 个元素另一组含 $N-n$ 个元素,不同分法(组合)的总数为

$$C_N^n=\frac{N!}{n!\ (N-n)!}=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}. \tag{1.14}$$

b)分 $r(r\geqslant 2)$ 组:将 $N$ 个元素分为 $r$ 组,使各组分别含 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 个元素,其中 $n_i\geqslant 0,n_1+n_2+\cdots+n_r=N$,不同分法(组合)的总数为

$$C_N^{n_1,\cdots,n_r}=\frac{N!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_r!}. \tag{1.15}$$

**3°. 简单随机抽样.** 假设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$ 含 $N$ 个元素. 从 $\Omega$ 中随机抽取 $n$ 个元素,假如每个元素被抽到的可能性相同,则称抽样为简单随机抽样,分为还原和非还原、有序和无序.

**还原抽样**——每次抽取一个元素,并在抽取下一元素前将其放回 $\Omega$(假设元素一切特征不变).

**非还原抽样**——凡是抽出的元素均不再放回 $\Omega$.

**有序抽样**——不但考虑抽到哪个元素,而且考虑元素出现次序的抽样.