计算方法典型例题分析

孙志忠 编著

科学出版社

计算方法典型例题分析

计算方法典型例题分析

孙志忠　编著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书是为理工科院校各专业的学生在学习计算方法或数值分析课程时，更好地理解、掌握解题思路和方法，提高综合分析能力而编写的辅导教材. 包括误差分析、方程求根、线性代数方程组的解法、函数插值、曲线拟合、数值积分与数值微分、常微分方程初值问题数值解法、矩阵特征值与特征向量的计算共8章. 每章先给出内容提要，然后按教学内容的顺序精选若干典型题目作分析解答. 书末附三份模拟试卷及其参考答案.

图书在版编目(CIP)数据

计算方法典型例题分析/孙志忠编著. -北京:科学出版社,2001

ISBN 7-03-008991-X

Ⅰ.计… Ⅱ.孙…Ⅲ.数值计算-计算方法-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 81345 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

北京双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年3月第 一 版　　开本: 710×1000 1/16

2001年3月第一次印刷　　印张: 16 3/4

印数: 1—6 000　　字数: 299 000

定价: 25.00 元

前　　言

在计算方法或数值分析课程的学习过程中，解题是一项非常重要的活动．灵活运用所学知识去分析问题和解决问题是一种能力的训练．为了帮助学生学好计算方法，开拓思路，提高解题技巧，掌握解题方法，我们参照了教育部高等教育司关于高等学校工科本科生“数值计算方法”课程基本要求以及近几年来国内出版的多本计算方法的教材，精选了177道典型题目作了解答，也希望读者用另外的方法给出解答．

为了便于读者阅读，我们按教学内容的顺序进行编排．对每一道题目注重分析和讨论，以便读者更好地理解、掌握解题思路和方法，提高综合分析能力．较难的题目以“*”标注．书末附三份模拟试卷及其参考答案．

书中有疏漏及不妥之处，恳请读者指正．

编者诚挚地感谢科学出版社的同志们为本书的出版付出的辛勤劳动．

作　者

2000年8月于东南大学

目　　录

第一章　误差分析

1.1　内容提要

本章要求掌握绝对误差、相对误差、有效数、数据误差的影响以及设计算法时应注意的几个问题.

1. 绝对误差与绝对误差限

设 x^* 为准确值，x 是 x^* 的一个近似值，称 $e = x^* - x$ 为近似值 x 的绝对误差，简称误差. 如果有数 ε 使得 $|e| \leqslant \varepsilon$，则称 ε 为近似值 x 的绝对误差限，简称误差限.

2. 相对误差和相对误差限

设 x^* 是准确值，x 是 x^* 的一个近似值，称 $(x^* - x)/x^*$ 为近似值 x 的相对误差，记作 e_r.

在实际计算中，x^* 是未知的，常以 $\bar{e}_r = (x - x^*)/x$ 作为相对误差. 事实上

$$\bar{e}_r - e_r = \frac{e_r^2}{1 - e_r}, \quad \bar{e}_r - e_r = \frac{\bar{e}_r^2}{1 + \bar{e}_r}$$

当 e_r 很小时，$\bar{e}_r - e_r$ 是 e_r 的二阶小量；当 $\bar{e}_r$ 很小时，$\bar{e}_r - e_r$ 是 $\bar{e}_r$ 的二阶小量. 所以 e_r 和 $\bar{e}_r$ 中只要有一个很小，则另一个也很小，且它们是同量级的小量.

如果有常数 ε_r 使得 $|e_r| \leqslant \varepsilon_r$（或 $|\bar{e}_r| \leqslant \varepsilon_r$），则称 ε_r 为相对误差限.

3. 有效数字

如果近似数 x 的误差限是其某一位上的半个单位，且该位直到 x 的第一位非零数字一共有 n 位，则称近似值 x 有 n 位有效数字.

$$x = \overbrace{* \quad * \quad * \quad * \quad \cdots \quad *}^{n\text{ 位}}$$

误差限不超过该位的半个单位

自左向右看，第一个非零数

4. 数据误差的影响

给定函数 $y=f(x_1,x_2)$. 设 x_1、x_2 分别为 x_1^*、x_2^* 的近似值,则

$$\begin{aligned} e(y) &= f(x_1^*,x_2^*)-f(x_1,x_2) \\ &\approx \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}(x_1^*-x_1)+\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}(x_2^*-x_2) \\ &= \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}e_1+\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}e_2 \end{aligned}$$

$$e_r(y)=\frac{e(y)}{y}\approx\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\ \frac{x_1}{y}e_{1r}+\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\ \frac{x_2}{y}e_{2r}$$

