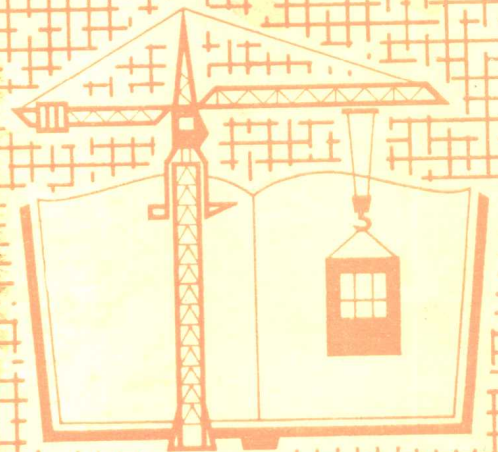


# 玻璃钢结构分析与设计

哈尔滨建筑工程学院 编



高等学校试用教材

中国建筑工业出版社

Q327.1

社

高等学校试用教材

# 玻璃钢结构分析与设计

哈尔滨建筑工程学院 编

中国建筑工业出版社

F386.57

本书是为高等工业学校复合材料专业编写的专业课试用统编教材。  
全书分三部分：复合材料力学基础，包括各向异性体弹性力学基本方程、纤维复合材料的基本力学性质、层合板的弹性特性与强度理论；复合材料结构分析，包括梁、板、壳的计算和屈曲、连接计算；玻璃钢产品设计，包括内压力容器、管罐、地面雷达罩和叶片设计。  
本书可供有关专业师生和工程技术人员参考。

高等学校试用教材  
**玻璃钢结构分析与设计**  
哈尔滨建筑工程学院 编

\*  
中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)  
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售  
中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

\*  
开本：787×1092毫米 1/16 印张：19 1/4 字数：476 千字  
1981年10月第一版 1981年10月第一次印刷  
印数：1—4,150册 定价：2.05元  
统一书号：15040·3845

## 前 言

本教材是一九七七年末召开的全国建材归口专业教材座谈会决定由我院编写的。

教材按150学时编写，各院校可根据该课程学时数的多寡适当取舍。

本教材涉及的内容属于新兴学科——复合材料力学和复合材料结构理论。这门学科正在迅速发展，研究工作十分活跃。但是，以这门学科为基础的玻璃钢结构设计理论还不完善，可遵循的设计方法还很少，远没有达到系统化、规范化的程度。玻璃钢是非均质的各向异性材料。在讨论玻璃钢材料的性质及其结构计算理论时，必然涉及非均质各向异性的概念。但是，这些概念对于开始从事专业课学习的学生来说却还是陌生的。有鉴于此，编者把本教材的重心放在基础理论方面，使这本专业课教材带有浓厚的专业基础课色彩。

编写这样一本统编教材还是首次尝试，没有完整的教材可为借鉴，缺乏系统资料和数据。编者虽在广泛调研、查阅国内外有关文献的基础上，结合教学上的体会，编出了这本教材，但是，由于时间仓促，加之编者水平所限，不当之处在所难免，衷心希望读者随时提出宝贵意见。

本教材的编写分工是：刘锡礼（绪论、第一、六、七、八、九章），张如三（第二章§1~4、第三、四章），赵景海（第二章§5、第五、十章），刘保策（第十一、十二、十三章）。全书由刘锡礼同志统稿，全部插图由刘保策同志绘制。

本教材由上海玻璃钢研究所朱颐龄副教授担任主审。担任审阅的还有：北京玻璃钢研究所黄毓圣、杨明德同志；哈尔滨玻璃钢研究所王秉权、刘其贤同志；上海玻璃钢研究所陈名甫同志、西北工业大学、北京航空学院张锡昆、赵时熙同志参加了本书的审稿会议。王秉权同志担任了教材修改稿的复审工作。

上海化工学院、武汉建筑工程学院参与了本教材编写大纲的审定工作。

编者

1979年8月

## 符 号 表

|               |                         |                   |               |
|---------------|-------------------------|-------------------|---------------|
| $A$           | 面积                      | $S$               | 静矩、雪荷载        |
| $[A], A_{ij}$ | 面内刚度矩阵及其元               | $[S], S_{ij}$     | 柔度矩阵及其元       |
| $a$           | 尺寸、距离、常数                | $s$               | 弧长、距离         |
| $[a], a_{ij}$ | 面内柔度矩阵及其元               | $T$               | 温度            |
| $[B], B_{ij}$ | 耦合刚度矩阵及其元               | $[T]$             | 坐标转换矩阵        |
| $b$           | 尺寸、距离、常数                | $t$               | 厚度、时间         |
| $[b], b_{ij}$ | 矩阵 $[A^{-1}B]$ 及其元      | $U$               | 抗剪刚度          |
| $C$           | 积分常数、离心力                | $u, v, w$         | 位移分量          |
| $[C], C_{ij}$ | 刚度矩阵及其元                 | $V$               | 应变位能、体积、速度    |
| $D$           | 位移向量                    | $W$               | 重量、风荷载、抗弯断面模量 |
| $D$           | 抗弯刚度、直径                 | $w$               | 单位面积重量、挠度     |
| $[D], D_{ij}$ | 抗弯刚度矩阵及其元               | $X, Y, Z$         | 体积力分量         |
| $d$           | 直径、尺寸、距离                | $X_n, Y_n, Z_n$   | 表面力分量         |
| $[d], d_{ij}$ | 矩阵 $[D - BA^{-1}B]$ 及其元 | $x, y, z$         | 直角坐标          |
| $E$           | 弹性模量                    | $Z$               | 数目            |
| $e$           | 极限应变                    | $\alpha$          | 角、系数          |
| $F$           | 面积、主向量、应力函数、基本强度        | $\alpha, \beta$   | 曲线坐标          |
| $f$           | 纤维张力、最大挠度               | $\beta$           | 角、系数          |
| $G$           | 剪切弹性模量、总重量              | $\gamma$          | 剪应变、容重        |
| $H$           | 高度                      | $\Delta$          | 行列式值          |
| $h$           | 厚度、高度                   | $\delta$          | 位移            |
| $J$           | 惯性矩                     | $\varepsilon$     | 线应变           |
| $K$           | 系数                      | $[\varepsilon]$   | 应变张量          |
| $k$           | 单层板序号、安全系数、系数           | $\{\varepsilon\}$ | 应变列阵          |
| $L$           | 坐标(纵向)、长度               | $\xi$             | 距离            |
| $l$           | 长度                      | $\eta$            | 距离、体积变形率      |
| $l, m, n$     | 方向余弦                    | $\Theta$          | 函数            |
| $[l]$         | 方向余弦矩阵                  | $\theta$          | 角             |
| $M$           | 力矩、力偶、股纱总量              | $\kappa$          | 曲率、扭率         |
| $\{M\}$       | 内力矩列阵                   | $\{\kappa\}$      | 弯曲应变列阵        |
| $m$           | 交叉弹性系数、股纱密度             | $\lambda$         | 长细比、乘子        |
| $m, n$        | 半波数                     | $\nu$             | 泊松比           |
| $N$           | 面内内力、轴向力                | $\rho$            | 曲率半径          |
| $n$           | 转速、层数                   | $\sigma$          | 正应力分量         |
| $\{N\}$       | 面内内力列阵                  | $[\sigma]$        | 应力张量          |
| $P$           | 集中力、轴向力、应力分量            | $\{\sigma\}$      | 应力列阵          |
| $F$           | 力                       | $\tau$            | 剪应力分量         |
| $P$           | 压力                      | $\Phi$            | 函数            |
| $Q$           | 横力、旋转阻力                 | $\varphi$         | 角             |
| $q$           | 横荷载                     | $\alpha$          | 曲率和扭率改变量      |
| $R$           | 半径、曲率半径                 | $\{\alpha\}$      | 弯曲应变列阵        |
| $r$           | 半径、循环特征                 | $\psi$            | 角             |

