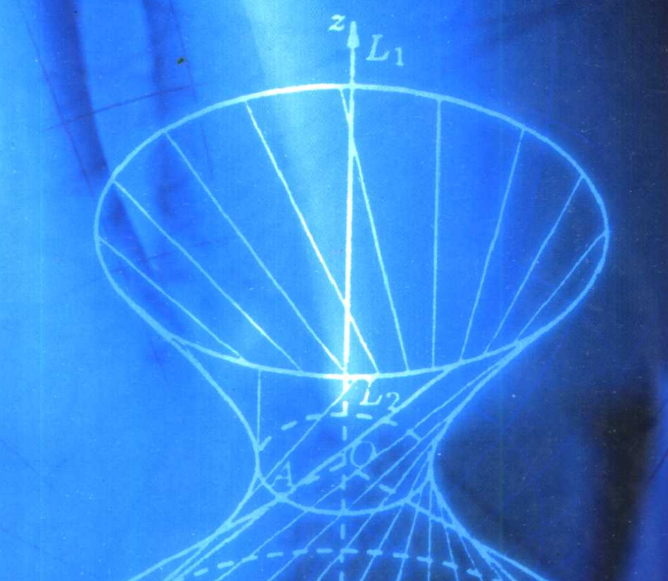
高等代数与解析几何（上）

Higher Algebra and Analytic Geometry (I)

陈志杰　主编



CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

高等学校教材

高等代数与解析几何(上)

Higher Algebra and Analytic Geometry (I)

主 编 陈志杰

编 者 陈志杰 韩士安 瞿森荣

温玉亮 陈咸平

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等代数与解析几何 上册 / 陈志杰 主编. —北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，2000.6

ISBN 7-04-007892-9

I.高… II.陈… III. ①高等代数 ②解析几何 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 16600 号

责任编辑：徐 可 **封面设计**：王凌波 **责任印制**：陈伟光

高等代数与解析几何 （上册）

陈志杰 韩士安 瞿森荣 温玉亮 陈咸平 编

出版发行	高等教育出版社 施普林格出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电 话	010-64054588	**传 真**	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京民族印刷厂		
开 本	880×1230 1/32	**版 次**	2000 年 6 月第 1 版
印 张	13	**印 次**	2000 年 6 月第 1 次印刷
字 数	370 000	**定 价**	19.00 元

序

解析几何和高等代数，是大学数学的两门基础课．从逻辑结构来说它们有不少相似或平行之处，因此许多人想把它们合并起来以节省课时．但实行起来几何往往蜕化成几个推论或例题，被代数“吃掉”了．因此我很关注本书的指导思想．

坐标法架起了几何与代数之间的桥梁，把几何的观念与代数的方法结合起来．陈志杰教授根据他研究代数几何学的深切体会，认为“代数为几何提供研究方法，几何为代数提供直观背景”，甚至“代数要在几何中寻找直观”，以强调几何对代数发展的促进作用．他主张把高等代数与解析几何合并成一门课，是为了“逐步培养学生运用几何与代数相结合的方法分析问题和解决问题的能力”，把重点放在结合两字上．

人们常说：数学是演绎的科学．的确，证明是检验数学真理的标准．然而形式逻辑不见得是人类最擅长的思维方式．形象思维，包括对空间关系的理解力和想象力，倒是与生俱来的．正像图形界面使人能与计算机自如地沟通一样，几何的看法常能使复杂的数学结构变得可以触摸或者一目了然．

几何直觉把人的左脑和右脑的智力一齐动员起来，是发现和把握数学真理的窗户. 无论是研究数学的理论还是应用，许多人都有这样的体验.

但是好的几何直观不是天生的，需要养成和磨炼，甚至要摸索. 传统的解析几何课和高等代数课着眼于各自知识的传授，我觉得成功的合并应该是相辅相成的融合，要着眼于培养对高维空间的直观理解. 这本来是现代化的线性代数课的应有之义，也是提高数学素养的重要方面，需要一个潜移默化的过程，也需要老师的循循善诱.

教学改革是功德无量的大事，呼唤有经验的数学家积极投入. 这本教材不但有很好的宗旨，内容有创新，还添加了上机实验、网上游戏、历史寻根等新鲜栏目以及聊天式的评注，别开生面. 其中凝结了编者们充沛的教学热情和连年坚持不懈的心血. 我祝愿它在教学实践中经受锤炼，取得成功.

