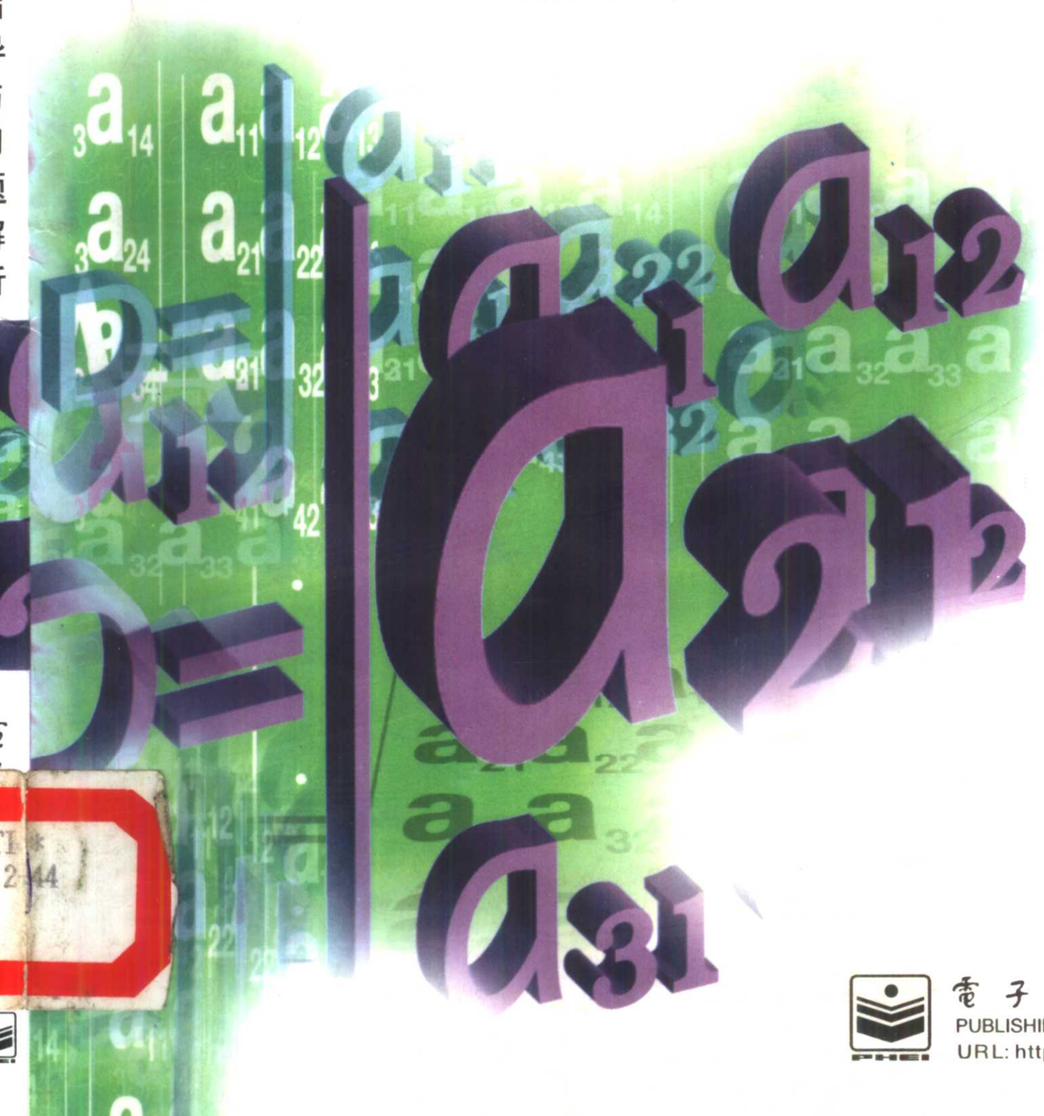
高等专科学校教材

《线性代数》——学习指导与习题解析

钱椿林　蒋　麟　编



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL: http://www.phei.com.cn

高等专科学校教材

《线性代数》
——学习指导与习题解析

钱椿林　蒋　麟

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

本书是中国计算机学会大专教育委员会推荐出版的《线性代数》的配套教材。编写本书的目的是为了帮助读者在学习线性代数时，更好地，更加精确地掌握有关线性代数的基本概念、基本理论和基本方法。对线性代数中的一些难点、重要概念或重要方法力求给出进一步的说明。书中对《线性代数》教材中的习题进行了详尽的分析，并给出了多种解法，以期开拓读者的视野，培养和提高他们的灵活运用基本概念和基本理论解决问题的能力。

