

00112 000172
1

地球物理勘探专辑

第 6 輯

重力位高次导数

黄緒德 赵雪梅等 译



中国工业出版社

地球物理勘探專輯

第 6 輯

重力位高次導數

黃緒德 趙雪濤等 譯

中國工業出版社

本文集共收集了12篇文章，約可分为三部分。第一部分包括 Th. A. 艾勒金斯 (Elkins)、O. 罗森巴赫 (Rosenbach) 和 R. G. 亨德森、I. 吉茨的关于重力位二次导数法的經典性著作；第二部分是关于选择量板参数、各种公式的比較和精度评价的討論；最后举了一些实例，闡明重力位高次导数的定性和定量解释的概念。

本书可供从事重力勘探的地球物理探矿工作者参考。

地球物理勘探專輯

第 6 輯

重力位高次导数

黃緒德 赵雪涛等 譯

*

地质部地质书刊編輯部編輯 (北京西四羊市大街地质部院内)

中国工业出版社出版 (北京佟麟阁路16号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{25}$ ·印张 $6\frac{18}{25}$ ·字数130,000

1964年12月北京第一版·1964年12月北京第一次印刷

印数0001—2,050·定价(科七) 1.00元

*

統一书号: 15165·3235 (地质-287)

序 言

重力位高次导数在重力勘探中的应用已日益广泛。这种方法的优越性在于能够使較深、較大的地质体的影响减弱,而把勘探目的所要求的較浅、較小的地质体的异常明显地反映出来。因此在石油勘探中,可用以更好地发现和反映局部构造的异常;在金属矿的普查勘探中,对于圈定矿体也有一定作用。但是它能否取得良好的效果,主要决定于高次导数异常的精确程度。这与原始重力图的精度,以及計算时量板参数的选择都有直接关系。本文集收集了十二篇有关重力位高次导数的論文,根据内容大致可以划分为三部分:第一部分包括Th. A. 艾勒金斯、O. 罗森巴赫以及 R. G. 亨德尔森和 I. 吉茨的經典著作;第二部分是关于选择量板参数,各种公式的比較和精度評价的討論;最后举出了一些实例,闡明重力位高次导数的定性和定量解释的概念。我們希望这本小册子能对重力資料的解释工作有所帮助,但由于時間和水平的限制,本文集一定还有不足之处,希望讀者提出意見加以指正。

譯者

目 录

重力解釋的二次导数法.....	Th. A. 艾勒金斯 (1)
关于重力“二次导数”的計算.....	O. 罗森巴赫 (24)
地磁場垂直二次导数的計算.....	R. G. 亨德森, I. 吉茨 (46)
重力勘探中划分区域異常和局部異常的量板研究	И. Г. 克卢申 (57)
重力異常垂直二次导数的計算及其对确定異常质量的应用	М. У. 薩給托夫 (72)
根据布格異常計算重力位的高次导数.....	A. A. 謝尔然特 (89)
各次重力导数在重力資料解釋中的特点.....	O. A. 什万克 (102)
重力異常垂直一次和二次导数的計算.....	O. A. 什万克 (110)
重力異常二次导数計算的合理性	B. И. 阿罗諾夫, P. Ф. 沃洛达爾斯基 (123)
关于計算重力異常二次导数的問題.....	Н. И. 帕甫連科娃 (129)
論地球物理場位的垂直三次导数	Л. Н. 耶兰斯基, С. В. 帕維利耶夫 (143)
重力垂直梯度異常的地质解釋問題.....	И. Г. 克卢申 (156)

重力解释的二次导数法^①

Th. A. 艾勒金斯

二次导数的重要性

本文所讨论的二次导数乃是重力的二次垂直导数，更确切地说，是以重力仪和摆仪所测定的重力的垂直分量的二次垂直导数。若以符号 g 表示重力，并选取座标，使 z 垂直向下，则二次导数即为 $\partial^2 g / \partial z^2$ 。

二次导数用于解释重力资料的重要性在于深度的两次微分往往有助于突出隐藏在巨大的区域背景上的比较小的近地表地质异常。所以二次导数图通常能为油田或金属矿勘探的重要异常类型提供比原有的重力图更为清楚而明确的图景。