姜伯驹

2000 年 4 月

编者的话

线性代数是高等代数的主要内容，具有深刻的几何背景．而解析几何则是用代数方法研究空间的几何问题．因此把高等代数与解析几何合并成一门课具有其内在的合理性．从历史上看，代数与几何的发展从来就是互相联系、互相促进的．它们的关系可以归纳为“代数为几何提供研究方法，几何为代数提供直观背景”这两句话．不少例子都说明一旦抽象的代数概念找到了正确的几何直观，就能对它的发展提供新的动力甚至诞生新的研究领域．通过本课程的教学将逐步培养学生运用几何与代数相结合的方法分析问题和解决问题的能力．

我们想使本书适合不同层次的学生，在教学中具有较大的选择余地，因此把一些非基本的内容用打星号的形式放在每章的最后．这些内容不教不会影响后面的学习．而对于有可能继续深造的学生，最好用三学期的时间学完全部内容．

本书的基本内容与原高等代数及解析几何两门课的主要内容大致相当．在选学内容方面，对多元多项式有所加强，增加了结式及吴文俊消元法解多项式方程组的内容，还介绍了吴文俊的初等几何定理的机械化证明理论．我们认为对于师范院校的学生，了解这个理论是有益的，在有计算机配合的条件下，这部分内容的学习也是有趣的，可以作为课外活动的一个课题．最后一章介绍了若尔当典范形的应用．以往的高等代数课往往因课时制约而不得不在引出若尔当典范形后草草收场．学生因没有应用的机会，反而会问学了若尔当典范形有什么用处．因此我们觉得有条件的话应该选讲最后一章的部分内容，这对有志深造的学生更

为重要. 此外本书特别重视培养学生的几何直观, 着重介绍了立体图以及用数学软件 (Maple) 作图. 在课文中也尽量多配插图, 许多插图都是严格按正投影原理绘制的. 由于课时的限制, 本书完全不涉及射影几何, 也不引入仿射空间的概念, 而是用线性流形代替仿射子空间. 并不是说这些概念不重要, 只是留给高等几何课去讲授.

本书的另一个特色是与课文内容同步介绍符号计算软件Maple(本书所指的 Maple 均是指 Maple 公司推出的第五版 Maple V) 的用法, 可供有条件的学校试用. 这对几何定理的机械化证明特别重要, 因为只有计算机软件的配合才能使学生自己进行实验, 从而发生兴趣. 否则面对繁杂的多项式方程组, 很少有人会愿意尝试手工求解.

以下是本书体例的几个说明:

1. 本书的正文中夹有用小字排印的"评注", 就是对正文内容的评论与注解. 在这里编者可以比较自由地发表议论, 讲述某个概念的背景、今后的发展或者如何以更高的观点来看待当前遇到的概念等, 而不必顾忌严格性或循序渐进等. 这些内容不是必须弄懂的. 因此一般的读者大可一览而过, 读懂多少算多少, 不必为它花费太多的精力. 你现在看不懂, 等你将来学得多了, 再回过头来看, 自然能融会贯通.

2. 为了帮助学生学习专业外语, 也为了学习数学软件时理解或记忆命令的方便, 我们对用到的希腊字母以及重要的数学名词加注了英文名. 本书使用的术语均以 1993 年全国自然科学名词审定委员会公布的数学名词为依据.

3. 本书还设有"数学寻根"栏目, 介绍有关的数学历史, 尤其是我国古代科学家的贡献. 使学生开阔眼界, 提高素养.

4. 为了便于学习和使用数学软件 Maple, 上册有附录专门介绍 Maple 的入门知识, 还有本书中出现的 Maple 函数的索引. 读了这个附录并辅以适当的上机实习机会后, 读者应能看懂各章节后面的"上机实

验"并能自己上机练习. 我们想通过与课文内容同步的 Maple 相关命令的介绍, 使得读者最终能了解并掌握 Maple 中与本课程有关的命令. 这不失为一种学习数学软件的有效途径. 也方便今后需要时查阅. 此外, 肖刚教授开发的"网上对谈式数学服务站"(简称 WIMS) 已开始在国内推广. 它提供的数学练习实际上就是一种游戏, 但又包含了数学原理, 寓教于乐, 十分吸引人. 教师还能利用它开设虚拟班级, 向学生布置网上作业. 试用下来深受学生欢迎. 凡是有局域网的单位就可以在 LINUX 服务器上安装 WIMS (它与 LINUX 一样, 可以自由使用). 只要能用浏览器上网, 不需学习就能享受 WIMS 的服务. 我们在有关章节后面附了"WIMS 网上游戏"栏目, 向有条件上网的读者推荐有关的练习. 国内已开放的 WIMS 网址是: `http://wims.math.ecnu.edu.cn`, 也可通过华东师范大学数学系主页 (`http://www.math.ecnu.edu.cn`) 的链接访问 WIMS. 今后我们还会开设站点用于交流本书的教学经验以及 Maple 与 WIMS 的应用资料. 欢迎广大教师和读者经常去查看华东师范大学数学系的主页. 对 Maple 和 WIMS 有兴趣的读者也可与编者直接联系 (e-mail 地址: `zjchen@math.ecnu.edu.cn`).