本书不仅适合正在学习线性代数的学生使用，也可供教授线性代数的教师的教学参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与习题解析/钱椿林，蒋麟编.-北京：电子工业出版社，1999.6
ISBN 7-5053-5221-0
Ⅰ.线… Ⅱ.①钱… ②蒋… Ⅲ.线性代数-高等学校：专业学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 40086 号

丛 书 名：高等专科学校教材
书　　名：《线性代数》——学习指导与习题解析
著 作 者：钱椿林　蒋　麟
责任编辑：赵家鹏
特约编辑：程　会
排版制作：电子工业出版社计算机排版室
印 刷 者：中国科学院印刷厂
出版发行：电子工业出版社　URL：http://www.phei.com.cn
北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1092　1/16　印张：17.25　字数：436.8 千字
版　　次：1999 年 4 月第 1 版　1999 年 4 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5053-5221-0 / G·425
定　　价：22.00 元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺页、倒页、脱页、所附磁盘或光盘有问题者，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系调换。电话　68279077

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作的有关规定,在电子工业部教材办的组织与指导下,按照教材建设适应“三个面向”的需要和贯彻国家教委关于“以全面提高教材质量水平为中心、保证重点教材,保持教材相对稳定,适当扩大教材品种,逐步完善教材配套”的精神,大专计算机专业教材编审委员会与中国计算机学会教育专业委会大专教育学会密切合作于1986~1995年先后完成了两轮大专计算机专业教材的编审与出版工作。共出版教材48种,可以较好地解决全国高等学校大专层次计算机专业教材需求问题。

为及时使教材内容更适应计算机科学与技术飞速发展的需要;在管理上适应国家实施“双休日”后的教学安排;在速度上适应市场经济发展形势的需要,在电子工业部教材办的指导下,大专计算机专业教材编委会、中国计算机学会大专教育学会与电子工业出版社密切合作,从1994年7月起经过两年的努力制定了1996~2000年大专计算机专业教材编审出版规划。

本书就是规划中配套教材之一。

这批书稿都是通过教学实践,从师生反映较好的讲义中经学校选报,编委会评选择优推荐或认真遴选主编人,进行约编的。广大编审者,编委和出版社编辑为确保教材质量和出版,作出了不懈的努力。

限于水平和经验,编审与出版的缺点和不足,望使用学校和广大师生提出批评建议。

电子计算机学会教育委员会大专教育学会
电子工业出版社

附：先后参加全国大专计算机教材编审工作和参加全国大专计算机教育学会学术活动的学校名单：

上海科技高等专科学校
上海第二工业大学
上海科技大学
上海机械高等专科学校
上海化工高等专科学校
复旦大学
南京大学
上海交通大学
南京航空航天大学
扬州大学工学院
济南交通专科学校
山东大学
苏州市职工大学
国营734厂职工大学
南京动力高等专科学校
南京机械高等专科学校
南京金陵职业大学
南京建筑工程学院
长春大学
哈尔滨工业大学
南京理工大学
上海冶金高等专科学校
杭州电子工业学院
上海电视大学
吉林电气化专科学校
连云港化学矿业专科学校
电子工业部第47研究所职工大学
福建漳州大学
扬州工业专科学校
连云港职工大学
沈阳黄金学院
鞍钢职工工学院
天津商学院
国营738厂职工大学
北京广播电视大学
天津职业技术师范学院
天津市计算机研究所职工大学
山西大众机械厂职工大学
河北邯郸大学
沈阳机电专科学校
北京燕山职工大学
国营761厂职工大学
山西太原市太原大学
大连师范专科学校
江苏无锡江南大学
上海轻工专科学校
上海仪表职工大学
常州电子职工大学
国营774厂职工大学
西安电子科技大学
电子科技大学
河南新乡机械专科学校
河南洛阳大学
郑州粮食学院
江汉大学
武钢职工大学
湖北襄樊大学
郑州纺织机电专科学校
河北张家口大学
河南新乡纺织职工大学
河南新乡市平原大学
河南安阳大学
河南洛阳建材专科学校
开封大学
湖北宜昌职业大学
中南工业大学
国防科技大学
湖南大学

湖南计算机高等专科学校
中国保险管理干部学院
湖南税务高等专科学校
湖南二轻职工大学
湖南科技大学
湖南怀化师范专科学校
湘穗电脑学院
湖南纺织专科学校
湖南邵阳工业专科学校
湖南湘潭机电专科学校
湖南株洲大学
湖南岳阳大学
湖南商业专科学校
长沙大学
长沙基础大学
湖南零陵师范专科学校
湖北鄂州职业大学
湖北十堰大学
贵阳建筑大学
广东佛山大学
广东韶关大学
西北工业大学
北京理工大学
华中工学院汉口分院
烟台大学
安徽省安庆石油化工总厂职工大学
湖北沙市卫生职工医学院
化工部石家庄管理干部学院
西安市西北电业职工大学
湖南邵阳师范专科学校