正是为了这个原因，早在1935年，当已经能够获得具有足够精度的重力资料时，在Gulf研究所就开始了将二次导数应用于重力资料方面的研究。进行常规的二次导数计算是在1936年开始的。本文并不准备对这项工作做全面的叙述，而只希望结合某些重要油区的实例说明几个有用的基本要点。

基本理论——三度情况

二次导数的基本理论虽然已经发表（彼得斯，1949），但当时它只是作为向下延拓理论的一个副产物出现的。因此看来值得在一个独立的基础上提出二次导数的基本理论，以便那些可能并不希望仅仅了解一般理论的人们加以应用。

① Thomas A. Elkins, "The Second Derivative Method of Gravity Interpretation" *Geophysics* XVI, 1951.

虽然我們只将在重力資料中应用二次导数，但是这里提出的理論却可以用于任何調和函数 $H(x, y, z)$ ，亦即任何在 origin 附近滿足于拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

的連續二次导数，这里如已在 $z=0$ 之平面上有足够資料，我們的任务是在 origin $(0, 0, 0)$ 处求出二次垂直导数的数值 $[\partial^2 H / \partial z^2]_{x=y=z=0}$ 。

讓我們以下列方程式求函数 $\bar{H}(r, z)$ ：

$$\bar{H}(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(r \cos \theta, r \sin \theta, z) d\theta. \quad (2)$$

当 $z=0$ 时， $\bar{H}(r, z)$ 以 $\bar{H}(r)$ 表示之

$$\bar{H}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(r \cos \theta, r \sin \theta, 0) d\theta. \quad (3)$$

$\bar{H}(r)$ 是在 $z=0$ 的平面上，以原点为中心、以 r 为半径的圓周上 $H(x, y, z)$ 的平均值。既然 $H(x, y, z)$ 在 origin 附近为一調和函数，故可在 origin 处展开为一个 x, y, z 变数的收斂冪級数。因此， $\bar{H}(r)$ 亦可展开为 r (接近 $r=0$) 的冪級数，即

$$\bar{H}(r) = a_0 + a_2 r^2 + a_4 r^4 + \dots, \quad (4)$$

式中没有 r 的各奇次項，因为在 (3) 式之积分中，由于 $\sin \theta$ 及 $\cos \theta$ 之周期为 2π ，故 $m+n$ 为奇数之 $\sin^m \theta \cos^n \theta$ 各項积分为零。

我們是用 $\bar{H}(r)$ 来計算 $H(x, y, z)$ 的二次垂直导数的。从 (1) 式，得

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right).$$

将 $x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$ 代入，得

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) H. \quad (5)$$

将 (5) 式两边对 θ 积分 (自 $0 \rightarrow 2\pi$)，則当 $r > 0$ 时，

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} d\theta = - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \int_0^{2\pi} H d\theta - \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} d\theta.$$

最后一项积分为

$$- \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial H}{\partial \theta} \right]_0^{2\pi}.$$

因 $\partial H / \partial \theta$ 为级数，其中 θ 仅以 $\sin^m \theta$ 或 $\cos^n \theta$ 的形式出现 (m, n 均为整数，其中之一可为 0)，故此项为 0。因此，

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} d\theta = - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \int_0^{2\pi} H(r \cos \theta, r \sin \theta, z) d\theta. \quad (6)$$

如令 (6) 中 $z=0$ ，则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2 H(r \cos \theta, r \sin \theta, z)}{\partial z^2} \right]_{z=0} d\theta \\ &= - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \int_0^{2\pi} H(r \cos \theta, r \sin \theta, 0) d\theta \\ &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{H}(r). \end{aligned} \quad (7)$$

若在 (7) 式中令 r 接近于零，并应用 (4) 式，即得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2 H(r \cos \theta, r \sin \theta, z)}{\partial z^2} \right]_{r=z=0} d\theta \\ &= \left[\frac{\partial^2 H(x, y, z)}{\partial z^2} \right]_{x=y=z=0} \\ &= \left[- \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{H}(r) \right]_{r=0} = -4a_2, \end{aligned}$$

故得基本方程：

$$\left[\frac{\partial^2 H(x, y, z)}{\partial z^2} \right]_{x=y=z=0} = -4a_2. \quad (8)$$