# 目 录

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 前 言                           |    |
| 符号表                           |    |
| 绪论                            | 1  |
| 第一章 各向异性体弹性力学基本               |    |
| 方程                            | 4  |
| § 1-1 各向异性体弹性力学的基本假设          | 4  |
| § 1-2 应力                      | 4  |
| 一、应力和应力符号                     | 4  |
| 二、平衡微分方程                      | 6  |
| 三、一点的应力状态                     | 8  |
| 四、应力分量的转轴公式                   | 9  |
| § 1-3 应变                      | 11 |
| 一、位移和位移分量                     | 11 |
| 二、应变分量及其几何意义                  | 12 |
| 三、应变分量的转轴公式                   | 14 |
| 四、变形连续方程                      | 17 |
| § 1-4 应力和应变的关系                | 18 |
| 一、广义虎克定律                      | 18 |
| 二、应变位能                        | 19 |
| 三、均质弹性体的弹性特征                  | 21 |
| 四、弹性对称的基本概念                   | 23 |
| 五、正交异性——三个弹性对称面               | 26 |
| 六、横观各向同性——各向同性面               | 27 |
| 七、各向同性——完全对称                  | 29 |
| § 1-5 平面应力状态的基本方程(公           |    |
| 式的综合)                         | 30 |
| 一、平面应力状态                      | 30 |
| 二、平面应力状态的基本方程                 | 30 |
| 三、应力函数                        | 32 |
| 习题                            | 32 |
| 第二章 连续纤维复合材料的力学               |    |
| 性质                            | 34 |
| § 2-1 纤维与基体的基本力学性质            | 34 |
| 一、纤维的基本力学性质                   | 34 |
| 二、基体的基本力学性质                   | 36 |
| § 2-2 单向纤维复合材料弹性系数            |    |
| 的复合关系式                        | 37 |
| 一、纵向弹性模量 $E_L$                | 39 |
| 二、横向弹性模量 $E_T$                | 40 |
| 三、泊松比 $\nu_{LT}$ 和 $\nu_{TL}$ | 42 |
| 四、剪切弹性模量 $G_{LT}$             | 43 |
| 五、弹性系数复合关系式的用途                | 46 |
| § 2-3 正交织物复合材料的弹性特性           | 47 |
| 一、正交织物复合材料及其主方向弹性系            |    |
| 数的分析方法                        | 47 |
| 二、正交织物复合材料的弹性系数               | 48 |
| § 2-4 连续纤维复合材料的强度             | 49 |
| 一、单向纤维复合材料的五个基本强度             | 49 |
| 二、纵向抗拉强度                      | 50 |
| 三、纵向抗压强度                      | 51 |
| 四、横向抗拉强度                      | 52 |
| 五、纵横向抗剪强度                     | 53 |
| § 2-5 纤维复合材料的其它力学性能           | 54 |
| 一、疲劳性能                        | 54 |
| 二、蠕变性能                        | 57 |
| 三、冲击韧性                        | 59 |
| 四、环境条件对玻璃钢力学性能的影响             | 61 |
| 习题                            | 62 |
| 第三章 层合板的弹性特性和应力               |    |
| 计算                            | 63 |
| § 3-1 单向板的弹性特性                | 63 |
| 一、单向板是力学分析的基本单元               | 63 |
| 二、单向板弹性主方向的广义虎克定律             | 63 |
| 三、单向板的应力转轴公式和应变转轴             |    |
| 公式                            | 66 |
| 四、单向板非弹性主方向的广义虎克定律            | 69 |
| 五、单向板弹性系数的方向性                 | 72 |
| 六、交叉弹性                        | 75 |
| § 3-2 耦合应力与耦合效应               | 76 |
| 一、两层斜交叉层合板的拉伸特性               | 76 |
| 二、两层斜交叉层合板的剪切特性               | 78 |
| 三、镜对称铺层                       | 79 |
| § 3-3 层合板的内面弹性特性              | 80 |