由以上两式可得

$$e(x_1+x_2)\approx e(x_1)+e(x_2),\qquad e_r(x_1+x_2)\approx\frac{x_1}{x_1+x_2}e_r(x_1)+\frac{x_2}{x_1+x_2}e_r(x_2)$$

$$e(x_1-x_2)\approx e(x_1)-e(x_2),\qquad e_r(x_1-x_2)\approx\frac{x_1}{x_1-x_2}e_r(x_1)-\frac{x_2}{x_1-x_2}e_r(x_2)$$

$$e(x_1x_2)\approx x_2e(x_1)+x_1e(x_2),\qquad e_r(x_1x_2)\approx e_r(x_1)+e_r(x_2)$$

$$e\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\approx\frac{e(x_1)}{x_2}-\frac{x_1}{x_2^2}e(x_2),\qquad e_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\approx e_r(x_1)-e_r(x_2),x_2\neq0$$

5. 设计算法时要注意的几个问题

(1) 应用数值稳定的递推公式.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$是由递推公式

$$\begin{cases} x_n=F(x_{n-1}),\ n=1,2,\cdots \\ x_0\ \text{给定} \end{cases} \tag{1.1}$$

得到的. 若 x_0 有误差 e_0,则实际上只能得到

$$\begin{cases} \tilde{x}_n=F(\tilde{x}_{n-1}),\ n=1,2,\cdots \\ \tilde{x}_0=x_0-e_0 \end{cases}$$

记 $e_n=x_n-\tilde{x}_n$, $n=1,2,\cdots$. 如果存在不依赖于 n 的常数 C 使得

$$|e_n|\leqslant C|e_0|,\ n=1,2,\cdots$$

则称递推公式(1.1)是数值稳定的. 否则称为数值不稳定的.

(2) 注意简化运算步骤,减少运算次数.

(3) 要避免相近数相减.

(4) 多个数相加,应先将绝对值较小的数相加之后,再依次与绝对值较大的数相加.

1.2 典型例题分析

1.2.1 绝对误差 相对误差 有效数字

【例 1.1】 问 3.142, 3.141, $\frac{22}{7}$ 分别作为 π 的近似值各具有几位有效数字?

解 $\pi = 3.14159265\cdots$

记 $x_1 = 3.142, x_2 = 3.141,\ x_3 = \frac{22}{7}$.

1) 由

$\pi - x_1 = 3.14159\cdots - 3.142 = -(3.142 - 3.14159\cdots) = -0.00040\cdots$

知

$$\frac{1}{2} \times 10^{-4} < |\pi - x_1| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

因而 x_1 具有 4 位有效数字.

2) 由

$$\pi - x_2 = 3.14159\cdots - 3.141 = 0.00059\cdots$$

知

$$\frac{1}{2} \times 10^{-3} < |\pi - x_2| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

因而 x_2 具有 3 位有效数字.

3) 由

$$\pi - \frac{22}{7} = 3.14159\cdots - 3.14285\cdots = -0.00126\cdots$$

知

$$\frac{1}{2} \times 10^{-3} < \left|\pi - \frac{22}{7}\right| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

因而 x_3 具有 3 位有效数字.

【例 1.2】 1) 经过四舍五入得出 $x_1 = 6.1025, x_2 = 80.115$,试问它们分别具有几位有效数字? 2) 求 $x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 x_2, \frac{x_1}{x_2}$ 的绝对误差限.

解 1) 记 x_1 和 x_2 的精确值分别为 x_1^* 和 x_2^*,则有

$$|x_1^* - x_1| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}, \quad |x_2^* - x_2| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

所以 x_1 和 x_2 分别具有 5 位有效数字.

