SPT 高等院校选用教材 师范类

大学文科数学

首都师范大学数学系 组编
张饴慈 焦宝聪
都长清 王汇淳 编著

科学出版社

高等院校选用教材(师范类)

大学文科数学

首都师范大学数学系　组编
张饴慈　焦宝聪
都长清　王汇淳　编著

科学出版社
2001

内 容 简 介

本书是北京市教育委员会"高等师范教育面向21世纪教学内容和课程体系改革"项目的研究成果，是专为文、史、哲、政治、语言等专业本科生编写的一本数学教材. 全书共分6章，包括微积分大意、随机数学的基本思想、线性代数初步、几何、无穷的比较、应用举例等. 书中根据文科的特点，突出对数学的基本思想的理解，强调学生的数学思维训练，淡化形式计算，有利于提高文科学生数学知识水平.

本书可作为大学本科文、史、哲、政治、语言等专业的数学教材.

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/张饴慈等编著. -北京：科学出版社，2001.6
(高等院校选用教材(师范类))
ISBN 7-03-009141-8

Ⅰ. 大… Ⅱ. 张… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 02132 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年6月第 一 版　开本：710×1000 1/16
2001年6月第一次印刷　印张：14 1/4
印数：1—4 000　字数：246 000

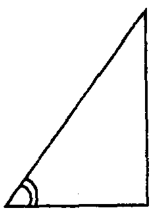
定价：21.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈杨中〉)

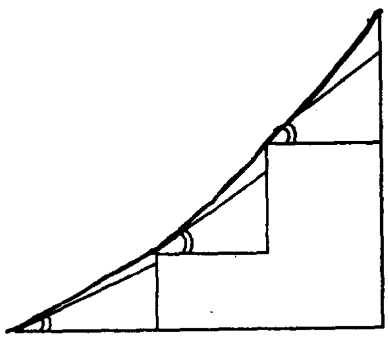
序　一

数学已经成为大学的公共课,是大学理性教育不可缺少的.对于非理科学生,要开哪些数学课程,已达成共识的有微积分、线性代数和随机数学,本书也不例外地要讲这三方面的内容.

线性代数与中学内容相接近,无非是将中学的只有两、三个变量的线性方程组推广到多个变量的线性方程组,而在计算机时代后者已越来越被需要.对于文科学生来说,也许更重要的是从中能学到数学的研究方法,即那种由多到少、逐步降级的思想,以及在大规模问题中的规律程序化的重要性.要学习这些思想和方法,数学是再好不过的示范.



图(a)



图(b)

然而,微积分的传统教学与中学有着很大距离.许多中学生由于听说微积分具有无穷性而对大学理工科望而生畏,所以,微积分成为大学数学改革的重点.笔者认为,造成大学和中学切开的教学方法应该改变,也就是说,大学教育必须重视与中学教育的衔接.笔者的经验是:告诉学生,大学与中学的区别在于中学研究直的图形,而大学研究曲的图形.可是,在曲图形中取出一小段,在放大镜之下观察,又跟直的没有什么两样.也就是说,在放大镜之下,大学就是中学.于是,我们可以根据中学的经验,来做大学的事情.在中学里,一个直角三角形的高可以通过底角的斜率和底边长求出来,如图(a);在大学里,每一小段曲图形的高也可以通过这个小段底角的斜率和底边长求出来,大段曲图形的高是许许多多小段图形的高的叠加,如图(b).这就是微积分基本定理的方

法和结论.笔者对微积分的这种经验,或直觉的、发明的观点,已被本书用来证明微积分基本定理.从这种证明中,可以看到分而治之,化大为小,化难为易,各个击破的精神,这对于每个人都是宝贵的——每个人不妨用这种精神来解剖自己所遇到的事物.

微积分很有用,连人口的增长也可以通过它来预报.社会生活中大量的随机现象(见本书第二章),也可以通过它来描述.

以上讲的线性代数和微积分,随机数学也在微积分中一带而过.