|                             |     |                         |     |
|-----------------------------|-----|-------------------------|-----|
| 一、层合板的广义虎克定律                | 80  | 一、薄板的内力和平衡条件            | 141 |
| 二、斜交叉层合板与正交叉层合板的广义虎克定律      | 82  | 二、薄板的变形                 | 144 |
| § 3-4 层合板各层应力的计算            | 85  | § 6-3 各向同性板的弯曲          | 145 |
| 一、层合板各层应力的计算方法              | 85  | 一、内力与挠度的关系              | 146 |
| 二、层合板各层应力的计算步骤              | 86  | 二、基本微分方程                | 147 |
| 习题                          | 89  | 三、简支矩形板的解               | 147 |
| <b>第四章 纤维复合材料的强度理论与强度计算</b> | 91  | 四、应变和应力的决定              | 153 |
| § 4-1 强度理论——纤维复合材料的破坏准则     | 91  | § 6-4 正交异性板的弯曲          | 154 |
| 一、强度理论的概念                   | 91  | 一、内力与挠度的关系              | 154 |
| 二、最大应力理论和最大应变理论             | 92  | 二、基本微分方程                | 155 |
| 三、蔡-希尔(Tsai-Hill)理论         | 96  | 三、简支矩形板的解               | 155 |
| 四、破坏包络线的概念                  | 98  | 四、应变和应力的决定              | 158 |
| § 4-2 层板的强度计算               | 99  | § 6-5 层合板的弯曲            | 158 |
| 一、层板的强度计算例                  | 99  | 一、一般层合板理论               | 159 |
| 二、层板强度计算的步骤                 | 104 | 二、关于耦合效应的讨论             | 163 |
| 习题                          | 105 | 三、对称层合板的基本微分方程          | 163 |
| <b>第五章 梁的计算</b>             | 106 | 四、对称层合板应变和应力的决定         | 166 |
| § 5-1 层合梁                   | 106 | 五、多层层合板的弯曲              | 167 |
| 一、层合梁的正应力                   | 106 | 习题                      | 171 |
| 二、层合梁的剪应力                   | 111 | <b>第七章 薄壳的计算</b>        | 173 |
| 三、层合梁的挠度                    | 113 | § 7-1 基本概念与假定           | 173 |
| 四、柱状弯曲层合板                   | 115 | 一、薄壳的定义与假定              | 173 |
| § 5-2 夹层梁                   | 117 | 二、曲率线坐标                 | 173 |
| 一、夹层梁的组成和容重计算               | 117 | 三、薄壳的内力                 | 174 |
| 二、夹层梁的应力                    | 119 | 四、薄壳的变形                 | 176 |
| 三、芯材和面板厚度设计                 | 121 | 五、内力与变形的关系              | 177 |
| 四、夹层梁的挠度                    | 123 | § 7-2 闭合圆柱壳的无矩理论        | 178 |
| 五、蜂窝芯材平压弹性模量和剪切模量的估算公式      | 123 | 一、圆柱面几何                 | 178 |
| 六、芯材的剪切变形和横截面变形             | 125 | 二、平衡方程式                 | 178 |
| 七、夹层梁的最小重量设计                | 129 | 三、应变位移方程式               | 180 |
| § 5-3 薄壁梁                   | 131 | 四、内力与变形的关系              | 184 |
| 一、薄壁梁中的剪应力                  | 131 | 五、端支承的圆柱壳               | 181 |
| 二、宽凸缘薄壁梁的有效宽度               | 132 | 六、轴对称荷载作用下的圆柱壳          | 184 |
| 三、剪切变形对正应力的影响               | 134 | § 7-3 闭合圆柱壳在轴对称荷载下的有矩理论 | 186 |
| 四、薄壁梁的横截面变形                 | 136 | 一、平衡方程式                 | 186 |
| 习题                          | 138 | 二、应变位移关系式               | 187 |
| <b>第六章 薄板的计算</b>            | 140 | 三、内力与变形的关系              | 188 |
| § 6-1 基本概念与假定               | 140 | 四、基本微分方程及其通解            | 188 |
| § 6-2 薄板的内力和变形              | 141 | 五、立式圆柱形贮液罐              | 189 |
|                             |     | § 7-4 回转壳在轴对称荷载下的无矩理论   | 192 |
|                             |     | 一、回转面几何                 | 192 |