应用此式可立即借图解法求出二次导数。因为假若在 $z=0$ 平面上取某一点 P 作为圆心，并在此平面上以 r 为半径之圆周上将 H 之平

均值标绘为縱軸，以 r^2 为橫軸，画一曲綫 $\bar{H}(r^2)$ ，則此曲綫之斜率即为 $\bar{H}$ 对 r^2 之导数。据(4)式可知此位于原点处之曲綫斜率即为 a_2 值，故在求 P 点处之 $\partial^2 H / \partial z^2$ 时，只需将原点处此曲綫之斜率再乘以 -4 。

基本原理——二度情况

在二度体时，势函数不包含某一水平方向之座标，如 y 。因为此时拉普拉斯方程变为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial H}{\partial z^2} = 0,$$

故得出

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \quad (9)$$

因此可以将二次垂直导数作为某一剖面上（其 y 之数值不变）二次水平导数的負值加以計算。虽然看来可以用同样的方法計算二度体和三度体，但是实际上，严格的二度体并不存在，因为一切地质体的长度必然都有限。因此，我們將采用三度体法来計算二度体，并証明可以得出正确結果。这也就是說，我們不用简单二度体剖面的数据，而是假想当整个剖面在 y 軸方向上平行移动时，水平面上完全都布滿着这个剖面上的数值。

既然在二度情形中 $H(x, y, z)$ 被假定为变数 x 与 z 之調和函数，而与 y 无关，則在原点附近的 x 很小的范围内可有下列展开式：

$$H(x, y, 0) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \quad (10)$$

此式中无 y 項，因其为二度体之情况。繼之由(9)式有

$$b_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right]_{x=y=z=0} = - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right]_{x=y=z=0}. \quad (11)$$

代入 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 后，(10)式即变为

$$H(x, y, z) = b_0 + b_1 r \cos \theta + b_2 r^2 \cos^2 \theta + \dots$$

而(3)式之积分即为：

$$\bar{H}(r) = b_0 + \frac{b_2 r^2}{2} + \dots \quad (12)$$

即得径向展开式 $\bar{H}(r)$ 。按照三度理论的基本方程(8)，原点处之二次导数可由取 $\bar{H}(r)$ 式中 r^2 之系数乘以-4而得出。但此量值应等于 $-4(b_2/2) = -2b_2$ ，由(11)式可知此值等于 $[\partial^2 H / \partial z^2]_{x=y=z=0}$ 系正确无误，因此只需对二度体数据机械地施以三度计算即可得出正确之结果。可见，三度体法用于二度是可以的。

圆周平均重力值

由于计算重力二次导数的图解法是以(4)式所表示的圆周平均重力为依据的，因此应当首先对二度及三度体质量异常的基本类型，即无限水平圆柱体及球体，分别进行定量研究。

无限水平圆柱体的圆周平均重力

令 d 为圆柱体轴心深度， g_m 为极大重力值。假定 O 为欲求之圆周平均重力值之点。当 O 正位于圆柱轴之上方时，以图1之符号表示，圆周平均重力值 $\bar{g}(r)$ 即为：

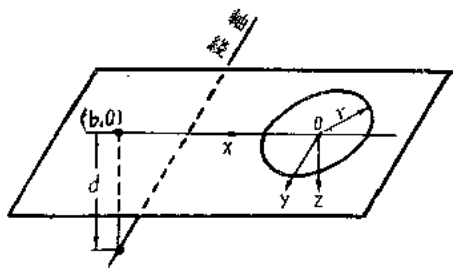


图1 无限水平圆柱体示意图

$$\begin{aligned}\bar{g}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 g_m d\theta}{x^2 + d^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 g_m d\theta}{d^2 + r^2 \cos^2 \theta} = \\ &= \frac{g_m}{\sqrt{1 + (r/d)^2}}.\end{aligned}$$

在图2中 $b=0$ 之曲线即根据此方程绘出。

若 O 不在轴心上，假设轴綫之投影通过 $(b, 0)$ 点，则：

$$\begin{aligned}\bar{g}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 g_m d\theta}{d^2 + b^2 - 2br \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta} = \\ &= \frac{g_m \sqrt{1 + k^2 y_1}}{\sqrt{(1 + k^2 + m^2)^2 - 4m^2 k^2}},\end{aligned}$$