几何呢?数与形乃是数学大厦的两大基石,而且甚至形比数更是数学的基石.这是因为人类对于数经过了很长时间的训练,而对于形的认识则是本能具有的.大多数学生对几何比对代数有更深的印象,也就是这个道理.可是,中学几何尚未揭示几何是最本质的东西,即几何只是一些公理的结论,公理变了结论也要变.而几何公理是人类生活空间的一种经验,未必经得起理性的推敲.例如平行公理,谁曾经对一条直线段做过无限延长的实验呢?本书第四章的非欧几何就要回答这个问题.结论是一个物理世界可以有三种不同的几何,从逻辑思维的观点,这三种几何同样合理.这个现象够刺激的——凡爱思考的人都会为它神魂颠倒.更重要的,非欧几何充分体现了人类的理性追求,而这是每个人都必须具备的品质.

数学太奇妙了,也太需要了.希望本教材能体现这些.

林　群

2001 年春节于北京中关村

序　二

目前高等数学已成为大学文科学生的必修课,在大学文科学生的教育中起到越来越重要的作用.因此编写一本符合文科需求,适应时代发展的好的文科高等数学教材,已成为一种时代的需求.文科高等数学的编写开始于 20 世纪 90 年代初.最初的一些教材多是理科教材的删繁就简,与文科的实际要求相距甚远.近几年来情况发生了令人鼓舞的变化,大家逐渐认识到,从本质上讲,对文、史、哲类大学生的数学教育不是技术教育,而是一种素质教育,至少目前阶段是如此.因此在内容编写上应当淡化细节,强调思想.最近陆续出版了一些新的文科高等数学教材,很有新意,令人高兴.张饴慈等几位先生编写的《大学文科数学》就是其中突出的一本.

本书最为精彩的部分是概率论与数理统计,在目前已出版的文科高等数学教材中,这部分是写得最好的.篇幅虽不大,但把要讲的基本问题都讲清楚了.重点放在阐明思想,而不在于公式的推导.对照目前许多数学教科书,多是从公式到公式,很少讲到思想性,结果学生学不到实质性的东西,课一结束就忘了.

在微积分部分,将积分学放在前面,这种处理方法是可取的.但大部分微积分教材都不是这种处理方式.西方分析学的权威 R.柯朗(Richard Courant)在他的巨著《微积分和数学分析引论》一书中就采用了这种处理方式.这种安排易于被学生所接受,因为积分学是静态的,比微分学的概念好理解,又与历史的发展顺序相符合.微分学的概念是动态的和瞬间的,瞬间的概念涉及到两个无穷小量比的极限概念,更难于理解.在学生有了较高的数学素养,对极限概念有了更深的理解后,再引入,较为适当.此外,虽然微分学的概念只涉及瞬间的事情,但数学家心中想的却是“以暂定久,以瞬入常”,他们的野心是刻画整个运动过程,理解到这一点需要花时间.

最后加一章“应用举例”,立意很好,使微积分的应用落到了实处.

总之,我觉得本书很有新意,对加强大学文科学生的数学素质教育很有助益.美中不足者,全书各章未能做到首尾如一.是为序.

张顺燕

于北京大学燕北园

前　　言

这是为大学文、史、哲、政治、语言等专业学生而编写的数学教材．社会科学中其他一些学科，如经济、社会、教育、心理、管理等，由于它们所需数学知识较多，这些专业的学生应选择其他的教材．

目前许多大学都开设了文科高等数学课．一个大学生在中小学已学过12年的数学，数学教育是他所受的最多的教育（和本国的语文教育时间一样长）．那么，为什么到了大学还要学习数学？特别是对文、史、哲等专业的学生，希望他们学习数学的目的何在？

大家知道，数学的应用近几十年来已经发生了根本的变化．数学已深入到几乎所有的领域．“高科技本质上是数学”这句话已经越来越得到人们的认同．正如A.N.Rao指出的：“一个国家的科学的进步可以用它消耗的数学来衡量．”

特别需要指出的是，数学的思想和方法对社会科学已产生巨大影响，在许多方面，数学已不再是一个辅助性工具，而成为解决问题的关键所在．著名数学家A.Kaplan指出：“由于最近20年的进步，社会科学的许多重要领域已经发展到使不懂数学的人望尘莫及的阶段．”