5. 本书用符号 $\stackrel{\text{def}}{=}$ 表示"定义为", 符号 □ 是结束符, 表示证明或解的结束.

6. 章节或段落前面的星号表示这部分内容是选学的. 习题前面的星号则提示本题较难, 供选题时参考.

7. 本书使用天元软件配合 $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX 排版, 数学符号及公式均按国际数学出版物通用的标准. 如矩阵与用希腊字母表示的向量均不使用黑体 (可能会与国内有的出版物不同), 相信不会影响读者对本书的理解.

本书由陈志杰教授主编. 正文均由陈志杰教授编写. 代数习题由韩士安、瞿森荣老师编写, 几何习题由温玉亮、陈咸平老师编写, 他们还参

加大纲的讨论、正文的校阅以及初稿的试教. 在编写与修改过程中周青教授、沈纯理教授和谈胜利教授多次参加讨论并提出宝贵意见. 教育部高等学校数学与力学教学指导委员会主任委员姜伯驹教授关于数学教育改革所发表的意见是我们尝试把高等代数与解析几何合并成一门课的原动力. 以后在教改试验与编写教材的过程中又不断得到他以及教学指导委员会的指导和鼓励. 所以本书应被视为数学与力学教学指导委员会的工作成果之一. 数学教育专家张奠宙教授对本书的编写也提供了具体的指导. 华东师范大学数学系对本教材的编写和试用十分重视, 并从各方面加以支持. 福建师范大学数学系辛林、吴健文、龚家骧、林新棋老师参加了本书初稿的试教, 并提出了宝贵的修改意见. 本书的审稿人是北京大学数学学院代数与几何教研室的方新贵和刘连生先生, 他们在认真审读书稿后提出了不少中肯的修改意见. 在此一并表示感谢. 此外本书写作过程中参考了许多已有的教材和书籍, 获益良多, 列举在后, 以表谢意.

限于编者水平, 书中定有许多不妥之处, 敬请读者指正.

编者

2000 年 4 月

目　录

第一章　向量代数

本章的主要内容是向量及其代数运算. 我们在力学和物理中已经遇到过既有大小又有方向的量, 如力、速度等. 现在我们面临的问题是从数学的观点研究向量的特性以及它的各种运算. 利用向量往往能使某些几何问题更简捷地得到解决. 向量方法也是力学、物理学和工程技术中常用的有力工具. 向量无疑是一个几何概念, 但是在空间中建立了坐标系后, 向量与它的坐标间有了一个一一对应的关系. 这样就使得许多涉及向量的几何问题转换成了它的坐标 (数组) 间的代数问题, 为应用代数方法解决几何问题提供了桥梁. 本章的有些例题与习题就是展示向量代数方法在立体几何中的应用的. 反之, 取定了原点和坐标系后, 一个二元或三元的数组又能被看成以原点为始点的向量. 例如复数就可被看成平面向量. 这样又使得许多抽象的代数概念获得了具体的几何背景. 数 (或公式) 与图形的结合及转化始终是数学发展的有力手段. 于是 n 个数的数组被看成了虚构的高维空间中的向量. 现实空间中向量的各种运算被推广到了高维数组构成的"空间", 抽象的数组被赋予了直观的形象. 我们这门课程把高等代数与解析几何揉合在一起, 既是为了给几何问题提供代数工具, 也是为了给抽象的代数概念提供几何的背景. 希望同学们在学习时对于形数结合给予更多的重视. 并把本章学习的重点放在对各种向量运算以及向量的线性相关性的直观理解上. 为以后的代数化作准备.

§1　向量的线性运算

我们在日常生活中会遇到许多不能仅用数字来描述的量. 例如为了反映机场附近空域中的飞机的位置, 仅仅知道每架飞机与塔台的距离

显然是不够的. 我们还需要知道每架飞机的方位 (如图 1–1 所示). 为了估计每架飞机的动向, 只知道飞机速度的大小也是不够的, 一定要知道飞机速度的方向. 像这类既有大小又有方向的量称为**向量** (*vector*). 物理中的力、位移、速度、加速度等都是向量. 向量可以用符号 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\cdots$ 表示.