前　言

中国计算机学会大专教育学会和大专计算机专业教材编委会制定的 1996 ~ 2000 年大专计算机专业教材编审出版规划，正式实施以来，二十四种大专计算机专业的教材相继出版，《线性代数》是其中之一。这些教材陆续问世以来，读者希望提供相应的学习指导资料，本书正是应这样的要求，编撰而成的。

我们希望将本书编写成一本《线性代数》教材所涉及的主要理论系统的归纳，提供给读者一个全面的，融汇贯通的知识体系，通过例题解析，我们尽量给出解题的思路和一题多解的方法。这样做的目的是，为了使读者在做习题时，不仅掌握其有关知识，而且更重要的是能自觉地提高分析问题和解决问题的能力，掌握解决线性问题的基本方法和技巧。比较同一类问题各种不同解法的优劣，虽然有些解法从简练程度来看并不是最好的，但是多方面了解一个问题的解法，对于加强基本概念和基本理论的理解是有好处的。

作为教材的一个补充，有些不便在教材中深入展开的有关内容和难点，在本书中都可以找到进一步地阐述，为了开拓思路，教材中有些内容，在这里将从另一个角度作了讨论，特别是加强了对分块矩阵的一些运算，介绍了“矩阵打洞法”。这种方法在矩阵的乘积运算、方阵行列式与逆矩阵求法等方面有着广泛的用途。还介绍如何处理奇异矩阵的“摄动法”的思路，即将奇异矩阵变为非奇异矩阵来证明或计算，最后把结果通过极限运算回到原来的矩阵。这些方法和思路为加深线性代数的学习而进一步打好基础。

在讨论一些较难理解或容易产生疑惑的概念时，我们通过正反两个方面来理解和讨论，因为只理解了“什么是某某”或者“为什么是某某”还不够，同时也要了解“什么不是某某”或者“为什么不是某某”，才能全面清晰理解其中的每一个概念。

最后，对于线性代数中比较抽象的问题，欲想寻找解决其问题的方法有一定难度，有时还感到无从下手。在本书中，我们重点介绍了如何考虑抽象问题或者具体问题的基本思路、方法和技巧。即借助于线性代数的抽象运算和性质，进行抽象的逻辑思维和抽象的推理思维，这样，不仅能掌握基本的计算方法，而且能运用线性代数的理论灵活地解决所遇到的实际问题，提高了解决实际问题的准确性。

以上就是编写本书的宗旨，希望对学习线性代数的人们有所裨益。

本书只是作为学习《线性代数》时辅助之用。习题的解析占了一定篇幅，为了使之相对地自成一体，使学过线性代数的读者便于使用，书中各章与《线性代数》教材中各章一一对应；并且将各章中主要的概念和定理(或公式)作了一个简要的概括；各章的主要的解题方法进行深入的总结和归纳。便于读者能全面掌握，提高读者的解题能力。

本书由钱椿林主编，蒋麟编撰了本书的第一、二章，俞泳薇副教授和我的女儿钱华也参加了部分编撰工作。在编写本书的过程中，得到有关方面的大力支持，电子工业出版社的赵家鹏主任，为本教材与这本配套书的编写构思提出了有益的建议和支持，对此也表示由衷的感谢。

在编写本书过程中，我们深深地感到，虽然我们作了很大的努力，但是要编撰好一本对读者真正有用的学习辅导书是多么地不易。想必在书中不妥或错误之处仍会存在。诚恳地希望各方面专家学者和广大师生及时给予指正和赐教，不胜感谢！

钱椿林　蒋麟

一九九八年六月于苏州

目　　录

第一章　行　列　式

第一节　本章的主要概念

一、二阶行列式

二阶行列式的展开式规定为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-1}$$

(1-1)式等号右边的式子称为二阶行列式D的展开式。

如果D中的元素 a_{ij}都是数，则D就是按这种规定得到的一个数值；如果D中的元素 a_{ij}中至少有一个是字母或数学符号的，则D就是按这种规定得到的一个数学式。

利用二阶行列式，可以把二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

的解表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{11}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

二、三阶行列式

三阶行列式的展开式规定为：

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) \\ &\quad +a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31} \end{aligned}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \tag{1-2}$$

