工程数学

Youdian Gaodeng Xuexiao Zhuanke Jiaocai

邮电高等学校专科教材

魏竹轩　郭俊杰　刘铁峰　编

人民邮电出版社

邮电高等学校专科教材

工 程 数 学

魏竹轩　郭俊杰　刘铁峰 编

人 民 邮 电 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

工程数学/魏竹轩等编．-北京：人民邮电出版社，1995.10

邮电高等专科教材

ISBN 7-115-05641-2

Ⅰ.工… Ⅱ.魏… Ⅲ.工程数学-高等学校-教材Ⅳ.TB11

内 容 提 要

本书是由邮电部高校公共课教学指导委员会推荐的邮电高等学校专科教材。

全书共分三篇。第一篇为线性代数，内容包括行列式、矩阵及矩阵的秩、n 维向量及线性方程组、相似矩阵与二次型。第二篇为概率论，内容包括随机事件的概率、条件概率和事件的相互独立性、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理。第三篇为复变函数与拉氏变换，内容包括复数、解析函数、复变函数的积分、泰勒级数和罗朗级数、留数、拉普拉斯变换。

本书也可作有关院校的教材。

邮电高等学校专科教材

工 程 数 学

魏竹轩　郭俊杰　刘铁峰　编

*

人 民 邮 电 出 版 社 出 版

北京东长安街27号

人民邮电出版社河北印刷厂印刷

新 华 书 店 北 京 发 行 所

各 地 新 华 书 店

开本：850×1168 1/32　　1995年10月第 一 版

印张：12　　　　　　　1995年10月第1次印刷

字数：317 千字　　　　印　数：1—1 200 册

ISBN 7-115-05641-2/G·326

定价：12.00 元

前　言

这本工程数学教材，是我们在长春邮电学院长期从事数学课教学的基础上，参照高等学校工科数学教材编审委员会审定的《工程数学教学大纲》，根据专科教学的实际需要编写而成的．内容包括线性代数、概率论、复变函数和拉普拉斯变换，各章后配有适量的习题，书末附有习题答案，可以作为高等工科院校专科工程数学课程的教材，也可以作为工程技术人员的自学教材或参考书．

本书第一篇线性代数部分由刘铁峰讲师编写，第二篇概率论部分由郭俊杰副教授编写，第三篇复变函数和拉普拉斯变换部分由魏竹轩副教授编写．

在编写过程中，我们力求做到：概念清楚、重点突出、思路清晰、逻辑严谨、富有启发性、便于自学、注重培养学生的运算能力、分析问题和解决问题的能力．

邮电部公共课教学指导委员会委员南京邮电学院叶章剑教授，北京邮电学院赵启松副教授和石家庄邮电专科学校陈淦英副教授对本书的编写给予大力支持和帮助，在此表示衷心地感谢．

由于编者水平有限和编写经验不足，书中缺点和错误在所难免，希望广大读者批评指正．

编　者

1995 年 1 月

目 录

第一篇 线性代数

第二篇　概率论

第三篇　复变函数与拉氏变换

第一篇　线性代数

第一章　行　列　式

§1　n阶行列式

在生产实践中，一些变量之间的关系可以直接或近似地表示为线性函数，因此研究线性函数是非常重要的问题. 线性代数主要是研究线性函数. 在线性代数中线性方程组是一个基础部分，也是一个重要部分，研究线性方程组首先需要行列式的知识.

在中学里我们学过用二阶行列式解两个未知量的线性方程组，用三阶行列式解三个未知量的线性方程组.

对于两个变量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2, \end{cases} \tag{1}$$

二阶行列式的定义是：

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc. \tag{2}$$

而方程组（1）的求解公式是

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}};\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{3}$$

当然，公式（3）只有在分母的行列式不为0时才对.

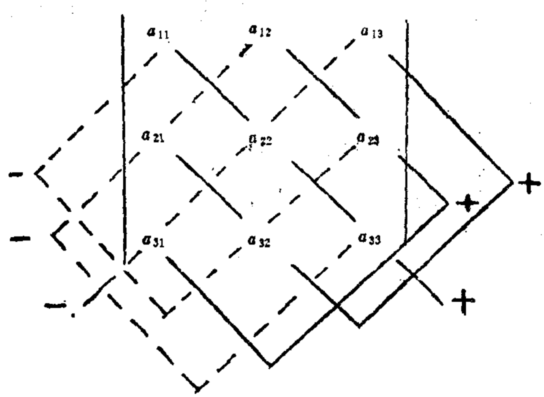
对于三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3, \end{cases} \tag{4}$$

三阶行列式按对角线法定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{5}$$

我们可用下述办法记忆三阶行列式的定义，三阶行列式是由不同行、不同列的三个数的乘积而得到的，共有 6 个项的代数和，这些项的正、负号可用下列对角线的规则来记忆。



则方程组(4)的解的公式是

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \qquad (6)$$

公式(6)也只有在分母的行列式不为0时才对.

注意观察公式(3)和(6)，不难发现它们具有下述规律：分母的行列式是由未知量的系数按照方程中的位置排列而成的；而分子的行列式只需要在分母的行列式中用b_1，b_2（或b_1，b_2，b_3）来代替该未知量前面的系数而成.