当前，在语言、历史这样的学科中，也产生了像“数理语言学”、“计量史学”等以数学为工具研究语言、历史的新学科．数学已成为这些学科中有机的一部分，不学习数学就无法对该学科有真正的理解．

但是，数学除了是科学的工具和语言外，还是一种十分重要的思维方式与文化精神．美国国家研究委员会在一份题为《人人关心数学教育的未来》的研究报告中指出：“除了定理和理论外，数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断以及运用符号等．它们是普遍适用的、强有力的思考方式．应用这些数学思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代里日益重要的一种智力．它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探索偏见，能估计风险，能提出变通办法．数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界．”

可以说，正是在这个意义上，联合国教科文组织把2000年定为“世界数学年”，并指出“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙．”

对文、史、哲等专业的学生，我们强调的将不是数学方法的应用，而是对数

学作为一种文化精神、思维方式的认识，特别是对贯穿于数学学科中的那种无与伦比的理性精神的认识.

人们都知道，数学追求一种完美的理性认识，要求研究的对象有确切无误的刻画，从简单而明确的命题出发，以准确而令人信服的逻辑推理达到其明确的结论. 数学追求的是一种理性精神，追求的是真、善、美.

F. Klein 指出："正是这种精神使得人类的思维得以运用到最完善的程度，亦正是这种精神试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活，试图回答有关人类自身存在的问题."

同样，数学对社会科学产生的影响也决不仅仅是一些数学方法在这些学科的具体应用. 更重要的是，数学的思维方式使得在社会科学的研究中，对基本概念和关键词的确立，课题的论证和表述，以及研究结果的检验与评价，都更加科学、严谨而令人信服.

因此，我们对这本教材有如下一些想法.

首先，这本教材不应是理工科或经济类高等数学教材的删繁就简. 因为，上述教材大多侧重于数学方法的应用，更多地强调的是数学的工具性. 许多计算公式、运算方法要求学生熟练掌握，而这对文、史、哲等专业的学生是完全不必要的.

但是，从另一方面讲，这本教材也不能变成只讲数学"思想"而不涉及数学具体内容的科普读物. 事实上，要想使学生在数学的思维方式上有所体会和提高，必须要接触数学的内容，必须要"做"数学，要思考，要分析，不能偷懒图轻松，不做练习.

我们认为，这类理想的教材，是由一个个专题组成的(而不必限于目前高等数学中的微积分、线性代数、概率统计三部分). 每个专题独立成篇，有深刻的思想(最好能反映数学史上重大变革的思想)而无需过多的预备知识. 教师可根据学生的具体情况及学时的多少，自由地选择一些专题来讲授，不必在乎知识的系统性，而要使学生在数学的思维方式上有所收获.

现代教育要求提高学生的素质，其中非常重要的就是学生的数学素质，即学会数学的思维方式、理解数学的真善美、并会把所学的数学知识应用于自己的专业和日常生活. 鉴于目前在中小学中存在片面追求升学率等问题，学生在中学数学学习中，过多的是解题训练，而缺乏真正的理解，这就使得目前大学的数学学习特别显得必要. 对文、史、哲等专业的学生来说，他们今后也许不会再接触数学. 但是，上大学后，在没有了考试、升学的压力下，学生能以平和的心态来理解数学的思想和实质无疑会对他们有很大的好处.

但是，由于我们的水平有限，加上时间过于仓促，只编写了微积分大意、随

机数学的基本思想、线性代数、几何、无穷的比较、应用举例等六章内容离我们的设想相差甚远.像图论、差分、算法、尺规三等分角,甚至经济上的独裁定理等都是很好的题材,经过改造应该可以编入教材.*包括的内容仅供读者选用.

和目前已出版的文科高等数学教材相比,本教材有较大的不同.例如,在概率统计部分,我们避开了事件的关系与运算、古典概率、公理化、条件概率等一系列问题,只突出了"分布完全描述了随机现象的规律"这一基本思想,并着重讲解分布的作用和应用问题,我们强调问题的提法和描述(如参数估计、假设检验等)而略去了细节.又如在微积分部分,借助直观用极限直接讨论导数和积分,而略去了函数连续性等预备知识,只要求学生会求最简单的积分和导数,目的是为了加深对概念的理解.但为了加强学生数学思维的训练,我们更多地强调了建立严格理论的必要性,并对数列极限的定义作了比一般理工科教材稍多的讨论.另外,还结合文科特点,专门用一节讨论了命题与否命题以及命题的充要条件(这是中学内容的推广).