|                    |     |                       |     |
|--------------------|-----|-----------------------|-----|
| 二、平衡方程式和薄膜内力       | 193 | § 10-4 等张力封头          | 232 |
| 三、自重作用下的筒支球顶       | 195 | 一、基本方程式变换             | 232 |
| 四、内压容器封头           | 195 | 二、缠绕角方程               | 233 |
| 五、内压容器筒身段的薄膜内力和变形  | 196 | 三、子午线方程               | 234 |
| 习题                 | 198 | 四、股纱密度                | 235 |
| 第八章 屈曲             | 199 | 五、封头主曲率半径和曲面特征        | 236 |
| § 8-1 概述           | 199 | § 10-5 平面封头           | 237 |
| § 8-2 柱的屈曲         | 199 | § 10-6 气瓶的强度设计        | 240 |
| 一、柱的屈曲微分方程及其解      | 199 | 一、设计依据                | 240 |
| 二、解的适用范围           | 201 | 二、用网格理论进行强度设计         | 240 |
| 三、提高玻璃钢柱临界荷载的途径    | 202 | 三、用层合板理论计算筒体开裂强度      | 243 |
| § 8-3 薄板的屈曲        | 203 | § 10-7 具有金属内衬的筒体设计    | 247 |
| 一、各向同性板的压缩屈曲       | 203 | 一、纤维预加张力原理及设计要求       | 247 |
| 二、正交异性板的压缩屈曲       | 207 | 二、计算公式                | 249 |
| 三、玻璃钢屈曲板的极限强度      | 211 | 三、设计例题                | 251 |
| § 8-4 闭合圆柱壳的轴压屈曲   | 212 | 习题                    | 253 |
| 习题                 | 214 | 第十一章 玻璃钢化工管道及贮罐设计     | 254 |
| 第九章 玻璃钢的连接         | 215 | § 11-1 概述             | 254 |
| § 9-1 玻璃钢的连接方式     | 215 | 一、玻璃钢管道及贮罐的应用         | 254 |
| § 9-2 玻璃钢的机械连接     | 215 | 二、玻璃钢管、罐的特点与分类        | 255 |
| 一、机械连接的形式          | 215 | § 11-2 设计基础           | 257 |
| 二、挤压强度校核           | 216 | 一、耐腐蚀结构               | 257 |
| 三、端距和边距            | 216 | 二、玻璃钢层板的最低强度极限        | 257 |
| 四、行列距              | 217 | 三、安全系数的选择             | 257 |
| 五、安全系数             | 218 | § 11-3 管的结构计算         | 258 |
| § 9-3 玻璃钢的胶接       | 218 | 一、单质玻璃钢管的计算           | 258 |
| 一、胶接的形式            | 218 | 二、玻璃钢复合管              | 260 |
| 二、搭接接点的应力分析        | 218 | 三、管道的连接及管件            | 263 |
| 三、搭接接点的强度条件        | 223 | § 11-4 玻璃钢贮罐设计        | 269 |
| 四、常用胶接剂            | 224 | 一、立式圆柱形贮罐             | 269 |
| 五、设计胶接接点时应注意的几个问题  | 225 | 二、卧式圆柱形贮罐             | 272 |
| 六、安全系数             | 225 | 三、玻璃钢贮罐的构造处理          | 273 |
| 第十章 纤维缠绕内压容器的强度设计  | 226 | 第十二章 玻璃钢地面雷达罩设计       | 276 |
| § 10-1 网格理论的基本概念   | 226 | § 12-1 概述             | 276 |
| § 10-2 筒体的平衡型方程式   | 227 | 一、玻璃钢地面雷达罩的主要类型及其发展趋势 | 276 |
| 一、单螺旋缠绕的平衡型方程式     | 227 | 二、罩体最佳设计的概念           | 276 |
| 二、双螺旋缠绕的平衡型方程式     | 228 | 三、球形罩体的几何划分           | 278 |
| § 10-3 平衡型封头的基本方程式 | 230 | § 12-2 罩体的结构设计        | 279 |
| 一、封头的薄膜内力          | 230 | 一、荷载分析及内力计算           | 279 |
| 二、纤维的分布特征          | 231 | 二、内力组合及强度验算           | 283 |
| 三、基本方程式            | 231 |                       |     |



|                                    |     |                       |     |
|------------------------------------|-----|-----------------------|-----|
| 三、單体的稳定计算 .....                    | 284 | § 13-2 叶片结构设计梗概 ..... | 292 |
| 四、位移计算 .....                       | 286 | 一、叶截面设计 .....         | 292 |
| 五、單体的构造连接 .....                    | 287 | 二、叶根设计 .....          | 294 |
| § 12-3 设计例题 .....                  | 288 | 三、铺层设计 .....          | 297 |
| 第十三章 玻璃钢叶片结构设计介绍 .....             | 291 | § 13-3 船用玻璃钢螺旋桨 ..... | 299 |
| § 13-1 玻璃钢叶片的应用、特点及其<br>发展前景 ..... | 291 | 一、荷载分析 .....          | 300 |
| 一、玻璃钢叶片的应用 .....                   | 291 | 二、内力计算 .....          | 301 |
| 二、玻璃钢叶片的特点及应用的前景 .....             | 291 | 三、铺层设计 .....          | 304 |
|                                    |     | 四、强度校核 .....          | 304 |

## 绪 论

现代科学技术的迅猛发展，对材料的要求日益广泛而严格，单凭选择材料往往不能满足要求。复合材料的出现，使人们在认识和使用材料方面有了更大的自由。人们不仅可以选择材料，而且可以为特定的工程目的设计和成型某些材料。

复合材料是两种或两种以上的材料组成的**多相材料**，它具有优于各组分材料的综合性能，正因为复合材料是多相材料，各组分材料虽然彼此作用成为一个整体，但是在交界面处可以将各组分材料物理地区分出来，所以，复合材料不仅是材料，而且更确切地说是结构。

复合材料通常以增强材料的几何特征来分类。譬如分为：纤维复合材料、粒子复合材料、薄片复合材料等。现阶段最常见的是纤维复合材料。

玻璃钢就是纤维复合材料的一种。它是以玻璃纤维为增强材料，以合成树脂为基体，复合而成的一种新型工程材料。迄今，虽然玻璃钢才只有三十多年的历史，但是由于它具有许多优异的性能而获得了广泛的应用。

对玻璃钢力学性能及其结构计算理论的研究尚不成熟，有待于进一步探讨。玻璃钢与惯用的金属材料相比较有明显的优点，同时也有明显的缺点。在进行玻璃钢结构设计时，应当遵循“用其所长，避其所短”的原则。

玻璃钢的主要力学性能大致可以归纳如下：

### (1) 强度和弹性性能的可设计性

玻璃钢是由玻璃纤维或其织物和合成树脂组成的。玻璃纤维的强度和弹性模量比树脂的强度和弹性模量大几十倍。人们可以通过改变玻璃纤维的含量和分布方向，在一定范围内获得不同强度和弹性性能的玻璃钢，用以承受不同的荷载。譬如，对于荷载情况清楚的单向受力结构，可以考虑单向铺层方式；一般为安全计而采用4:1或7:1的铺层方式。这种单向铺层的方式可以在纤维方向获得特别高的强度，用以承受单向应力，而在垂直于纤维的方向没有过份多余的强度储备。又如，对于双向受力的结构，可以考虑双向铺层和多向铺层的方式；选用适当的纤维用量或改变各单层的铺层方向，以满足强度要求。再如，对于面内均匀受力或受力情况不很清楚的结构，可以考虑多向铺层方式，选择相应的铺层方向使材料成为面内各向同性。

就结构设计而言，上述特性所表现出来的优越性是最重要的。正确地运用强度和弹性性能的可设计性，必然导致理想的结构设计，而理想的结构体现了安全和经济的统一。

### (2) 各向异性性能

玻璃钢是各向异性材料。所谓各向异性是指材料在不同方向上具有不同的力学性能。对于各向同性材料，独立的弹性系数只有两个：弹性模量 $E$ 、泊松比 $\nu$ （或剪切弹性模量 $G$ ）；对于各向异性材料，独立的弹性系数增加了。