其中, $k=r/d$, $m=b/d$, 而 y_1 则是下式中 μ 的正根:

$$k^2 \mu^2 - (k^2 - m^2 - 1) \mu - 1 = 0.$$

图 2 中 $b=0.4d$ 及 $b=d$ 之各曲线均根据此方程式绘出。

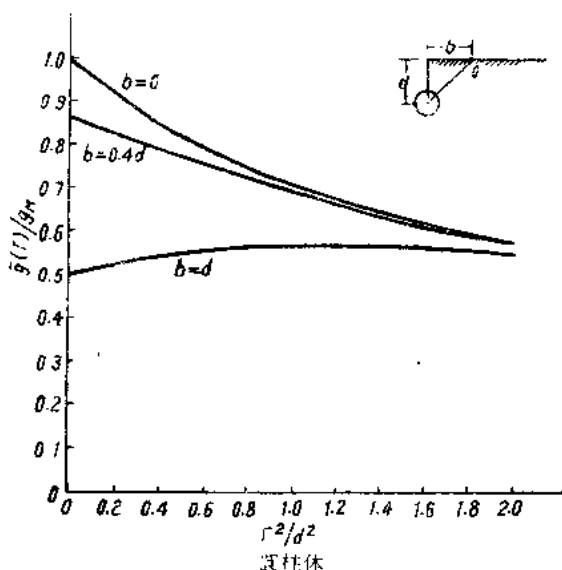


图 2 水平无限圆柱体之圆周平均重力 $\bar{g}(r)$ 剖面。
平均值均在（水平面上）以 O 为中心、 r 为半径之圆周
附近； g_m 为重力极大值

球体的圆周平均重力

令 d 为球心之深度， g_m 为重力极大值，若 O 点正位于球心 P 上方，
则：

$$\bar{g}(r) = \frac{d^3 g_m}{(r^2 + d^2)^{3/2}}.$$

图 3 中之 $b=0$ 曲线系由此式绘出。

· 假若 O 点不在球心上方，则如图 4 所示取坐标系，使 P 之投影为 $(0, b)$ ，则：

$$\bar{g}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^3 g_m d\theta}{[\bar{d}^2 + r^2 \cos^2 \theta + (r \sin \theta - b)^2]^{3/2}} =$$

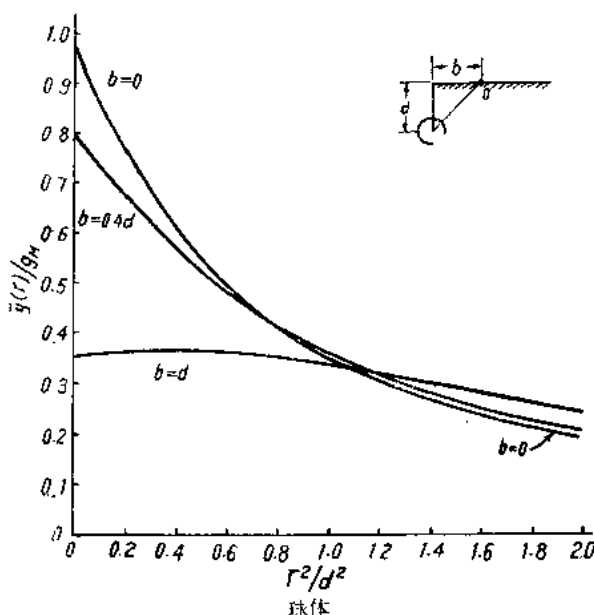


图 3 球体之圆周平均重力剖面。平均值均在（水平面上）以 O 为中心、以 r 为半径之圆周附近； g_m 为重力极大值

$$= \frac{2d^3 g_m E\left(\sqrt{\frac{4br}{d^2 + (r-b)^2}}\right)}{\pi[d^2 + (r-b)^2][d^2 + (r+b)^2]^{1/2}}$$