更多的改变不可能在这里一一详叙.尽管我们曾用其中的部分内容对学生讲授过,但也许我们的观点太偏激了,问题肯定不少.如果本教材的某些编写想法能在今后文科教材的编写中,起到抛砖引玉的作用,我们就十分满足了.教师在使用本书时,可按课时和听课对象,选择若干章节讲授.

本书的基本思想和框架是集体讨论的结果.都长清老师所费心血最多.第一、二、五章由张饴慈执笔,第三章由都长清执笔,第四章由王汇淳执笔,第六章由焦宝聪执笔.整个文稿繁琐的编辑组织工作,也是由焦宝聪完成的.

本书是北京市教育委员会"高等师范教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革"资助项目.在编写过程中,得到北京市教委高教处,首都师范大学校领导、教务处和数学系的积极支持;华德康、马祖良、王汝辑、童武、周祖逵和姚芳等老师分别对本书手稿有关部分进行了认真的审阅并提出了许多宝贵的修改意见;连四清、方运加和姚芳老师在教学中试用了本书讲义,对此我们表示衷心的感谢.

中国科学院院士、第三世界科学院院士林群教授,北京大学张顺燕教授分别为本书写了序,对此我们表示衷心感谢.

最后,我们要感谢科学出版社,特别是吕虹女士,没有他们的大力支持,本书不会如此顺利地出版.

由于水平所限,书中缺点错误在所难免,敬请读者提出宝贵意见.

作　者
2001 年 1 月于首都师范大学

目　　录

第一章　微积分大意

这里介绍微积分的基本思想，它的讨论主要基于人们的直观（§1～§4）．在§5会对其理论基础作些分析，给出数列极限的定义．读者要能熟练地应用和计算，还须去读专门的微积分教材．§6讨论的问题与微积分的关系不大，不过，了解这部分内容，对文科学生是有益的．

§1　极　　限

一、数列的极限

我们在中学已学过数列的极限．下面是一些数列的例子：

(1) $1,2,3,\cdots,n,\cdots$;

(2) $2,4,6,\cdots,2n,\cdots$;

(3) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$;

(4) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots$;

(5) $1,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$;

(6) $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$.

一般地，数列记为 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，或简记为 $\{a_n\}$．

人们关心当 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 变化的趋势．今后用 $n\to\infty$ 表示“n 无限增大”．从上面给出的一些数列可以发现，当 $n\to\infty$ 时，它们的变化有不同的特点．其中有些数列，如数列(3)，(4)，(5)，当 $n\to\infty$ 时，a_n 与某个常数 A 无限接近．数列(3)，当 $n\to\infty$ 时，$a_n=\frac{1}{2^n}$ 与 $A=0$ 无限接近．数列(4)，当 $n\to\infty$ 时，$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 也与 0 无限接近，而数列(5)，当 $n\to\infty$ 时，$a_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ 和 $A=1$ 无限接近．数列(1)，(2)，(6)则没有上述性质．数列(1)，(2)，当 $n\to\infty$ 时，a_n 无限增大；而数列(6)，当 $n\to\infty$ 时，a_n 在 1 和 -1 之间不停地“摆动”．

若一个数列 $\{a_n\}$，当 $n\to\infty$ 时，a_n 与某个常数 A 无限接近，则称这数列

$\{a_n\}$以A为极限或$\{a_n\}$收敛到A，记作

$$a_n \to A \quad (n\to\infty) \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

因此，对数列(3)，(4)，(5)有

$$\frac{1}{2^n}\to 0 \quad (n\to\infty) \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}\to 0 \quad (n\to\infty) \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0,$$

$$\frac{n-1}{n}\to 1 \quad (n\to\infty) \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1.$$

数列(1)，(2)，(6)不存在极限，称这样的数列为发散的.