如上所述，为了获得所希望的、有一定方向性的玻璃钢，通常是将若干个单层（称为单层板）层合起来，构成一个多层（称为层合板）结构。每一个单层在其面内具有两个弹性主方向，即纤维方向 $L$ （纵向）和垂直于纤维方向 $T$ （横向）。在面内，独立的弹性系数有四个：纵向弹性模量 $E_L$ 、横向弹性模量 $E_T$ 、纵向泊松比 $\nu_{LT}$ （或横向泊松比 $\nu_{TL}$ ）、

纵横向剪切弹性模量  $G_{LT}$ 。显然，这种物理方面的复杂性增加了结构计算的复杂性。这种复杂性尤其表现在非弹性主方向上：当坐标不与弹性主方向重合时，正应力会引起剪应变，剪应力会引起线应变。这种现象称为交叉弹性。这是各向同性材料所没有的。

玻璃钢的各向异性性能，要求在校核强度时做得更仔细。就每一单层而言，通常有五个基本强度：纵向抗拉强度  $F_{Lt}$ 、纵向抗压强度  $F_{Lc}$ 、横向抗拉强度  $F_{Tt}$ 、横向抗压强度  $F_{Tc}$ 、纵横向抗剪强度  $F_{LT}$ 。无论按何种强度理论进行强度校核，都必须尽量弄清荷载情况和受力状态。对于单向玻璃钢，横向抗拉强度往往不及纵向抗拉强度的5%；因此，很可能在主要荷载作用下不发生破坏，却在次要荷载作用下发生破坏。

### (3) 非均质性

玻璃钢是非均质材料。若着眼于比纤维直径大不多的范围（即亚微观范围），玻璃钢显然是非均质体；若着眼于比纤维直径大得多的范围（即宏观范围），又可以将每个单层视为均质体。对于层合结构，各层之间即使在宏观范围内也是非均质的。这种不同层之间的宏观非均质性，给玻璃钢结构的分析带来了很大的复杂性。层合结构的弹性特性和强度特性必须以每个单层的弹性特性和强度特性为基础，这是与均质体的根本不同之处。

上述非均质性造成层合结构的一个特有的现象：耦合效应。所谓耦合效应，是在小变形情况下，面内内力也会引起弯曲变形，弯曲内力也会引起面内变形。譬如，一块受简单拉伸的玻璃钢层合薄板，可能出现翘曲现象。为了避免或者利用耦合现象，构成了层合结构分析的一个重要课题。

### (4) 低弹性模量

玻璃钢的容重较小，大约为  $(1.5 \sim 2.1) \text{g/cm}^3$ ，是普通钢材的1/4左右，其强度却较高，一般可达到  $4000 \text{kg/cm}^2$  以上。玻璃钢的比强度（强度与容重之比）可达  $2 \times 10^6 \text{cm}$  以上，比普通钢材的比强度高很多。是一种轻质高强的材料。但是，玻璃钢的弹性模量是比较低的。譬如，纤维含量高达80%的单向玻璃钢，其纵向弹性模量约为  $5 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ ，仅是普通钢材的25%，为铝材的70%。而双向玻璃钢和多向玻璃钢的弹性模量就更低。

玻璃钢的比弹性（弹性模量与容重之比）与钢材和木材的比弹性相接近，大约为  $(2 \sim 2.7) \times 10^8 \text{cm}$ 。若结构受刚度控制，则必须采取相应措施以提高玻璃钢结构的刚度；如加肋或采用夹层结构等。换言之，以改变截面的尺寸和形状来弥补低弹性模量这一弱点。

玻璃钢的剪切弹性模量更低。金属的剪切弹性模量为抗压弹性模量的40%左右，而单向玻璃钢的剪切弹性模量只有纵向弹性模量的10%左右，双向玻璃钢为20%。这样低的剪切弹性模量，对于主要承受剪切的结构来说是很大的弱点。

### (5) 低剪切强度和低层间抗拉强度

玻璃钢的剪切强度是比较低的：双向玻璃钢的抗剪强度为其抗拉强度的10%左右；单向玻璃钢就更低，甚至在5%以下。层合玻璃钢的层间没有玻璃纤维增强，因此层间剪切强度和层间抗拉强度低于树脂浇注体的剪切强度和抗拉强度。上述弱点给玻璃钢的连接造成了困难；往往由于连接问题处理不当造成连接部位的局部破坏，而导致整个结构的破坏。在结构设计时，应当尽量避免使用玻璃钢的低剪切强度和低层间抗拉强度；必要时可以采取构造措施。

### (6) 脆性

玻璃钢的延伸率一般小于5%，属于脆性材料。对于塑性材料（如钢材），结构中某

些高应力区的材料进入塑性，引起应力重分配而使应力得到缓和。但是，对于玻璃钢，由于没有塑性阶段，结构中高应力区的部分纤维会先行断裂，它们承担的荷载卸给未断裂的纤维；于是可能发生纤维的链锁断裂现象而导致破坏。对于玻璃钢结构的高应力区，应当预先考虑加强措施。等强度结构设计是玻璃钢结构设计的重要课题之一。

以上概略地叙述了玻璃钢的主要力学性能。应当说明，玻璃钢尚有其他一些性能，如疲劳、蠕变、冲击等。也与惯用的金属材料有很多不同之处；而且影响玻璃钢性能的因素也十分繁多，这里不一一详述<sup>①</sup>。

玻璃钢结构设计的主要特点是材料设计和结构设计必须同时进行。这是因为，材料（这里所说的材料不是指原材料，而是作为结构材料的玻璃钢）和结构物都在同一个工艺过程中形成。这与惯用的金属材料的结构设计有很大的不同。在设计金属结构时，设计人员只是按设计要求合理地选择定型化的标准材料；在设计玻璃钢结构时，设计人员除了正确地选择原材料之外，还必须对复合起来的材料性能加以分析，确定合理的铺层方案，使之满足结构方面的要求。换言之，玻璃钢结构设计人员不仅要注意到结构方面，同时还必须注意到如何发挥材料的最佳性能问题。