式中 $E(k)$ 为第二类椭圆全积分，其模数即为 k 。图 3 中之 $b=0.4d$ 及 $b=d$ 曲线即根据此方程式绘出。

图解法中误差的原因

现在，我们将用这些平均值曲线来讨论用图解法计算二次导数的两个引起误差的原因。

第一个原因是由于在实际工作中应用了网格排列的重力值来确定平均值曲线，这样做时，往往还结合使用一种带有按网格打成洞眼的

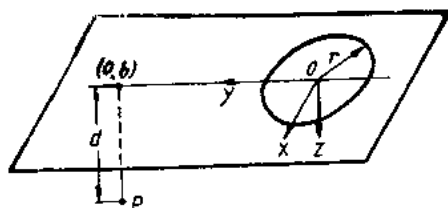


图 4 球体示意图

量板。用这种方法只能在我們欲求的曲綫上得到几个精度不高的孤立的点，因为用这种量板在所用各半径的圓周上讀出的点数是不多的。这种誤差可以用增加圈数及各圈上点数的办法来使之降低。为了以图解的方式說明可能会因使用某种网格系統而产生的誤差，图 5 中引用了图 2 的一部分，其中仍然是以网格方式算出之平均值。圓柱之重力最大值为 1.5 毫伽，圓柱的軸心深度为 15,000 呎。各平均值均用四个对称排列的点。两条平均值曲綫是計算出来的，一个采用精度为 0.1 毫伽的重力值，另一个則采用精度达 0.01 毫伽的数值。同一图中还同样根据图 3 绘出重力极大值为 1.5 毫伽、距球心深 15,000 呎的球体的类似曲綫。可以看出，利用精度达 0.01 毫伽的重力資料（其最大可能誤差为极大值之 0.3%）算得之平均值是接近于真值的；而利用精度达 0.1 毫伽的重力数据（其最大可能誤差为极大值之 3%）算出之平均值則往往不然。

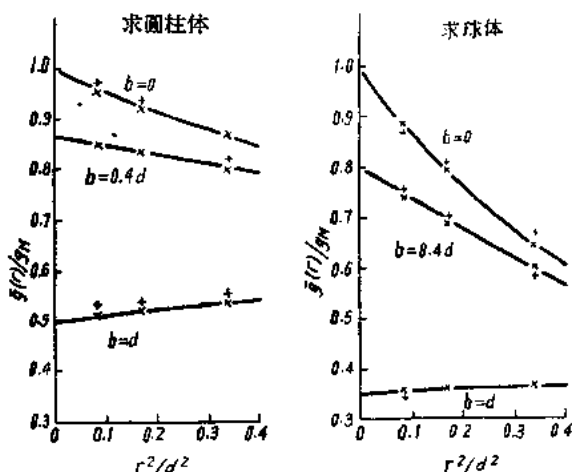


图 5 应用网格量板求得之平均径向重力值（引自图 2 及 3，分别标繪于剖面上以便比較）
“+”表示取自精度达 0.1 毫伽之网格；
“x”表示取自精度达 0.01 毫伽之网格

另一种誤差之所以发生是因为平均值曲綫是非綫性的，这是比較麻煩的。如果平均径向曲綫（对于 r^2 ）在 origin 附近的部分十分接近于

直綫，則即可容易地作出正确的切綫。然而即使数据极为精确，而且网格亦很好，曲綫的这一部分也仍旧可能是肯定弯曲的（如图3中 $b=d$ 的曲綫）。也就是說，即使理論曲綫也只有在距离原点很小一段距离內才是直綫。遺憾的是，种种經濟上的考虑以及重力測量的“干扰水平”均規定測点的起碼間距，使得甚至在距原点几乎为最小的距离內也难以将此曲綫确定。因此这显然是一个引起誤差的根本性的原因。

研究这类誤差时，应用了上述研究网格影响的同一球体实例。球心正上方之点即为曾在該点附近計算平均值之点。在最大限度地减小非綫性影响时，仅用了第一圈。根据（8）式，縱座标等于原点重力值与第一圈平均值二者之差的四倍，应当近似于以某一单位表示之二次导数值，至于何种单位在这里恰好是无足輕重的。該单位可能与該圈半径的平方成反比，但是所有具有相同半径的縱座标都是可以比較的，这对我們目前所要解决的問題來說，已經足够了。这些縱座标即将由下表列出。半径距离均采用厘米比例尺，1吋=4,000瓦拉^①；球