练习 1

你能看出下列哪些数列是收敛的，哪些数列是发散的吗？对收敛的数列指出其极限.

(1) $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{2n-1},\cdots$;

(2) $\frac{2}{3},\left(\frac{2}{3}\right)^2,\left(\frac{2}{3}\right)^3,\cdots,\left(\frac{2}{3}\right)^n,\cdots$;

(3) $\frac{3}{2},\left(\frac{3}{2}\right)^2,\left(\frac{3}{2}\right)^3,\cdots,\left(\frac{3}{2}\right)^n,\cdots$;

(4) $\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$;

(5) $1,0,\frac{1}{2},0,\frac{2}{3},0,\frac{3}{4},0,\cdots$;

(6) $3-\frac{1}{2},3-\frac{1}{2},3+\frac{1}{3},3+\frac{1}{3},3-\frac{1}{4},3-\frac{1}{4},3+\frac{1}{5},3+\frac{1}{5},\cdots$;

(7) $\frac{1}{2},1,\frac{2}{3},1,\frac{3}{4},1,\frac{4}{5},1,\cdots$;

(8) $\lg\left(2+\frac{1}{2}\right),\lg\left(2-\frac{1}{3}\right),\lg\left(2+\frac{1}{4}\right),\lg\left(2-\frac{1}{5}\right),\cdots$;

(9) $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right),\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right),\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right),\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right),\cdots$;

(10) $\frac{1}{2},0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{4},0,-\frac{1}{5},0,\cdots$.

二、函数的极限

类似于数列的极限，也可以考虑当自变量x无限增大时，函数$y=f(x)$的极限问题.

例如，对函数 $f(x)=1+\frac{1}{x}$. 当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)=1+\frac{1}{x}$ 和常数 $A=1$ 无限接近. 我们称，当 x 趋于无穷（记为 $x\to\infty$）时，$f(x)=1+\frac{1}{x}$ 以 1 为极限，或 $f(x)=1+\frac{1}{x}$ 收敛到 1. 记为

$$1+\frac{1}{x}\to 1 \quad (x\to\infty) \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

一般地，若 $|x|$ 无限增大时，$y=f(x)$ 与某个常数 A 无限接近，则称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 收敛到 A. 记作

$$f(x)\to A \quad (x\to\infty) \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=x^2$ 无限增大，不存在极限. 即 $x\to\infty$ 时，$y=x^2$ 是发散的. 对函数 $y=\sin x$，不难看出，当 $x\to\infty$ 时，y 的值在 $+1$ 和 -1 之间来回“摆动”. 不存在极限，也是发散的.（在微积分中，我们规定三角函数 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ 等的自变量 x 的单位均采用弧度制. 即用 $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，… 表示 $60°$，$90°$，…）

对于函数 $y=f(x)$，不仅可以考虑 $x\to\infty$ 时，$y=f(x)$ 的变化趋势，也可以考虑当自变量 x 无限接近某个常数 a 时，$f(x)$ 的变化趋势. 例如，当 x 无限接近常数 2 时，$f(x)=\sqrt{x}$ 将无限接近 $\sqrt{2}$. 这一结果记为

$$\sqrt{x}\to\sqrt{2} \quad (x\to 2) \quad 或 \quad \lim_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2},$$

称当 x 趋于 2 时，$\sqrt{x}$ 收敛到 $\sqrt{2}$，或以 $\sqrt{2}$ 为极限. 类似地，当 x 无限接近 0 时，$y=\sin x$ 将收敛到 $\sin 0=0$，有

$$\sin x\to 0 \quad (x\to 0) \quad 或 \quad \lim_{x\to 0}\sin x=0,$$

一般地，对给定的函数 $y=f(x)$，当自变量 x 无限接近某个常数 a 时，如果 $f(x)$ 会无限接近一个常数 A，那么称 x 趋于 a 时，$f(x)$ 以 A 为极限或 $f(x)$ 收敛到 A. 记为

$$f(x)\to A \quad (x\to a) \quad 或 \quad \lim_{x\to a}f(x)=A.$$

若 $x\to a$ 时，$f(x)$ 的极限不存在，则称 $x\to a$ 时，$f(x)$ 是发散的. 例如，$x\to 0$ 时，$1+\frac{1}{x}$ 的极限不存在，是发散的.