2) 由于 $|e(x_1)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}$, $|e(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-3}$,所以

$$|e(x_1+x_2)| \approx |e(x_1)+e(x_2)| \leqslant |e(x_1)| + |e(x_2)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4} + \frac{1}{2}\times 10^{-3} = 0.00055$$

$$|e(x_1-x_2)| \approx |e(x_1)-e(x_2)| \leqslant |e(x_1)| + |e(x_2)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4} + \frac{1}{2}\times 10^{-3} = 0.00055$$

$$|e(x_1x_2)| \approx |x_2e(x_1)+x_1e(x_2)| \leqslant x_2|e(x_1)| + x_1|e(x_2)|$$

$$\leqslant 80.115\times\frac{1}{2}\times 10^{-4} + 6.1025\times\frac{1}{2}\times 10^{-3} = 0.007057$$

$$\left|e\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right| \approx \left|\frac{1}{x_2}e(x_1) - \frac{x_1}{x_2^2}e(x_2)\right| \leqslant \frac{1}{x_2}|e(x_1)| + \frac{x_1}{x_2^2}|e(x_2)|$$

$$\leqslant \frac{1}{80.115}\times\frac{1}{2}\times 10^{-4} + \frac{6.1025}{80.115^2}\times\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$= 0.10995\times 10^{-5}$$

【例 1.3】 设 $x_1=1.21, x_2=3.65, x_3=9.81$ 都精确到二位小数,试估计由这些数据计算

$$x_1 x_2 + x_3$$

的相对误差.

解 记 $x_1=1.21$, $x_2=3.65$, $x_3=9.81$, $u=x_1x_2$, $v=u+x_3$, 则

$$|e(x_1)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-2}, \quad |e_r(x_1)| = \left|\frac{e(x_1)}{x_1}\right| \leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-2}}{1.21}$$

$$|e(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-2}, \quad |e_r(x_2)| = \left|\frac{e(x_2)}{x_2}\right| \leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-2}}{3.65}$$

$$|e(x_3)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-3}, \quad |e_r(x_3)| = \left|\frac{e(x_3)}{x_3}\right| \leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-2}}{9.81}$$

因为

$$e_r(u)=e_r(x_1x_2)\approx e_r(x_1)+e_r(x_2)$$

$$e_r(v)=e_r(u+x_3)\approx\frac{u}{u+x_3}e_r(u)+\frac{x_3}{u+x_3}e_r(x_3)$$

$$\approx\frac{x_1x_2}{x_1x_2+x_3}\left(e_r(x_1)+e_r(x_2)\right)+\frac{x_3}{x_1x_2+x_3}e_r(x_3)$$

所以

$$|e_r(v)|\leqslant\frac{x_1x_2}{x_1x_2+x_3}\left(|e_r(x_1)|+|e_r(x_2)|\right)+\frac{x_3}{x_1x_2+x_3}|e_r(x_3)|$$

$$\leqslant\frac{1.21\times3.65}{1.21\times3.65+9.81}\times\left(\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{1.21}+\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{3.65}\right)$$

$$+\frac{9.81}{1.21\times3.65+9.81}\times\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{9.81}$$

$$=0.00206$$

【例 1.4】 采用迭代法计算$\sqrt{7}$,取

$$\begin{cases}x_0=2\\ x_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_k+\dfrac{7}{x_k}\right),\ k=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

若 x_k 是$\sqrt{7}$的具有 n 位有效数字的近似值,求证 x_{k+1}是$\sqrt{7}$的具有 $2n$ 位有效数字的近似值.

解 首先我们证明$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\sqrt{7}$. 由

$$x_{k+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{7}{x_k}\right)-\sqrt{7}=\frac{1}{2x_k}(x_k-\sqrt{7})^2,k=0,1,2,\cdots$$

知

$$x_{k+1}-\sqrt{7}\geqslant0,\ k=0,1,2,\cdots$$

即

$$x_k\geqslant\sqrt{7},\ k=1,2,3,\cdots$$

因而

$$x_1-\sqrt{7}=\frac{1}{2x_0}(x_0-\sqrt{7})^2=\frac{1}{4}(\sqrt{7}-2)^2 \tag{1}$$

$$\left|x_{k+1}-\sqrt{7}\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{7}}(x_k-\sqrt{7})^2,\ k=1,2,3,\cdots \tag{2}$$

记　$r=\frac{1}{2\sqrt{7}}$,递推可得

$$\left|x_{k+1}-\sqrt{7}\right|\leqslant r(x_k-\sqrt{7})^2\leqslant r[r(x_{k-1}-\sqrt{7})^2]^2=r^{1+2}(x_{k-1}-\sqrt{7})^{2^2}$$

$$\leqslant r^{1+2}[r(x_{k-2}-\sqrt{7})^2]^{2^2}=r^{1+2+2^2}(x_{k-2}-\sqrt{7})^{2^3}\leqslant\cdots$$

$$\leqslant r^{1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}}(x_1-\sqrt{7})^{2^k}\leqslant r^{2^k-1}\left[\frac{1}{4}(\sqrt{7}-2)^2\right]^{2^k}$$

$$=2\sqrt{7}\left(\frac{1}{8\sqrt{7}}\right)^{2^k}(\sqrt{7}-2)^{2^{k+1}},k=0,1,2,\cdots$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\sqrt{7}$.