圈 半 径 (厘米)	縱座标 (单位为0.1毫伽)			
	精 确 的 理 論 值	給 出 精 确 $\partial^2 g / \partial z^2$ 的数值	用网格求出之值	
			g 值精度达0.1毫伽	g 值精度达0.01毫伽
0.5	1.86	1.91	0	2.0
1	6.91	7.65	8	6.8
$\sqrt{2}$	12.60	15.31	12	12.4
2	21.33	30.62	20	21.2

心深度按此比例尺应为3.429厘米。将表中之2、3行作一比較显然可見非綫性的影响。这里也可看出对精度为0.01毫伽作网格計算之优越性。

图解法之等效数字系数

以数字系数方法計算二次导数的基本观念早已发表（彼得斯，

① 瓦拉 (vara) 系西班牙长度单位，在当地約等于33.38吋，而在其它如巴西、葡萄牙等地均有不同之比值。

1949)。这里将討論方法所固有的多变性。我們所以称之为因解法之等效方法，是因为对任何可能用来绘出切綫或其它最为切合的直綫几何作图法，都可以导出一个解析的公式。因此，这种等效系数即具备便于进行簡便之日常計算、而且避免个人偏見的种种优点。

求(4)式中之 a_2 值，亦即(8)式的二次导数值的数字系数法，可以通过选取足够小的 r 值而有所改善，因而由(4)式中之 n 項表示 $H(r)$ 有足够精度。这样，即有 n 个未知系数 a_0, a_2 等。应用 n 或更多个不同的 r 值以及相应的 $\overline{H}(r)$ 数值，即得出整套求 a_2 的联立方程式。当方程数多于未知数时，就用最小二乘法或其它整理方法。

如果有了規則格距数值(s)的网格时，最方便的办法是使用一张带有洞眼的量板，在中央小孔讀出 $\overline{H}(0)$ ，在格距为 s 及 $s\sqrt{2}$ 处各讀4个数，并在 $s\sqrt{5}$ 格距处讀8个数。然后，利用在 s 及 $s\sqrt{2}$ 处4个讀数总和分別作为 $4\overline{H}(s)=H'(s)$ 及 $4\overline{H}(s\sqrt{2})=H'(s\sqrt{2})$ 的近似值，在 $s\sqrt{5}$ 的8个讀数和作为 $8\overline{H}(s\sqrt{5})=H'(s\sqrt{5})$ 的近似。如网格数值图之比例尺为 $1:k$ ，网格距为 r 厘米(按格距实际測量)，則 $s=kr$ 。

此时，我們只保留(4)式中的首二項，将所有其它各項略去，并对在因解法中以不同绘制平均径向曲綫的切綫的方法为根据的三个系数組，进行計算。

首先試求出通过原点的“最佳”直綫，此綫通过 $s^2, 2s^2, 5s^2$ 三点； a_0 則已确定且等于 $\overline{H}(0)$ ，因而条件方程即为：

$$\begin{cases} a_2 s^2 = \overline{H}(s) - \overline{H}(0), \\ 2a_2 s^2 = \overline{H}(s\sqrt{2}) - \overline{H}(0), \\ 5a_2 s^2 = \overline{H}(s\sqrt{5}) - \overline{H}(0). \end{cases}$$

用最小二乘法，可得

$$\frac{\partial^2 g}{\partial a_2^2} = -4a_2 = \frac{1}{60k^2 r^2} [64\overline{H}(0) - 2H'(s) - 4H'(s\sqrt{2}) - 5H'(s\sqrt{5})]. \quad (13)$$