当 $f(x)$ 恒为一常数 c，即对任意的 x，$f(x)=c$. 此时，不难看出 $\lim\limits_{x\to\infty}c=c$，$\lim\limits_{x\to a}c=c$.

练习 2

1. 当 $x\to\infty$ 时,你能看出下列函数哪些是收敛的吗?试指出收敛的极限.

(1) $1+\dfrac{1}{x^3}$;　(2) $\cos x$;　(3) $\dfrac{1}{3+x^2}$;

(4) $3-2x^2$;　(5) $\lg(3+x^2)$;　(6) $\dfrac{2x^2-1}{x^2}$.

2. 当 $x\to 0$ 时,你能看出下列函数哪些是收敛的吗?试指出收敛的极限.

(1) $\cos x$;　(2) $\dfrac{1}{3+x^2}$;　(3) $\lg(3+x^2)$;

(4) $\dfrac{2x^2-1}{x^2}$;　(5) $\dfrac{x-1}{x-2}$;　(6) 2^x.

3. 试写出下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{1+x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 2}3^x$;　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\lg(2+x^2)$.

三、极限的性质与运算

并不是所有的极限,从直观上都是容易看出来的.考虑下面一些例子(以下称为问题)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$.

我们的问题是:这些极限存在吗?如果极限存在,它们等于什么?

人们常常以为数学只是计算和逻辑推理,只是一个个定理的证明.其实不然,像"$x\to 0$ 时,$\dfrac{\sin x}{x}$ 等于什么?"这类问题,不是靠逻辑推理推出来的.它依赖于人们的直觉、经验与猜想,依赖于试验,需要探索与发现.例如,对前面的问题(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$,人们通过计算发现

$$\sqrt{2}\approx 1.4142,\quad \sqrt[5]{5}\approx 1.3791,\quad \sqrt[10]{10}\approx 1.2589,$$
$$\sqrt[100]{100}\approx 1.0471,\quad \sqrt[1000]{1000}\approx 1.0069,\quad \sqrt[10000]{10000}\approx 1.0009.$$

可以猜测应该有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.类似地,对于问题(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$,计算表明:

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$\sin x$	0.8915	0.4795	0.0998	0.04998	0.0099998	0.0049999	0.001000

由此看来,$x\to 0$ 时,$\frac{\sin x}{x}$应趋于 1.

但是,数学不能仅仅靠猜测和直觉,还需要证明这些猜测是正确的.因为,一方面,直觉与经验可能会是错误的(见§5);另一方面,更重要的是,直觉与经验有时很难说清问题.例如,当极限值是一个无理数,像 π,$\sqrt{2}$等,是一个无限不循环小数,直觉是很难把握它的.事实上,只有"证明"才能把问题"说清楚".逻辑结构的作用在于它能揭露出问题的实质与内在联系,使之更好地推广与应用.关于这方面的讨论将在§5中进行.在这一节,仍是利用人们的直观给出一些极限的性质并利用这些性质来分析和计算极限,包括前面的问题(1),(2),(4)(问题(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 将放在§5中讨论).

若数列$\{a_n\}$以A 为极限,则当 $n\to\infty$时,a_n 将无限接近A.但接近的方式可以很不同.例如,数列

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$$

以 0 为极限,但却以"在 0 左右跳动"的方式趋于 0.而数列

$$1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},\cdots$$

也以 0 为极限,它却不断地到达 0,又不断地离开.在各种不同的方式中,最简单的是$\{a_n\}$递增地趋于A,或递减地趋于 A.数列$\{a_n\}$递增是指,对一切 n 有 $a_n\leqslant a_{n+1}$;递减是指,对一切 n 有 $a_n\geqslant a_{n+1}$.不难看出,数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,$$

$$\frac{1}{2},\left(\frac{1}{2}\right)^2,\left(\frac{1}{2}\right)^3,\left(\frac{1}{2}\right)^4,\cdots$$

都是递减数列,它们的极限是 0.数列

$$-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$$

是递增的数列,它的极限是 0.而数列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$$

是递增数列,它的极限是 1,数列

$$1,1,1,\cdots$$

既是递增数列,又是递减数列,它的极限是 1.