工程中通常把玻璃钢视为弹性体。所以，用弹性力学来分析玻璃钢的力学性质，建立玻璃钢结构的计算理论是适宜的。

弹性力学，无论在理论方面还是在实验方面，都已经相当完善，而且已为工程实践所证实。但是，对于很多重要的、有实际意义的问题，即使是对各向同性体企图寻求弹性力学的精确解也会遇到数学上的巨大困难。迄今，只对个别的简单问题可以获得精确解。因此，人们不得不借助于近似理论。近似理论是针对具体问题作一些补充假设，使问题得到简化，但是其结果必须由实践所证实。材料力学属于弹性力学近似理论的范畴。玻璃钢是一种复杂的、非均质的、各向异性材料；这种物理上的固有的复杂性必然导致更加巨大的数学上的困难。因此，对于玻璃钢结构，简化的方法就格外受到设计人员的欢迎。只要这种简化理论能够反映问题的主要方面，并且为实践所证实，无论其简化模型简单到什么程度，都不失为一个有效的设计方法。纤维缠绕内压力容器设计的“网格分析法”就是一个明显的例子。但是应当说明，不是所有的问题都可以简化到十分简单的程度，这是由于复合材料结构的内在复杂性所决定的。

复合材料及其结构是一门新兴学科。目前，利用复合材料于结构主要还是靠试验结果；在玻璃钢结构设计方法上，基本上是等代设计：即在结构物形状、荷载、使用条件都不变的条件下，用玻璃钢代替其它材料，沿用惯用材料的设计方法，稍考虑一些玻璃钢的特点；有时只作等强度或等刚度的替换。完全从复合材料的各向异性和非均质性概念来研究复合材料特性和建立结构计算理论的工作已经十分活跃，正在形成变形固体力学的一个分支——复合材料力学。可以期望，随着理论的进一步完善、资料和经验的积累、电子计算技术的广泛采用，复合材料结构的计算理论和设计方法将不断得到发展。

本教材共十三章。就内容来说，可分为三部分。第一部分以微元体为对象，叙述其应力、应变、应力应变关系及强度特性等复合材料力学方面的基础知识。第二部分以若干结构构件为对象，叙述复合材料结构理论方面的基础知识。第三部分以几个玻璃钢产品为对象，介绍结构设计的某些方法。

<sup>①</sup> 参阅《玻璃钢结构设计》，上海玻璃钢结构研究所，中国建筑工业出版社（1980）。

# 第一章 各向异性体弹性力学基本方程

复合材料的力学性质，在大多数场合都表现出很大的方向性；换言之，在不同的方向上，复合材料的力学性质有很大的差异。因此，多数的复合材料属于各向异性体。譬如，玻璃钢就是这样一种材料。另外，工程中通常把复合材料视为弹性体。所以，应用各向异性体弹性力学来分析复合材料的力学性质，并以此为基础建立复合材料结构的计算理论是适宜的。

本章旨在介绍各向异性体弹性力学基本方程的建立等基础知识。

## § 1-1 各向异性体弹性力学的基本假设

各向异性体弹性力学有如下基本假设：

(1) 假设物体是连续的——组成物体的材料是连续的介质而充满物体所占据的全部空间。因此，物体中的应力、应变、位移等量是连续的，可以用坐标的连续函数来表示。这一假设从宏观的意义上说是完全允许的。

(2) 假设物体是均质的——组成物体的材料是均匀的。可以不必考虑材料微观结构上的不均匀性，而认为从材料中按坐标方向切取的体微元都具有相同的物理特性。

(3) 假设物体是完全弹性的——物体在外力作用下产生变形，当外力移去后，物体能够完全恢复其原来的形状。当外力不很大时（应力不超过弹性极限），材料服从虎克定律，即应力和应变成正比。

(4) 假设物体的变形是很小的——物体的变形量远小于物体的原尺寸。因此，在研究物体的平衡问题时，对物体变形前后的尺寸不予区别；在研究物体的变形问题时，可以忽略高阶微量。

在上述基本假设的基础上建立各向异性体弹性力学的基本方程都是线性的，因此称为线性弹性理论的基本方程。这就是本章所要涉及的内容。

## § 1-2 应 力

### 一、应力和应力符号

一任意形状的物体(图1-1(1))，在外力 $P_1, P_2, \dots, P_5$ 作用下处于平衡。该物体各部分之间将产生内力。为了显示内力，我们假想地用截面 $mm$ 在物体某点 $o$ 处将物体分为两部分 $A$ 和 $B$ 。试考察两部分之一，如 $A$ (图1-1(2))。它在外力 $P_1, P_5$ 和分布在截面 $mm$ 上的内力作用下维持平衡。截面 $mm$ 上的内力则是 $B$ 部分对 $A$ 部分的作用。

一般说来，内力在截面上的分布规律是未知的。若在包括点 $o$ 的面微元 $dF$ 上作用着内力 $dP$ ，则其比

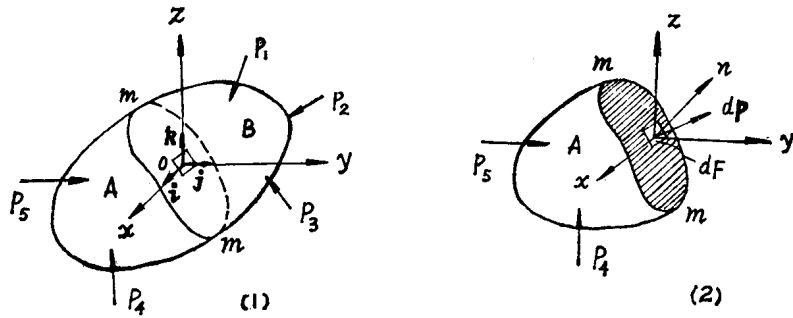


图 1-1

$$P_n = \frac{dP}{dF}$$

称为在面微元  $dF$  上的应力向量。足标  $n$  表示面微元  $dF$  的外法线方向。应力向量  $P_n$  之值显然与其作用面  $dF$  的外法线方向有关；当外法线方向  $n$  改变时，即过  $O$  点作不同的截面， $P_n$  之值也随之改变。这个概念可以用一个简单的例子来说明。图 1-2 所示为一受均匀拉伸的等截面杆。对于正截面上的应力向量，因为外法线方向与杆的轴线方向一致，所以， $P_n = P/F$ ；对于斜截面上的应力向量，因为外法线方向不与杆的轴线方向一致，所以， $P_n = P \sin \alpha / F$ 。从这个例子可以得出结论：在论及某点处的应力时，必须说明其作用面。