上述解的公式有很强的规律性，对于n个未知量n个方程的方程组是否有类似的结果呢？为解决这个问题，我们引进n阶行列式的概念.

为叙述和使用的方便，我们先介绍行列式的一些有关概念.

定义1 行列式中的每个数都称为这个行列式的元素. 横排叫行，且自上而下分别叫第一行，第二行，…. 纵排叫列，且自左而右分别叫第一列，第二列，…. 元素a_{ij}第一个下标i表示该元素所在行，第二个下标j表示该元素所在列.

定义2 把行列式中某个元素所在的行和列都划去，剩下的元素按原来的排法组成的行列式叫做这个元素的余子式，元素a_{ij}的余子式记为M_{ij}.

定义3 令$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称A_{ij}为元素a_{ij}的代数余子式.

例如在行列式(5)中

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

有了余子式及代数余子式的概念后，我们可把用对角线法定义的二、三阶行列式写成下述形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,|a_{22}| - a_{21}\,|a_{12}|$$
$$= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}.$$

我们规定，一阶行列式 $|a|=a$，注意这里要和绝对值记号严格分开.

不难验证，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}.$$

有了二、三阶行列式这种统一的形式之后，我们便可定义 n 阶行列式.

定义4　假设 $n-1$ 阶行列式按照上述办法已有定义，我们定义 n 阶行列式 D 为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots$$
$$+(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \cdots\cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{n1}A_{n1}. \tag{7}$$

即 n 阶行列式等于第一列各元素与其相对应的代数余子式乘积之

和.

这种下定义的方法叫做用数学归纳法下定义。因为有了二、三阶行列式的定义，按照(7)式，四阶行列式也有了定义，如此类推，任意阶的行列式都有了定义.

例1 求上三角行列式（主对角线下面元素都为零）的值：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (n\text{阶}).$$

解 由于D的第一列元素除a_{11}外都是0，所以根据行列式的定义，有

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \quad ((n-1)\text{阶}).$$

同理，并依次类推有

$$D=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特殊地，有
$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

行列式中没写出的元素都为0。

例2 求证：

$$D=\begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ & \diagup & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

（行列式中没写出的元素都是0）.

证 行列式中第一列除λ_n外都为0，并注意到λ_n是在行列式的第n行第一列位置上，由行列式定义

$$D=(-1)^{n+1}\lambda_n\begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & \diagup & \\ \lambda_{n-1} & & \end{vmatrix}.$$

同理，继续下去有

$$D=(-1)^{n+1}\lambda_n(-1)^n\lambda_{n-1}\begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & \diagup & \\ \lambda_{n-2} & & \end{vmatrix}=\cdots=$$

$$=(-1)^{n+1+n+\cdots+3}\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\,|\lambda_1|$$

$$=(-1)^{\frac{(n+1+3)}{2}(n-1)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

§2 行列式的性质及应用

利用行列式的定义虽然可降低行列式的阶数，从而计算出它的值，但是却增加了计算行列式的个数，这种计算是很繁重的. 为简化行列式的计算，下面研究行列式的性质.

性质1 互换行列式两行，行列式变号.

证 先就交换行列式相邻两行的情形来证明.

对二阶行列式性质显然成立.

假定性质对$n-1$阶行列式成立. 对n阶行列式D交换第k行和第$k+1$行而得D^*，要证明的是$D^*=-D$.

$$D^*=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由行列式定义

$$\begin{aligned}(\mathrm{I})\ D=&a_{11}M_{11}+\cdots+(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}\\&+(-1)^{k+2}a_{k+1,1}M_{k+1,1}+\cdots\\&+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{II})\ D^*=&a_{11}M_{11}^*+\cdots+(-1)^{k+1}a_{k+1,1}M_{k1}^*\\&+(-1)^{k+2}a_{k1}M_{k+1,1}^*+\cdots\\&+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}^*.\end{aligned}$$

比较(Ⅰ)、(Ⅱ)两式，除第k项和第$k+1$项外，由归纳假设，它们相对应的余子式均相差一个因子-1．而在第k项和第$k+1$项中，$Mk_1=M^*_{k+1,1}$，$M_{k+1,1}=M^*_{k1}$，而它们前面的系数各相差一个因子-1，故$D^*=-D$．这样就由归纳法完成了该性质交换相邻两行的情形．而交换任意两行可由多次交换相邻两行来做到，比如交换第k行和第$k+r$行，我们可逐步把k行和它下面各行依次交换，最后换到$k+r$行下面，一共交换了r次．然后把$k+r$行逐步和它上面各行交换，最后换到$k+1$行上面，一共交换了$r-1$次，这样总共逐行交换了$2r-1$次．因此由前面交换相邻两行的结果，便有$D^*=(-1)^{2r-1}D=-D$．　　证毕

以r_i表示第i行，互换i，j两行记作$r_i\longleftrightarrow r_j$，

推论　如果行列式有两行完全相同，则此行列式为0．

证　交换这完全相同的两行，由性质1，便有$D=-D$，故$D=0$．

性质2　行列式中某一行所有元素都乘以同一数k等于用数k