设 x_k 是$\sqrt{7}$的具有 n 位有效数字的近似值,即$\left|x_k-\sqrt{7}\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-(n-1)}$,则由(2)知

$$\left|x_{k+1}-\sqrt{7}\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{7}}(x_k-\sqrt{7})^2\leqslant\frac{1}{2\sqrt{7}}\left[\frac{1}{2}\times10^{-(n-1)}\right]^2$$

$$\leqslant\frac{10}{4\sqrt{7}}\times\frac{1}{2}\times10^{-(2n-1)}\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-(2n-1)}$$

因而 x_{k+1}是$\sqrt{7}$的具有 $2n$ 位有效数字的近似值.

1.2.2　数据误差的影响

【例 1.5】　设 $x>0$,x 的相对误差限为δ,求 x^n 和 $\ln x$ 的相对误差限.

解　由条件知　$\left|e_r(x)\right|\leqslant\delta$.由一元函数 $y=f(x)$的相对误差公式

$$e_r(y)\approx f'(x)\frac{x}{f(x)}e_r(x)$$

有

1) $e_r(x^n)\approx nx^{n-1}\cdot\frac{x}{x^n}\cdot e_r(x)=ne_r(x)$

$$\left|e_r(x^n)\right|\approx\left|ne_r(x)\right|\leqslant n\delta$$

2) $e_r(\ln x)\approx\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln x}e_r(x)=\dfrac{1}{\ln x}e_r(x)$

$$\left|e_r(\ln x)\right|\approx\left|\frac{e_r(x)}{\ln x}\right|\leqslant\frac{\delta}{\left|\ln x\right|}$$

【例 1.6】 设 $y=\ln x$. 当 $x\approx a(a>0)$时,如果已知对数 $\ln a$ 的绝对误差限为$\dfrac{1}{2}\times10^{-n}$,试估计真数 a 的相对误差限及有效数字位数.

解 由 $y=\ln x$ 知 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.因而

$$e(y)\approx e_r(x)$$

于是

$$e(\ln a)\approx e_r(a)$$

由 $\left|e(\ln a)\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\times10^{-n}$得到

$$\left|e_r(a)\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-n}$$

又由

$$e(a)=a\ e_r(a)\text{得}$$

$$\left|e(a)\right|\leqslant a\times\frac{1}{2}\times10^{-n}$$

设

$$a=(0.\beta_1\beta_2\cdots)\times10^m,\ \beta_1\geqslant1$$

则

$$\left|e(a)\right|\leqslant10^m\times\frac{1}{2}\times10^{-n}$$

因而真数 a 具有 n 位有效数字.

【例 1.7】 设计算球体积允许其相对误差限为 1%,问测量球半径的相对误差限最大为多少?

解 记球半径为 R,球体积为 V.由题意知 $\left|e_r(V)\right|\leqslant1\%$.由公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

知

$$\mathrm{d}V=4\pi R^2\mathrm{d}R$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{4\pi R^2\mathrm{d}R}{\frac{4}{3}\pi R^3}=3\frac{\mathrm{d}R}{R}$$

因而

$$|e_r(R)|\approx\frac{1}{3}|e_r(V)|\leqslant\frac{1}{3}\times 1\%=0.33\%$$

即测量球半径的相对误差限最大为 0.33%.

【例 1.8】 真空中自由落体运动距离 s 和时间 t 的关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$, g 是重力加速度.现设 g 是准确的,而对 t 的测量有 ±0.1 秒的误差.证明当 t 增加时,距离的绝对误差增加,而相对误差却减少.

解 由 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 得

$$\mathrm{d}s=gt\ \mathrm{d}t$$

因而

$$e(s)\approx gt\,e(t),\ e_r(s)=\frac{e(s)}{s}\approx\frac{gt\,e(t)}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2}{t}e(t)$$

于是

$$|e(s)|\approx gt|e(t)|,\ |e_r(s)|\approx\frac{2}{t}|e(t)|$$

易知当 $|e(t)|$ 固定时, $|e(s)|$ 随着 t 的增加而增加,而 $|e_r(s)|$ 随着 t 的增加而减少.