我们知道，三维空间中某向量  $M$ ，可以在笛卡儿坐标系  $x, y, z$  中表示成

$$M = M_x i + M_y j + M_z k$$

其中， $M_x, M_y, M_z$  分别为向量  $M$  在  $x, y, z$  方向的投影， $i, j, k$  为坐标单位向量。因此，应力向量  $P_n$  也可以用相同的方式表示成

$$P_n = P_{nx} i + P_{ny} j + P_{nz} k$$

其中， $P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}$  分别为  $P_n$  在  $x, y, z$  方向的投影，称为应力分量。足标的第一个字母表示作用面的外法线方向，第二个字母表示应力分量的方向。

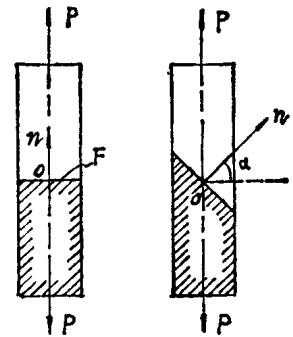


图 1-2

作用在与坐标轴垂直的三个截面上的应力向量，在弹性理论中具有十分重要的意义。这些应力向量是  $P_x, P_y, P_z$ ，它们分别作用在与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴相垂直的截面（或者称  $x$  面、 $y$  面、 $z$  面）上。不言而喻，这三个作用面是互相垂直的。显然，应力向量  $P_x, P_y, P_z$  可以用它们的分量表示成

$$\left. \begin{aligned} P_x &= P_{xx} i + P_{xy} j + P_{xz} k \\ P_y &= P_{yx} i + P_{yy} j + P_{yz} k \\ P_z &= P_{zx} i + P_{zy} j + P_{zz} k \end{aligned} \right\}$$

其中， $P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}$  都与相应的作用面垂直，称为正应力分量，并用  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  来表示； $P_{xy}, P_{yz}, P_{yx}, P_{zy}, P_{zx}, P_{zy}$  都在相应的作用面内，称为剪应力分量，并用  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  来表示。为明确计，在物体某点处取一个平行六面体微元（图 1-3），使各棱边与坐标轴平行，则作用在该体微元各面上的应力分量的符号及取用的正方向如图

1-3所示。

应力分量的正负号规则：正应力拉为正，压为负；若正号的正应力与坐标方向一致，

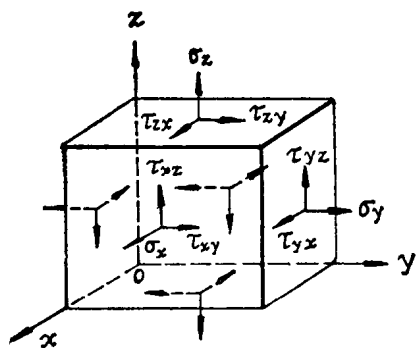


图 1-3

则剪应力的正向取其余两个坐标的正向，若正号的正应力与坐标方向相反，剪应力的正向也反转。或者也可以这样叙述：正面上的应力分量与坐标方向一致时为正，负面上的应力分量与坐标方向相反时为正。截面的外法线方向与坐标方向一致称为正面（图1-3中的前、右、上面），反之称为负面（图1-3中的后、左、下面）。

作用在物体表面上的力称为表面力，分布在物体质量上的力称为体积力。记单位面积上的表面力分量为  $X_n, Y_n, Z_n$ ；记单位体积的体积力分量为

$X, Y, Z$ 。

以上我们讨论了应力的定义和符号规则，下面将讨论物体的平衡问题。

## 二、平衡微分方程

设物体中某点  $A$  的坐标为  $(x, y, z)$ 。为了研究其平衡状态，我们用三对无限邻近的坐标平面  $(x, x+dx), (y, y+dy), (z, z+dz)$ ，从物体中取出一个平行六面体微元（图1-4）。显然，该体微元的边长为  $dx, dy, dz$ ，其体积  $dV = dx dy dz$ （图1-5）。

物体中各点的应力，一般说来是不相同的。物体中的应力可以用坐标的连续函数来表示。如图1-5所示的体微元的  $CD$  面，若其正应力可以写成

$$(\sigma_x)_{CD} = \sigma_x(x, y, z)$$

$BE$  面上的正应力则可以写成

$$(\sigma_x)_{BE} = \sigma_x(x+dx, y, z)$$

上式的右端可以展开成台劳（Taylor）级数

$$\begin{aligned} \sigma_x(x+dx, y, z) &= \sigma_x(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dx \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \sigma_x(x, y, z)}{\partial x^2} (dx)^2 + \dots \end{aligned}$$

在略去高阶微量的各项后，得

$$(\sigma_x)_{BE} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

其余各应力分量均可类推。因为体微元是无限小的，所以其各面上的应力可以认为是均匀分布；体积力作用在体微元的中心。因为体微元是用截面法截取的，所以各面上的应力可以作为外力来处理。

若物体在外力作用下处于平衡状态，则其体微元也应当处于平衡状态；于是，体微元应当满足六个静力平衡条件：

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0$$

首先讨论  $x$  方向主向量为零的条件  $\Sigma F_x = 0$ 。从图1-5不难得到

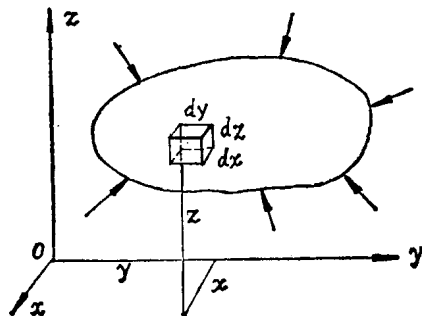


图 1-4

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz \\ & + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