一个递增的数列不一定有极限.例如,数列 1,2,3,⋯是递增的,当 $n\to\infty$ 时,a_n 无限增大,极限不存在.递减的数列,其情形是类似的.为简单计,下面只讨论递增数列.

若递增数列$\{a_n\}$有极限A,此时,不难看出,对一切n有$a_n \leqslant A$.例如,数列$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$是递增的,极限为1.我们有$\frac{n-1}{n} \leqslant 1$.

一个数M,若满足对一切n,有$a_n \leqslant M$,则称M为数列$\{a_n\}$的一个上界.例如,1是数列$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$的一个上界.由于$\frac{n-1}{n}<1<2$,对一切$n$,有$\frac{n-1}{n}<2$.从而2也是$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$的一个上界.这表明,若数列$\{a_n\}$有上界,则不止一个.

读者不难看出,一个递增的数列$\{a_n\}$,或者当$n\to\infty$时,a_n无限增加,没有极限,此时$\{a_n\}$没有上界;或者当$n\to\infty$时,a_n尽管增加却有上界,此时$\{a_n\}$是收敛的.

因此,我们有一个判别数列收敛的重要法则:

性质 1 递增有上界的数列是收敛的.

这个性质也许有人觉得不够直观.我们将在§5中讨论它.下面用一个例子来说明它的应用.

考虑前面的问题(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$是否收敛.令$a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$,由

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}=a_n+\frac{1}{(n+1)!}>a_n$$

知$\{a_n\}$是递增数列,又

$$\begin{aligned}
a_n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\
&= 1+1+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n}\right]\\
&\leqslant 2+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}\right]\\
&= 2+\frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}=2+\frac{3}{4}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]\\
&\leqslant 2+\frac{3}{4}=2.75.
\end{aligned}$$

这表明2.75是$\{a_n\}$的一个上界.由性质1知,$n\to\infty$时,$a_n=1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}$的极限存在,记这极限为e,即

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

性质 1 告诉了我们，$n\to\infty$ 时，$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ 的极限存在. 但却没有给出极限 e 的确切值. 事实上，在许多极限问题中，我们都无法给出极限 A 的确切值. 只能证明极限是存在的，并对极限值给出一个估计.

可以证明 e 是一个无理数(见这节最后). 利用 $n\to\infty$ 时，$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ 无限接近 e，可以计算 e 的近似值

$$e\approx 2.718281828459.$$

数 e 和圆周率 π 一样，是数学中最重要的常数之一，在高等数学中应用十分广泛.

下面给出的两个极限性质，讨论的是不同数列极限的关系.

性质 2 若数 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 满足：对一切 n，有 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则数列 $\{b_n\}$ 的极限也存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

这一性质直观上是明显的. 它是说，若 b_n 夹在 a_n 和 c_n 之间，当 a_n，c_n 趋于同一目标 A 时，b_n 也趋于 A. 若把数列 a_n，b_n，c_n 换成函数 $f(x)$，$h(x)$，$g(x)$，把 $n\to\infty$ 换成 $x\to a$ 或 $x\to\infty$. 类似的结论也成立.

利用这一性质，可以讨论一些较复杂的极限问题. 例如，前面提到的问题(2)，即当 $x\to\infty$ 时，$\frac{\sin x}{x}$ 的极限问题. 注意到

$$-\frac{1}{|x|}\leqslant-\frac{|\sin x|}{|x|}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant\frac{|\sin x|}{|x|}\leqslant\frac{1}{|x|},$$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{|x|}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0$. 由性质 2 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

现在，利用性质 2 来讨论问题(1)，即证明前面的猜测：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(注意，当 $x\to 0$ 时，此时 $\frac{\sin x}{x}$ 的分子、分母都趋于 0，这类极限问题称为 $\frac{0}{0}$ 型的极限问题. 当问题是 $\frac{0}{0}$ 型时，极限不一定存在. 例如，当 $x\to 0$ 时，$\frac{x}{x^2}$ 的极限问题是 $\frac{0}{0}$ 型问题，它的极限不存在.)