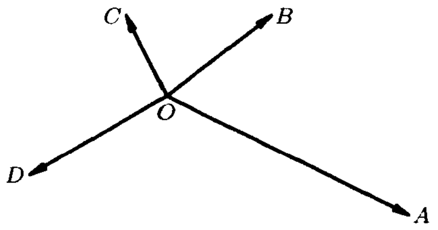


图 1–1

对于空间中的一条直线段 AB, 规定两个端点中的一个 (A) 为始点, 另一个端点 (B) 为终点, 就得到一个有向线段, 记为 $\overrightarrow{AB}$. 一个向量 $\vec{a}$ 可以用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示. 有向线段的始点 A 就是向量的始点, 有向线段的终点 B 则是向量的终点 (图 1–2).

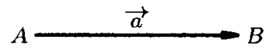


图 1–2

在空间中取定单位长度后, 线段 AB 的长度称为向量 $\overrightarrow{AB}$ (或 $\vec{a}$) 的**长度或模**, 记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$. 规定长度相等并且方向相同的有向线段表示同一个向量, 如图 1–3 的平行四边形中的 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{a}$.

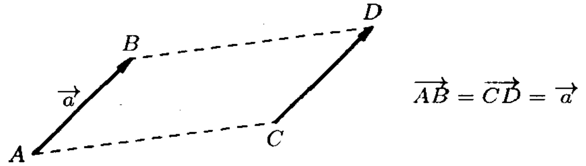


图 1–3

评注 1.1 向量与有向线段的区别在于我们只对向量所代表的大小(即长度)和方向感兴趣，也就是只对终点关于始点的相对位置感兴趣，而不去考虑这两个点的具体位置. 因此一个向量可以用无限多个有向线段来表示，也就是说向量可以在空间自由地平行移动.

长度为0的向量称为**零向量**(*zero vector*)，记为 $\overrightarrow{0}$ 或0. 零向量就是始点与终点重合的向量. 零向量所代表的方向是不确定的. 我们约定：零向量可以指向任何一个方向.

评注 1.2 我们以后往往用0表示零向量. 严格地说0代表的是实数零，与零向量 $\overrightarrow{0}$ 不同. 但是在高等数学中符号0可被用来代表各种与数零类似的数学对象. 读者要学会根据上下文确定符号0代表的数学对象是什么.

与向量 $\overrightarrow{a}$ 大小相同但方向相反的向量称为向量 $\overrightarrow{a}$ 的**负向量**，记为 $-\overrightarrow{a}$. 把一个向量的始点与终点互换就得到了原向量的负向量. 即 $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ (图1-4). 从负向量的定义可以知道：

$$-(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{a}.$$

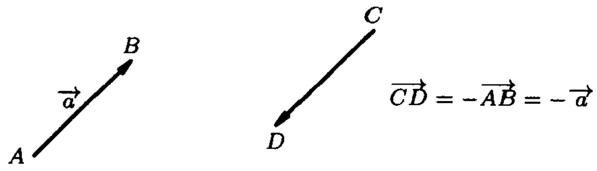


图1-4

向量的加法 (*addition*)

两个向量 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 相加，可以作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\overrightarrow{a}$，再作有向线段 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\overrightarrow{b}$，则有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\overrightarrow{c}$ 就是 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 之和，记为 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ (图1-5). 这种求两个向量之和的方法称为向量相加的**三角形法则**. 向量相加的三角形法则是合乎情理的：一个物体先从 A 点移

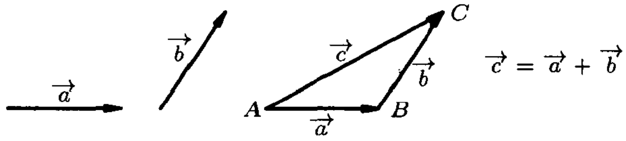


图 1-5

到 B 点, 然后再从 B 点移到 C 点, 这两个运动合成的结果就是物体从 A 点移到了 C 点.

由于向量在平移下保持不变, 因此用**平行四边形法则**同样可以得到两个向量的和 (图 1-6).