其次，我們不对原点过分“偏爱”而将它与其它点等同看待，亦即通过原点以及位于 $s^2, 2s^2, 5s^2$ 这三个計算点将“最佳”直綫确定下

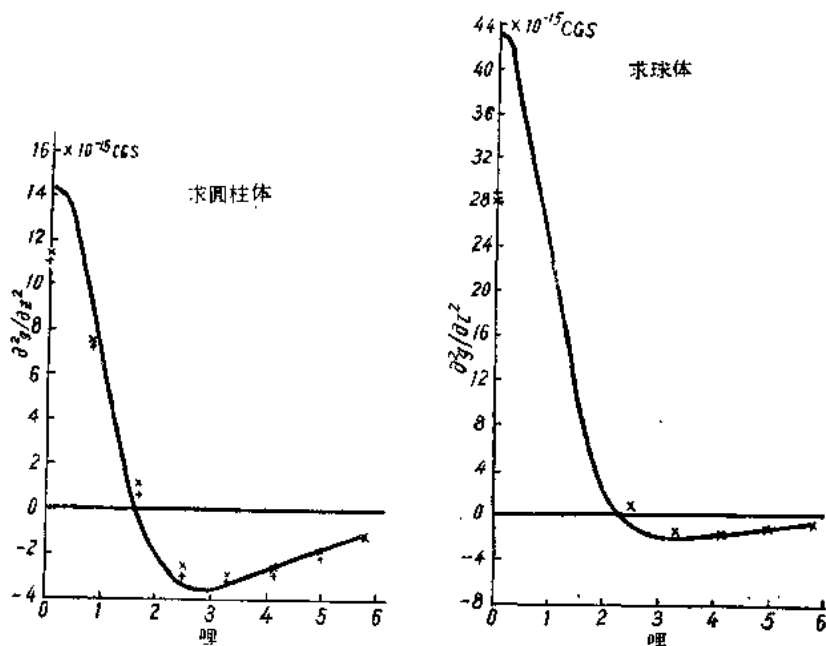


图 6 根据简单几何异常体的重力值以不同公式
算得之二次导数对比图

+ 根据 (13) 式算出之值;
× 根据 (15) 式算出之值;
——理论曲线

来。用最小二乘法，求出

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -4a_2 = \frac{1}{28k^2 r^2} [16\overline{H}(0) + 2H'(s) - 3H'(s\sqrt{5})], \quad (14)$$

既然以图解法求曲线斜率时常忽略 $5s^2$ 处的点，则最后一点的权为其它点的权的 $1/2$ ，再次计算，结果为

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -4a_2 = \frac{1}{62k^2 r^2} [44\overline{H}(0) + 4H'(s) - 3H'(s\sqrt{2}) - 6H'(s\sqrt{5})], \quad (15)$$

上面已經說明，系數組可以做出任何數目，其相對優點只有通過試驗比較來評定。試驗的方法有兩種：第一種試驗是根據具有數學精度的數據對簡單的異常進行試驗。這種異常理論上準確的二次導數值是有可能加以檢查的。這樣，就能夠發現公式推导中包含的近似值以及網格的应用是否會引起太大的誤差。第二種試驗应用于實測重力資料來查明實際數據中的誤差是否會引起過于顯著的干擾。

對這裡發展的三組系數均施行了上述兩種試驗。圖 6 即表示對球體及無限水平圓柱體以二組系數進行的理論試驗的結果，兩種情況的重力極大值均為 1.5 毫伽，面心深度均為 15,000 呎。应用之重力數據具有 0.01 毫伽的精度。根據在這些理論異常上的試驗表明上述三組系數同樣良好。對實際數據所做之試驗曾與同一測區以圖解法求出之數值比較。根據式 (14) 及 (15) 的系數組進行計算實際上得出了同樣的圖形，而且與圖解法的結果十分接近，但 (13) 式的結果卻較差。

球 體

現在我們提出幾種簡單異常類型的二次導數影響的公式及曲綫。其目的是幫助解釋二次導數圖的實際資料。首先考慮的異常是球體。

微分位函數，不難求出球體（質量為 m ，中心點為 P ）在原點 $O(0,0,0)$ 的二次導數公式：

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 3\tau m z(2z^2 - 3x^2 - 3y^2)/(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}. \quad (16)$$

式中 τ 為重力常數。極值（即極大與極小值）在 $\rho=0$ 及 $\rho=\pm(2\sqrt{3}/3)z$ 處，此處 ρ 表示沿地表之徑向座標，故 $\rho^2=x^2+y^2$ 。在 $\rho=0$ 點之二次導數為極大（絕對）值，並等於 $6\tau m/z^4$ 。其它二極值為 $-6\tau m[7/3]^{1/2}/z^4$ 。圖 7 表示由 (16) 式作出之球體二次導數。

根據公式 (16)，當 $z=(\sqrt{6}/2)\rho$ 時， $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}=0$ 。故得

$$z=(\sqrt{6}/2)\rho_0=1.225\rho_0. \quad (17)$$

式中 ρ_0 為自球心投影在地面上的距離，或二次導數極大值至二次導數零點等值綫的距離。設 G_m 為恰好位于球體中心上方之二次導數極大