【例 1.9】 已测量某长方形场地长 $a=110$ 米,宽 $b=80$ 米.若

$$|a-a^*|\leqslant 0.1(\text{米}),\ |b-b^*|\leqslant 0.1(\text{米})$$

试求其面积的绝对误差限和相对误差限.

解 由题意知 $a=110, b=80, |e(a)|\leqslant 0.1, |e(b)|\leqslant 0.1, |e_r(a)|=$

$$\left|\frac{e(a)}{a}\right| \leqslant \frac{0.1}{110},\ \left|e_r(b)\right| = \left|\frac{e(b)}{b}\right| \leqslant \frac{0.1}{80}.$$

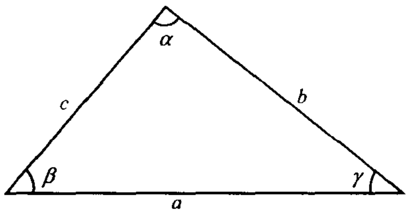
面积 $S=ab$. 计算面积 S 的绝对误差限为

$$\begin{aligned}\left|e(S)\right| &\approx \left|be(a)+ae(b)\right| \leqslant b\left|e(a)\right| + a\left|e(b)\right| \\ &\leqslant 80\times\frac{0.1}{110}+110\times\frac{0.1}{80}=0.210\end{aligned}$$

计算面积 S 的相对误差限为

$$\begin{aligned}\left|e_r(S)\right| &\approx \left|e_r(a)+e_r(b)\right| \leqslant \left|e_r(a)\right| + \left|e_r(b)\right| = \frac{0.1}{110}+\frac{0.1}{80} \\ &= 0.00216\end{aligned}$$

【例 1.10】 如图知道三角形一边和两邻角的近似值为 $a=100,\beta=45^\circ$, $\gamma=45^\circ$. 假设 a,β,γ 的观测误差限分别为 $0.1, 0.1^\circ, 0.1^\circ$. 试计算另外的边和角,并给出误差的界.



解 由题意知 $a=100,\beta=45^\circ=\frac{\pi}{4},\gamma=45^\circ=\frac{\pi}{4}$, $\left|e(a)\right| \leqslant 0.1$,

$$\left|e(\beta)\right| \leqslant 0.1^\circ = \frac{\pi}{1800},\ \left|e(\gamma)\right| \leqslant 0.1^\circ = \frac{\pi}{1800}$$

根据三角形内角和为 π 知

$$\alpha=\pi-\beta-\gamma=\frac{\pi}{2}$$

$$\left|e(\alpha)\right| \approx \left|-e(\beta)-e(\gamma)\right| \leqslant \left|e(\beta)\right| + \left|e(\gamma)\right| \leqslant \frac{\pi}{1800}+\frac{\pi}{1800}=\frac{\pi}{900}=0.2^\circ$$

由正弦定理有

$$b=a\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=100\times\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}}=50\sqrt{2}$$

$$c = a\,\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 100 \times \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}} = 50\sqrt{2}$$

由

$$\mathrm{d}b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\mathrm{d}a + a\,\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\mathrm{d}\beta - a\,\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

知

$$e(b) \approx \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}e(a) + a\,\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}e(\beta) - a\,\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}e(\alpha)$$

因而

$$\begin{aligned}|e(b)| &\leqslant \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}|e(a)| + a\,\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}|e(\beta)| + a\,\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}|e(\alpha)| \\ &= \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}} \times 0.1 + 100 \times \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}} \times \frac{\pi}{1800} + 100 \times \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} \times \frac{\pi}{900} \\ &= 0.194\end{aligned}$$

同理

$$|e(c)| \leqslant 0.194$$

1.2.3　设计算法时应注意的几个问题

【例 1.11】　设 $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x$，求证

1) $I_n = 1 - nI_{n-1}$，$n = 1,2,3,\cdots$

2) 正向递推时误差传播逐步放大，逆向递推时误差传播逐步衰减.

解　1) 当 $n \geqslant 1$ 时

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}\mathrm{e}^{x-1} = x^n\mathrm{e}^{x-1}\Big|_{x=0}^{1} - \int_0^1 \mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x^n \\ &= 1 - n\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x = 1 - nI_{n-1}\end{aligned}$$

2) 正向递推由 I_{n-1} 计算 I_n：