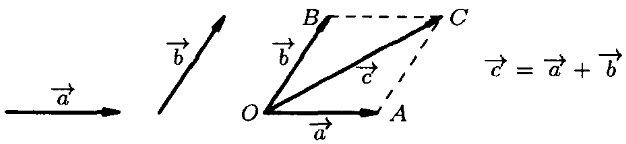


图 1-6

向量加法具有下述性质: 对任意的向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$, 有

(A1)[†] 结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

(A2) 交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

(A3) $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;

(A4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

证明: (A1) 在图 1-7 中作

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\qquad \overrightarrow{AB}=\vec{b},\qquad \overrightarrow{BC}=\vec{c}.$$

则根据向量相加的三角形法则, 有

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{c}.$$

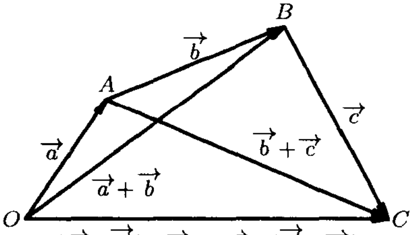
因此

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

(A2) 在图 1-8 中, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. 根据三角形法则有

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{a}.$$

† 这里把向量加法的第 1 条性质称为 A1 是来源于 addition 的第一个字母 A, 既便于理解, 又易于记忆. 本书以后性质的序列号取法与此类同.



$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$

图 1-7

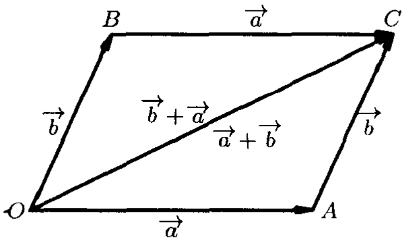


图 1-8

(A3) 作 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OO}=\overrightarrow{0}$. 则

$$\overrightarrow{0}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}.$$

(A4) 作 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, 则 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{a}$. 所以

$$\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}.\quad\square$$

评注 1.3 请读者注意, 我们在初等数学里遇到的加法都是数与数相加, 结合律与交换律被认为是当然的运算性质而不会想到需要证明它们. 但进入高等数学阶段后, 我们会遇到许多不是数的数学对象, 而这些数学对象又有许多类似于数的性质, 例如它们也可以相加或相乘. 不过这些新定义的加法或乘法是否仍然满足结合律或交换律就不能断定了, 需要我们去一一验证. 像向量就是一种新的数学对象 (可能有的读者在中学里已经学过), 它的加法是新定义的, 因此需要验证向量的加法是否满足结合律与交换律. 这里得到的结果是令人满意的: 向量加法既满足结合律, 也满足交换律. 以后我们会知道矩阵的乘法不满足交换律. 将来读者慢慢会理解为什么这些看来显而易见的事实也需要加以证明.

由于向量的加法满足结合律与交换律, 所以三个向量相加, 不论它们的结合顺序或先后顺序如何变化, 它们的和总是相同的. 因此可以去掉括号, 简单地写成

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$$

而不会产生任何误解. 推广到任意有限多个向量 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ 的和, 就

可以记为

$$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\cdots+\overrightarrow{a_n}.$$

两个向量相加的三角形法则可以被推广到 n 个向量相加的**多边形法则**: 只要把代表这 n 个向量的有向线段首尾相接, 以第一个向量的始点作为始点, 以最后一个向量的终点作为终点的有向线段就是这 n 个向量之和 (图 1-9).

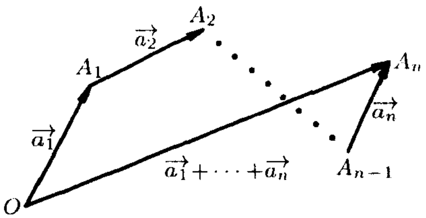


图 1-9

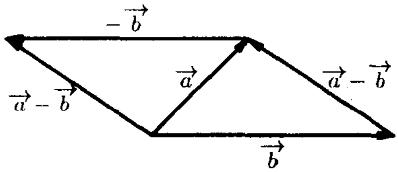


图 1-10

利用向量的负向量, 可以定义向量的**减法**为: $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})$. 其几何意义如图 1-10 所示.

例 1.1 设 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{c}$ 是互不共线的 3 个向量. 试证明顺次将它们的终点与始点相连能构成一个三角形的充分必要条件是

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=0.$$

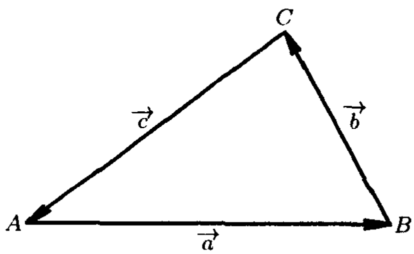


图 1-11

证明: (⇒) 设这 3 个向量顺次将它们的终点与始点相连能构成一个三角形 ABC (见图 1-11), 也就是说

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{b}=\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{c}=\overrightarrow{CA}.$$