在三阶行列式的展开式(1-2)中可以看出，它是六项乘积的代数和，其中三项取“+”号，三项取“-”号，而每一项是位于不同行、不同列的三个元素的乘积。

利用三阶行列式的展开式，可以把三元一次方程组写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

其解表示为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

为了便于记忆和准确计算三阶行列式，经常采用“对角线法”——把三阶行列式的第一、二列写在行列式的右边，主对角线上的三个元素相乘(实线连接)取“+”号，副对角线上的三个元素相乘(虚线连接)取“-”号，把这六项相加，就可得到三阶行列式的值。即

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

三、n 阶行列式

1. n 阶行列式的定义

将 n^2 个元素(数或字母或数学符号等)按一定的顺序排成 n 行 n 列(横的称行，竖的称列)，并在左、右两边各加一竖线的算式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

称为 n 阶行列式，它表示一个由确定的运算关系所得到的数或数学式。

称 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n)$ 为行列式 D 的第 i 行第 j 列的元素。

2. 余子式 M_{ij}

称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式，即在(1-3)式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，其它的元素原顺序不变所构成的 $n-1$ 阶行列式

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. 代数余子式 A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称为元素 a_{ij}的代数余子式。

4. n 阶行列式的展开式

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

称为 n 阶行列式按第一行展开，即 n 阶行列式的展开式。它是由此行列式的第一行的所有元素与其相应的代数余子式乘积之和而得到的。

说明：n 阶行列式的展开式亦可由它的任一行(或列)的所有元素与其相应的代数余子式乘积之和得到。

计算 n 阶行列式时，若某一行或某一列中零元素越多，按该行或该列来展开，计算就越简单。

四、转置行列式

将行列式 D 的行、列互换后，得到的新的行列式 D'(或 D^T)称为 D 的转置行列式。即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

五、上三角行列式

主对角线(从左上角到右下角这条对角线)下方的元素全为零的行列式称为上三角行列式。即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

一个 n 阶行列式若能通过变换，化为上三角行列式，则计算该行列式就很容易了。

六、下三角行列式

主对角线上方的元素全为零的行列式称为下三角行列式。即

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = D$$

一个 n 阶行列式若能通过变换化为下三角行列式,则计算该行列式也是很容易的。

上、下三角形行列式都等于主对角线上元素的乘积。

第二节　本章的主要定理

一、行列式的七条性质

1. 行列式 D 与它的转置行列式 D' 相等,即 $D=D'$。

2. 互换行列式的两行(列),行列式的值改变符号。

由性质 2 可得出:如果行列式有两行(列)的对应元素相同或成比例,则这个行列式为零。

3. n 阶行列式等于任意一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$
$$(i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$
$$(j=1,2,\cdots,n)$$

性质 3 说明了行列式可按任一行或任一列展开。一般地,如果行列式的某一行或某一列中零元素较多,则按该行或该列展开来计算行列式会简便一些。

4. n 阶行列式中任意一行(列)的所有元素与另一行(列)的相应元素的代数余子式的乘积之和等于零。即当 $i \neq k$ 时,有

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0$$

由性质 3 和性质 4,可得到如下结论:

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} D_n, k = i \\ 0, \ k \neq i \end{cases}$$

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = \begin{cases} D_n, s = j \\ 0, \ s \neq j \end{cases}$$

5. 行列式某一行(列)的公因子可以提出来。即用一个数乘行列式就等于用这个数乘行列式的某一行或某一列。

6. 如果行列式中某一行(列)的元素可写成两数之和,则这个行列式等于两个行列式的和,而且这两个行列式除了这一行(列)以外,其余的元素与原行列式的对应元素相同。

7. 将行列式的某一行(列)的各元素都乘以同一个常数 λ 后,再加到另一行(列)的对应元素上,其值不变。

这条性质很重要，经常要用到，但也容易发生错误，做题时应特别引起重视。

二、克莱姆法则

如果含有 n 个方程 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么，此线性方程组一定有解，并且解是唯一的，其解是

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{1-4}$$

其中 $\Delta_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式 Δ 中的第 j 列的元素换成常数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，而其余各列不变所得到的 n 阶行列式。

用克莱姆法则求解含有 n 个方程 n 个未知数的线性方程组，有两个条件必须满足：

1. 方程组中方程的个数与未知数的个数都等于 n；
2. 方程组的系数行列式 $\Delta \neq 0$。

当一个线性方程组满足以上两个条件时，可以得到以下三个结论：

(1) 此方程组的解存在；

(2) 此方程组的解唯一；

(3) 此方程组的解是(1-4)式。

三、关于齐次线性方程组有非零解的定理

如果含有 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解，则它的系数行列式 $\Delta=0$。

第三节　本章的主要解题方法

一、行列式的计算方法

(一) 用对角线法

计算二、三阶行列式用此方法。