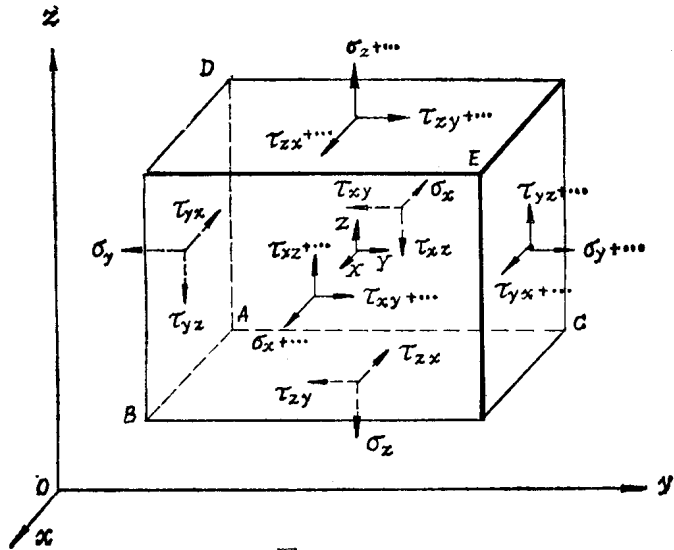


图 1-5

整理并除以  $dx dy dz$ ，得下列方程的第一式。同理，由  $\Sigma F_y = 0$  和  $\Sigma F_z = 0$  得第二式和第三式。汇集起来，有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

这就是平衡微分方程，又称纳维 (Navier) 方程。

再讨论  $x$  方向主矩为零的条件  $\Sigma M_x = 0$ 。对过体微元中心的  $x$  轴取矩，得

$$\begin{aligned} & \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dx dy \frac{dz}{2} \\ & - \tau_{xy} dx dy \frac{dz}{2} = 0 \end{aligned}$$

略去高阶微量，并遍除以  $dx dy dz$ ，得下列第一等式。同理，由  $\Sigma M_y = 0$  和  $\Sigma M_z = 0$  得第二等式和第三等式。汇集起来，有

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

这就是剪应力互等定理。

根据剪应力互等定理，可以看出，在平衡微分方程 (1-1) 中共有六个独立的应力分量： $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}(\tau_{zy}), \tau_{zx}(\tau_{xz}), \tau_{xy}(\tau_{yx})$ 。显然，方程式的数目少于未知量的数目，



仅由平衡微分方程不能确定应力。所以，弹性理论的问题属于静不定问题。

### 三、一点的应力状态

若物体中某点处的九个应力分量（只有六个是独立的） $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ 为已知，能否说该点处的应力状态就完全确定了呢？换言之，能否用已知的九个应力分量唯一地表示出该点处任一斜截面上的应力呢？下面讨论这个问题。

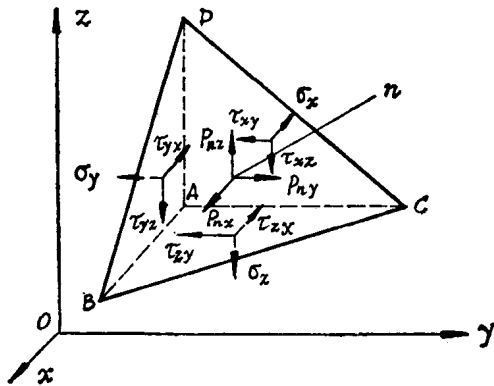


图 1-6

图 1-6 所示为一个四面体微元，过 A 点的三个面与坐标平面平行，斜面的外法线为  $n$ ，外法线  $n$  与坐标轴的夹角为  $(n, x), (n, y), (n, z)$ ，其方向余弦为

$$l = \cos(n, x)$$

$$m = \cos(n, y) \quad (1-3)$$

$$n = \cos(n, z)$$

若  $\triangle ACD, \triangle ABD, \triangle ABC, \triangle BCD$  的面积分别用  $(dF)_x, (dF)_y, (dF)_z, (dF)_n$  表示，则根据几何关系，知

$$\left. \begin{aligned} (dF)_x &= l(dF)_n \\ (dF)_y &= m(dF)_n \\ (dF)_z &= n(dF)_n \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

因为四面体微元处于平衡状态，所以它也必须满足六个静力平衡条件。由  $\Sigma F_x = 0$  的条件，不难从图 1-6 得到

$$P_{nx}(dF)_n - \sigma_x(dF)_x - \tau_{yx}(dF)_y - \tau_{zx}(dF)_z = 0$$

将式 (1-4) 代入上式，得

$$(P_{nx} - \sigma_x l - \tau_{yx} m - \tau_{zx} n)(dF)_n = 0$$

因为  $(dF)_n \neq 0$ ，所以圆括号中的项必为零。整理后得下列方程的第一式。同理，由  $\Sigma F_y = 0$  和  $\Sigma F_z = 0$  的条件得第二式和第三式。汇集起来，有

$$\left. \begin{aligned} P_{nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ P_{ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ P_{nz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

斜截面一经给定，则方向余弦  $l, m, n$  即为已知，于是可按式 (1-5) 计算该斜截面的三个应力分量  $P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}$ 。这就回答了上面的问题。九个应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$  完全确定了一点的应力状态。

应当指出，讨论中没有用到三个主矩为零的条件。事实上，这三个条件所得的结果就是前面已经讨论过的剪应力互等定理。

还应当指出，在推导式 (1-5) 时，没有考虑体积力。这是因为，体积力与应力分量相比较是高一阶的小量。我们记得，在推导平衡微分方程式 (1-1) 时，体积力参与平衡。那是因为，体积力与应力分量的增量是同阶的。